АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

7365—8422

*

№ 9 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики 3
Преподавание математики 10
Основания математики и математическая логика 11
Теория чисел 13
Алгебра 17
Многочлены и линейная алгебра 17
Группы 20
Поля, кольца и структуры 24
Математическая теория схем связи и управления 33
Топология 37
Теория функций действительного переменного 41
Теория множеств 46
Приближение функций полиномами и их обобщениями 48
Теория функций комплексного переменного . 50
Дифференциальные уравнения 62
Обыкновенные дифференциальные уравнения 62
Уравнения в частных производных . . . 73
Приложение к физике, технике и естественным наукам 84
Интегральные уравнения 96
Вариационное исчисление 101
Анализ (другие вопросы) 103
Числовые ряды 108
Специальные функции 108
Интегральные преобразования и операционное исчисление 110
Приложения общих методов математического анализа 112
Функциональный анализ 112
Теория вероятностей 123
Математическая статистика 137
Теория игр и математическая экономика 144
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 147
Геометрия 161
Приложения геометрии 161
Элементарная геометрия 162
Проективная и начертательная геометрия 166
Алгебраическая геометрия 167
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 169
Геометрия *n*-мерного пространства. Теория относительности 171
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 175
Метрические методы в геометрии 177
Геометрия выпуклых многообразий . . . 181
Численные и графические методы 182
Таблицы 190
Вычислительные машины и математические приборы 190
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 205

Адрес редакции: Москва, Д—219, Балтийская ул., 14

Поправки к РЖМатематика № 9 1958 г.

К реф. 7658

Фамилию и имя автора (строки 4 и 10) следует читать: Ральевић Шефкија.

К реф. 7659

Строки 17—19 следует читать так: „... жающая F на поверхность Ф над w-плоскостью. Основные результаты статьи связаны с вопросом, при каких условиях Ф обладает свойством Иверсена (Неванлинна Р.,"

К реф. 7724

Строки 12—15 следует читать так: „где поверхность $t=\psi(x_1, \ldots, x_n)$, несущая начальные данные, нигде не касается характеристических поверхностей. С помощью простого введения нового независимого переменного заданное уравнение приводится к ..."

К реф. 7789

Фамилию референта следует читать: „М. И. Розовский".

К реф. 7949

Строки 17—18 следует читать так: „Эта формула является обобщением соответствующего разложения неслучайной функции, доказывавшегося..."

К реф. 7997

В 1-й строке заголовка напечатано: „оптимумальных", следует читать „оптимальных".

К реф. 8075

В 1-й строке заголовка напечатано: „Исскуственное", должно быть „Искусственное".

К реф. 8173

Во 2-й строке заголовка напечатано: „fatã", следует „fatą"; напечатано „Kreinbler", следует „Kreindler,.

К реф. 8214

Во 2-й строке заголовка напечатано: „действительности", должно быть „действительных".

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Рефераты 7365—8422 **№ 9** **Ноябрь 1958 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

7365. Достижения советских математиков. Векуа И. Н., Природа, 1957, № 11, 71—78

Краткий очерк успехов советской математики за 40 лет. Освещаются вопросы: организация первых исследовательских институтов, богатое научное наследие, доставшееся советской математике, преемственность идей петербургской школы в трудах И. М. Виноградова, А. Н. Крылова, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, влияние Московской математической школы на развитие теории функций действительного переменного. Кратко охарактеризованы конкретные результаты И. М. Виноградова в теории чисел, А. Н. Колмогорова и его учеников в теории функций действительного переменного, И. Г. Петровского и Е. М. Ландиса в качественной теории дифференциальных уравнений, И. Р. Шафаревича в теории алгебраических уравнений.

Основными тенденциями современной математики, включая и советскую математику, автор считает возникновение все более узких направлений, возникновение и развитие противоположного —интегрального рассмотрения математических наук, усиление связи между теорией и практикой. Эти тенденции иллюстрируются на конкретных результатах советских математических школ. В заключение отмечается развитие математических центров в союзных республиках, положительная роль Института научно-технической информации АН СССР и прочные международные связи советских математиков. Н. И. Симонов

7366. Советская математика за сорок лет. Гнеденко (Радянська математика за сорок років. Гнеденко Б. В.), Вісник АН УРСР, 1957, № 11, 29—41 (укр.)

Дана общая характеристика созданных Октябрьской революцией предпосылок для мощного развития науки в СССР. Рассматривается значение математики для других наук, техники, народного хозяйства. Приводится также краткий очерк развития советской математики в целом в 1917—1957 гг. и очерк развития математики за те же годы на Украине. Далее автор перечислил те области нашей математической науки, которые значительно развились за прошедшие сорок лет. В последнем разделе статьи рассматриваются вопросы, связанные с развитием математики на Украине в ближайшие годы: подготовка новых кадров, выпуск новых периодических изданий, организация Украинского математического общества и др.

И. Б. Погребысский

7367. Задачи и перспективы развития науки в Советской Эстонии. Наан Г., Коммунист Эстонии, 1958, № 1, 47—56

7368. V Национальный конгресс математиков [Мексики] (V Congreso nacional de matematicas), Rev. Mat., 1957, № 2, 51—54 (исп.)

Перечень докладов, прочитанных на конгрессе, происходившем в различных городах штата Новый Леон в Мексике. И. Я. Депман

7369. Издание математической литературы Гостехиздатом за 25 лет. Орлов В. Б., Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 229—242

Общий обзор изданной литературы по математике.

Примечание референта. Перечень всех изданий содержится в ««Каталоге книг, вышедших в 1931—1955 гг.», М., 1957, содержащем аннотации 2142 книг и брошюр, а вместе с переизданиями 2855 названий.

И. Я. Депман

7370. Конференция по вопросам кибернетики. Земан Konference o kybernetice. Zeman Jiří), Eilos. časop. ČSAV, 1957, **5**, № 6, 955—960 (чешск.)

30 и 31 мая 1957 г. в Праге Чехословацкое общество по распространению политических и научных знаний организовало конференцию на тему «Некоторые вопросы кибернетики». На конференции были заслушаны доклады: Метелка (Metelka), Что такое кибернетика; Гашковец (Haškovec), Об автоматическом регулировании; Вурцфельд Надлер и Мартинек (Vurcfeld, Nadler, Martinek), О цифровых вычислительных машинах и их применении; Фигар (Figar), О применении кибернетики в биологии и физиологии; Шпачек (Spaček), Об основах теории информации; Ригер (Rieger), О философских проблемах кибернетики. В дискуссии выяснилось, что большинство участников конференции признало ценность кибернетики как новой научной дисциплины, но указывало на необходимость уточнения таких вопросов, как сущность мышления, разница между функциями мозга и машины, и других методологических проблем, для решения которых необходимо сотрудничество философов с работниками конкретных наук. Э. Я. Кольман

7371. Некоторые замечания по поводу математической олимпиады 1957 г. Финальный этап для 10-х классов. Григоре (Cîteva observatii asupra olimpiadei de matematică pe anul 1957, etapa finală, la clasa a X—a. Grigore I.), Gaz. mat. si fiz., 1957, **A9**, № 10, 533—538 (рум.)

Ежегодно в Румынии проводятся математические олимпиады для учащихся старших классов средних школ. Олимпиада проводится по областям, затем лучшие ученики посылаются на олимпиаду в Бухарест.

В 1957 г. конкурс состоял из письменной работы (3 часа) и устного экзамена. Письменная работа имела 3 вопроса: по алгебре, геометрии, тригонометрии. В статье приводятся примеры и задачи. А. Н. Гливич

7372. Взгляды на сущность математики. Перейра-Гомиш (Aspectos da actualidade matemática. Pereira Gomes A.), Gaz. mat., 1957, **18**, № 68-69, 1—6 (порт.)

Излагаются точки зрения на математику от Аристотеля до Данжуа, Рассела и Неймана. И. Я. Депман

7373. Наука и философия. Мерсье (Science et philosophie. Mercier André), Dialectica, 1957, **11**, № 3-4, 276—295 (франц.; рез. нем., англ.)

Философское значение математики и ее основное отличие от позитивных наук состоит, по мнению автора, в том, что позитивные науки (физика, биология и т. д.) дают нам сведения о конкретных явлениях, а математические истины применимы к очень широким классам явлений. По этой причине автор отождествляет математику и философию. Ю. С. Цапин

7374. Наука и техника информации. Куффиньяль (Science et technique de l'information. Couffignal Louis), Struct. et évolut. techn., 1955, **6**, № 39-40, 1—20; 1956, **7**, № 43-44, 1—14 (франц.)

Методологический очерк, посвященный определению информации, ее классификации, преобразованиям, передаче и хранению. Математический аппарат теории информации не рассматривается. Представляет интерес полнота освещения вопроса, делающая статью полезной и для математиков, разрабатывающих подобный аппарат. П. Е. Сивоконь

7375. Кибернетика. Куффиньяль (La cybernétique. (Essai méthodologique). Couffignal Louis), Struct. et évolut. techn., 1957, 8, № 51-52, 1—17 (франц.)

Н. Винер определял кибернетику как науку о связях и управлении в машинах, живых организмах и человеческом обществе. Автор расширяет это определение и считает кибернетику искусством обеспечения эффективности действия с учетом всех обстоятельств. Для такой кибернетики как математический, так и обычный разговорный языки оказываются недостаточными. Кибернетическим языком должен стать логический язык образцов как предметов знания и аналогий, для проверки которых необходимы вспомогательные системы—модели. При этом кибернетика теряет свое единство и распадается на ряд дисциплин.

Настоящий очерк—третий из серии методологических очерков автора (реф. 7374). П. Е. Сивоконь

7376. Медицинская кибернетика. Фогт (Cibernetica medica. Vogt Alfred), Folia clín. internac., 1957, **7**, № 12, 440—442 (исп.; рез. франц., англ., нем.)

Статья о влиянии счетно-решающих и управляющих устройств на методы медицинских исследований и о создании новой отрасли медицинской кибернетики. Э. Я. Кольман

7377. Перспективы и пределы воспроизведения механизмов головного мозга в электронных машинах. Бэлэнеску Ион Н., Ж. обществ. наук Акад. РНР, 1956, **1**, № 2, 43—65

Рассматриваются сходные свойства и существенные различия между счетными машинами и человеческим мозгом. В понимании философских проблем кибернетики автор руководствуется марксистско-ленинским учением об основных формах движения материи, о единстве и борьбе противоположностей как движущей силе всякого движения и развития. В качестве естественнонаучного материала широко используется учение И. П. Павлова о первой и второй сигнальной системе в физиологии высшей нервной деятельности.

Автор отмечает существенное значение счетных машин для построения моделей мышления, значение данных физиологии и психологии для совершенствования конструкций счетных машин, необходимость тесного сотрудничества между математиками и физиками, строителями электронных машин и физиологами и психологами. П. Е. Сивоконь

7378. Теория словообразования. Фукс (Theorie der Wortbildung. Fucks Wilhelm), Math.-phys. Semesterber., 1955, **4**, № 3-4, 195—212 (нем.)

Задача работы — выведение математического закона, которым определяется образование слов из слогов. Рассматриваются принципы анализа зависимости между числом слогов, количеством слоев и средним числом слогов в каждом слове в искусственных языках. Приводится диаграмма зависимостей в оптимальных искусственных языках. Затем эти принципы применяются к естественным языкам.

После рассмотрения эмпирического материала автор обобщает результаты исследования в виде математических формул. Однако для анализа зависимостей в естественных языках возникает необходимость принять во внимание системные условия, статистические факторы и факторы, связанные с индивидуальными особенностями текста. С. К. Шаумян

7379. О принципе непрерывности. Кизини (Sul principio di continuità. Chisini Oscar), Period. mat., 1956, **34**, № 5, 265—277 (итал.)

Принцип непрерывности, даже если его рассматривать только в области геометрии, есть совокупность различных факторов: метод доказательства; эвристический процесс; требование, которому надо удовлетворить при построении науки. Автор останавливается преимущественно на первом аспекте. Сначала приводится шесть элементарных примеров (свойства касательной выводятся из свойств секущей, свойства параболы—из свойств эллипса, свойства радикальной оси пересекающихся окружностей переносятся на случай, когда пересечения нет; свойства эллипса переносятся на гиперболу с соответствующей модификацией знаков). Затем приводятся высказывания Кеплера, Ньютона, Лейбница, Карно и Понселе о принципе непрерывности. Наконец, следует уточнение. На линии и поверхности накладывается требование алгебраичности. Устанавливается три аспекта принципа: 1) переход к пределу, 2) расширение геометрического свойства (на более широкий класс параметров); 3) индукция от предельного случая к общему. Изложение других сторон вопроса неотчетливое. М. Я. Выгодский

7380. Научное творчество. Сантало (La creacion cientifica. Santaló Marcelo), Rev. Mat., 1957, № 2, 34—37 (исп.)

Автор констатирует недостаток в США творчески работающих математиков. Причину этого явления он видит в программах математики средней и высшей школы, не содержащих разделов, которых требуют современная наука и техника. И. Я. Депман

7381. Влияние экономических и технических факторов на современную науку. Бернал Дж., Вестн. АН СССР, 1958, № 1, 25—38

7382. Математика для управляющих. Верхюлст (Mathematics for managers. Verhulst Michel), Impact, 1957, 8, № 1, 16—31 (англ.)

Рассматриваются математические вопросы, связанные с управлением и контролем на предприятиях. Разобраны и другие примеры, например о количестве баз при спасательных операциях на геликоптерах.

Указывается, что линейное программирование может быть применено к нахождению оптимальных решений при доставке и замене двигателей на самолетах; при составлении графика производства; при решении задачи о бродячем торговце (РЖМат, 1957, 1659); при рассмотрении проблемы очереди и др.

Примечание референта. Автор считает, что научный метод в организации труда ввел Тэйлор и все дальнейшие работы в этом направлении являются развитием его идеи. Референт напоминает ленинскую оценку (соч. т. 18, стр. 557) системы Тэйлора, с помощью которой капиталисты для обеспечения наивысшей прибыли выжимают из рабочих пот по всем правилам науки. Л. Е. Майстров

7383. Математическое понятие соотношения. Рой (Die wiskundige verhoudingsbegrip. Rooy A. J. van), Euclides (Nederl.), 1957, **33**, № 1, 27—29 (гол.)

7384. Крупный вклад в математику. Ляпунов А. А., Яблонский С. В., Природа, 1957, № 8, 54—56

Разъяснение проблемы тождества слов в теории групп и результатов П. С. Новикова в ее решении.

7385. Введение в теорию отношений. Штейнер (Einführung in die Relationentheorie. Steiner H. G.), Math.-phys. Semesterber., 1957, **5**, № 3-4, 261—271 (нем.)

Элементарная статья, содержащая первоначальные сведения из теории отношений. Д. А. Захаров

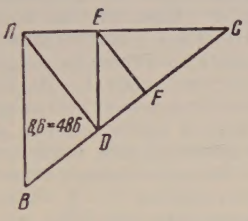
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

7386. Кибернетика. Хельмер (Küberneetika. Helmer E.), Tehnika ja tootmine, 1957, **12**, 36—41 (эст.)

Очерк основных идей кибернетики от итальянца Рамелли (1588) до Винера и Шеннона. И. Я. Депман

7387. Недавние открытия в вавилонской математике. II. Самый ранний известный нам задачник. Джонс (Recent discoveries in Babylonian mathematics. II. The earliest known problem text. Ed. Jones Phillip), Math. Teacher, 1957, **50**, № 6, 442—444 (англ.)

Ч. I. см. РЖМат, 1958, 1716. Автор рассматривает клинописный текст, опубликованный Таха Бакиром (Taha Baqir, Sumer, 1950, **6**, 39—54). Предполагают, что он был написан за 2000 лет до нашей эры. Таким образом он является самым ранним из известных математических текстов. Здесь решается следующая задача: дан прямоугольный треугольник со сторонами $AC = 60$, $AB = 45$, $BC = 75$, требуется определить длины отрезков BD, AE, AD, DF, если AD и $EF \perp BD$, $DE \perp AC$ и площадь треугольника ABD равна 486. Конечный результат вычисления вавилонским математиком длины отрезка BD можно записать так:



$$BD = \sqrt{AB\frac{1}{AC}2 \cdot \text{площадь треугольника } ABD}$$

На основании процедуры вычисления длины отрезка BD автор считает, что вавилонянам за 2000 лет до нашей эры было известно понятие подобия и свойства подобных треугольников и что они знали теорему о перпендикуляре, опущенном из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника.

А. Е. Раик

7388. Изложение и предложение оправдания любопытного и остроумного способа выполнения умножения двух целых чисел, восходящего к самой глубокой египетской древности. Альгрен (Exposé et proposition de justification d'une curieuse et subtile méthode remontant à la plus haute antiquité égyptienne, pour effectuer la multiplication de deux nombres entiers. Algrain Paul), Bull. Assoc. ingrs issus l'École applic. artill. et génie, 1956, **34**, № 2, 23—25 (франц.; рез. флам.)

Множимое делится пополам (если число нечетное, то предварительно отбрасывается единица) до тех пор, пока не получится единица, а множитель соответственно последовательно удваивается. В столбце для множителя выбрасываются все числа, которым в числе для множимого соответствуют четные числа. Произведение получается в результате сложения всех оставшихся чисел в столбце для множителя.

Доказательство получается легче, если изобразить множимое по двоичной системе счисления.

Египтяне действительно употребляли похожий способ умножения, с той только разницей, что они представляли в двоичной системе множитель и соответственно удваивали множимое, причем возрастание чисел в обеих колоннах шло в одном направлении.

Автор упоминает, что этот способ умножения употреблялся в России; действительно, им пользовался Лев Толстой в своей Яснополянской школе.

И. Н. Веселовский

7389. Эратосфен. Мартин-Хадраке (Eratóstenes. Martín Jadraque V.), Gac. mat., 1957, **9**, № 6-7, 159—161 (исп.)

Кроме общеизвестных сведений об Эратосфене, указывается, со ссылкой на Птолемея и Порфирия, на сочинение Эратосфена о музыкальных пропорциях. Полный список приписываемых Эратосфену фрагментов дан в Eratosthenica Bernhardy (Берлин, 1822).

И. Я. Депман

7390. К толкованию положений Феодора в диалоге Платона «Теэтет». Хеллер (Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros—Stelle in Platons Dialog «Theaetet». Heller Siegfried), Centaurus, 1956, **5**, № 1, 1—58 (нем.)

Обычно приводят два доказательства несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной: арифметическое и геометрическое.

Первое приводится в приложении к X книге «Начал» Евклида. Что касается второго доказательства, то оно явно не зафиксировано ни в одном из древних источников. До сих пор еще окончательно не решен вопрос о том, которое из этих доказательств является древнейшим. Автор считает, что пифагорейское доказательство было геометрическим. Основанием для такого вывода служат отрывки Теона Смирнского и Прокла Диадоха о так называемых числах-сторонах и числах-диагоналях.

Автор дает геометрическую реконструкцию доказательства иррациональности $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$, которая должна была соответствовать ходу мыслей Феодора.

В статье анализируются попытки арифметического толкования положений Феодора Гультчем и Фоттом, подробно разбираются геометрически-алгебраические исследования по этому вопросу Цейтена и Ван-дер-Вардена. Автор считает, что приписываемый Цейтеном Феодору способ доказательства иррациональности должен быть отвергнут. Тезис Андербуха о «genetrix irrationalium» он также считает неубедительным.

Автор приходит к выводу, что алгебро-геометрическое доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ было известно задолго до Феодора из Кирены. Последний обобщил этот результат и доказал иррациональность $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$; причем детально разобрал только случаи $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$, так как остальные случаи сводятся к одному из этих. Арифметическое же доказательство ко времени Феодора еще не было известно. Творческие достижения Теэтета отодвинули на задний план работу, проделанную его учителем; может быть поэтому имеется так мало свидетельств о работе самого Феодора.

Автор также предполагает, что толчком к исследованиям Феодора мог послужить тот факт, что пифагорейцы, согласно «Тимея» Платона, обнаружили связь между так называемыми четырьмя элементами мира и правильными многогранниками (кроме додекаэдра, грани которых представляют равнобедренные прямоугольные треугольники и неравнобедренные, которые получаются сечением пополам равностороннего треугольника. Во втором случае квадрат большого катета в три раза больше квадрата меньшего катета. А. Е. Раик

7391. Дополнительные замечания к «геометрическому доказательству иррациональности у древних греков. Гофман (Ergänzende Bemerkungen zum «geometrischen» Irrationalitätsbeweis der alten Griechen. Hofmann Jos. E.), Centaurus, 1956, **5**, № 1, 59—72 (нем.)

Статья посвящена 80-летию со дня рождения Хеллера и содержит дополнения к VI главе его работы «Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros—Stelle in

Platons Dialog «Theaetet»» (реф. 7390). Эти дополнения относятся к проблемам: чисел-сторон и чисел-диагоналей; конструкции приближенных значений для квадратичных иррациональностей; архимедовых приближений $\sqrt{3}$.

Автор дает геометрическую реконструкцию, позволяющую найти последовательность пар натуральных чисел x_k и y_k, удовлетворяющих уравнению $x^2-2y^2=1$. Эта реконструкция адэкватна незначительно исправленному содержанию отрывка Прокла, дошедшего до нас в искаженном виде.

Из нее следует, что

$$\frac{x_k}{y_k}=1+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 12}-\frac{1}{12\cdot 19}+\cdots$$

Затем приводится геометрическое построение, позволяющее обобщить метод решения в целых числах уравнения $x^2-ky^2=1$ (k — не квадратное число) на уравнение $x^2-ky^2=q$ ($q\neq 0$—целое число).

При этом $\sqrt{\kappa}$ представляется в виде непрерывной дроби. Автор утверждает, что древние греки не знали непрерывных дробей.

Для архимедовых приближений $\sqrt{3}$ автор дает геометрическую реконструкцию, которая могла привести Архимеда к неравенствам: $\frac{5}{3}<\sqrt{3}<\frac{7}{4}$.

Дальнейшие приближения, по мнению автора, строились на основании «предполагаемой леммы Архимеда»: Если отрезок AB делится в точке M на равные, а в точке F на неравные части и MF делится в точке S пополам, то из неравенства $\frac{AF}{FB}\geq\frac{1}{1}$ следует также неравенство $AF/FB > (AS/SB)^2$.

Следы этой леммы можно найти у Герона. А. Е. Раик

7392. Тадеаш Гаек из Гайка и его речь во славу геометрии. Феттер (Tadeáš Hájek z Hájku a jeho «Řeč o oslavě geometrie.» Vetter Q.), Mat. škole, 1957, **7**, № 9, 562—566 (чешск.)

Сообщается содержание вступительной к курсу геометрии латинской речи «Oratio de laudibus geometriae» (Прага, 1557), произнесенной в 1557 г. математиком и астрономом Гаеком (1525—1600) в Пражском университете. Кроме обзора истории геометрии в Греции, Гаек дает сведения о ранних чешских математиках Яне Шинделе, Яне Пражском и др. (XV в.). И. Я. Депман

7393. Направление Клавия в истории математики. Такэда (Takeda K.), Кагакуси кэнкю, J. History Sci. Japan, 1957, № 41, 1—4 (японск.)

7394. Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей. Бирман К.-Р., В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10. М., Гостехиздат, 1957, 649—670

После краткой истории числового лото (первое упоминание в 1448 г.) сформулированы наиболее распространенные правила и варианты игры. Анализируются решения задач, связанных с числовым лото (например, задачи о величине справедливого выигрыша при различных условиях игры), Николаем I Бернулли (Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae, 1709), Лапласом (Essai philosophique sur les Probabilités, 1814), Эйлером (Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise, 1765), Иоганном III Бернулли (1769), Бегеленом (1765). Л. Е. Майстров

7395. Что представляет собой «Trauagliata Inventione» Николо Тартальи? Натуччи (Che cos'è la «Trauagliata Inventione» di Nicolò Tartaglia? Natucci Alpinolo), Period. mat., 1956, **34**, № 5, 294—297 (итал.)

В связи с 400-летием со дня смерти Н. Тартальи (13 декабря 1557 г.) автор дает перечень работ Тартальи и вкратце излагает содержание небольшой (36 страниц) статьи, озаглавленной «Trauagliata Inventione» (Трудное изобретение). В ней Тарталья предлагает практический способ поднятия затонувшего корабля. М. Я. Выгодский

7396. С. И. Вавилов, как исследователь творчества И. Ньютона. Юшкевич А. П., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, **17**, 66—89

Исследованием деятельности Ньютона С. И. Вавилов занимался не менее 20 лет. Первой работой в этом направлении был комментированный перевод «Оптики», изданный в 1947 г. Помимо множества ценных исторических сведений в комментариях сопоставляются результаты экспериментов Ньютона с данными нашего времени. Такой же характер носит перевод «Лекций по оптике», изданный в 1946 г. В работах, опубликованных в связи с 300-летием со дня рождения Ньютона (Исаак Ньютон, 1943; статья «Эфир, свет и вещество в физике Ньютона» в сборнике «И. Ньютон», 1943 и др.), С. И. Вавилов дал новое освещение эволюции взглядов Ньютона в вопросах о роли гипотез в науке, о природе света, о строении вещества и др. Выдающейся особенностью работ С. И. Вавилова о Ньютоне является сопоставление результатов Ньютона с данными современной науки, оценка места творчества Ньютона в развитии той или иной проблемы.

Высоко оценивая достоинства биографии Ньютона, написанной С. И. Вавиловым, автор отмечает в ней некоторые пробелы и спорные положения: «Трудно согласиться с мнением С. И. Вавилова, что во всем творчестве Ньютона ведущая роль принадлежала оптике». Автор отмечает также «несколько неравномерное внимание С. И. Вавилова к различным направлениям творчества Ньютона». Оба замечания, по мнению референта, справедливы. Вполне обосновано и резюме: «Ньютоноведческие труды С. И. Вавилова, и прежде всего его тонкий и оригинальный анализ оптических открытий и методологии Ньютона, являются замечательным вкладом покойного президента Академии наук СССР в историю естествознания». М. Я. Выгодский

7397. Празднование 250-летия со дня рождения Эйлера. Маркушевич А. И., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 235—240

Сообщение о Юбилейной научной сессии отделений физико-математических и технических наук Академии наук СССР, посвященной 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера (Ленинград, 15—18 апреля 1957 г.). Дана краткая характеристика докладов, прочитанных на сессии. Приведены фотографии юбилейных медалей, изготовленных Берлинской Академией наук и Академией наук СССР. Г. К. Михайлов

7398. О научном наследии Л. Эйлера в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Симонов Н. И., Научн. ежегодник. Черновицк. ун-т, 1956 (1957), **1**, № 2, 285—289

Автор обращает внимание на многочисленность результатов Эйлера в теории дифференциальных уравнений, которые остались вне поля зрения историков математики. Перечислены некоторые такие результаты, классифицированные по различным направлениям, в которых развивалась в середине XVIII в. теория дифференциальных уравнений. Далее автор указывает на недооценку влияния исследований Эйлера в области теории дифференциальных уравнений на последующее развитие математики в XVIII и XIX вв.; приведен ряд примеров. В заключительной части статьи подчеркнуто стремление Эйлера к получению прямых и наиболее общих методов решения и исследования уравнений. Г. К. Михайлов

7399. Решение Л. Эйлером разностных обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами методом определенных интегралов. Кушнир Е. А., В сб.:

Истор.-матем. исследования. Вып. 10, М., Гостехиздат, 1957, 363—370

Излагается малоизвестный результат Эйлера в теории уравнений с конечными разностями. Для уравнений

$$T(n+1)=\frac{\alpha n+a}{\beta n+b}\cdot\frac{\alpha' n+a'}{\beta' n+b'}T(n),$$

$$(\alpha n+a)T_1(n)=(\beta n+b)T_1(n+1)+(\gamma n+c)T_1(n+2)$$

решения находятся в виде определенных интегралов:

$$T(n)=\int_0^c x^{n-1}dv, \qquad T_1(n)=\int_0^{c_1} x^{n-1}dv_1,$$

где c и c_1 — некоторые постоянные, а $v=v(x)$ и $v_1=v_1(x)$ — соответственно определенные функции. Метод Эйлера опирается на решение задачи, аналогичной известным задачам теории моментов: найти функцию $v(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$\int_0^c x^n dv=\frac{\alpha n+a}{\beta n+b}\int_0^c x^{n-1}dv,$$

где n, α, β, a, b — постоянные. Свой результат Эйлер использует для суммирования некоторых непрерывных дробей. В статье имеются опечатки и неточности: формула в 7-й строчке снизу на стр. 367 должна иметь вид

$$(\alpha n+a)\int_0^x x^{n-1}dv=(\beta x+b)\int_0^x x^n dv+(\gamma n+c)\int_0^x x^{n+1}dv+x^nQ,$$

в формуле (11) на этой же странице вместо vx^2dv должно быть $\gamma x^2 dv$. Н. И. Симонов

7400. Жизнь и значение деятельности Леонарда Эйлера. Веселый (Život a význam díla Leonharda Eulera. Veselý František), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, **2**, № 6, 719—729 (чешск.)

7401. Леонард Эйлер (1707—1783). Добжицкий (Leonard Euler (1707—1783). Dobrzycki Stanisław), Kosmos (Polska), 1957, **B3**, № 4, 267—271 (польск.)

Заметка, написанная по случаю 250-летия со дня рождения Эйлера. Приводятся краткие биографические сведения, перечисление основных работ и некоторые общие замечания о творчестве Эйлера. Автор ошибочно отнес опубликование второго тома «Механики» Эйлера к 1742 г. (вместо 1736 г.). Г. К. Михайлов

7402. Теория действительных чисел в рукописном наследии Больцано. Рыхлик (Theorie der reellen Zahlen im Bolzano's handschriftlichen Nachlasse. Rychlík Karel), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 4, 553—567 (нем., рез. русск.)

Реферат рукописи Больцано «Theorie der unendlichen Zahlen-(Größen) begriffe (-ausdrücke)», составляющей часть неизданной рукописи «Grössenlehre». Рукопись датируется приблизительно 1830—1834 гг; содержит незавершенную попытку построения теории действительных чисел. А. С. Кузичев

7403. Эварист Галуа. (К 125-летию со дня смерти). Рыхлик (Évariste Galois. (K 125 výročí smrti). Rychlik Karel), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, **2**, № 6, 729—733 (чешск.)

7404. 100 лет со дня смерти Августина Луи Коши. Балада (Před sto lety zemřel Augustin Louis Cauchy. Balada František), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, **2**, № 5, 605—608 (чешск.)

7405. Бенджамин Пирс — математик и философ. Петерсон (Benjamin Peirce: mathematician and philosopher. Peterson Sven R.), J. Hist. Ideas, 1955, **16**, 89—112 (англ.)

7406. Математика в Одесском (Новороссийском) университете (1865—1955). Киро С. Н., Научн. ежегодник. Одесск. ун-т, 1956, Одесса, 1957, 121—126

Краткое изложение основных данных о работавших в университете за указанный период математиках и о направлении их научных исследований, построенное на следующей периодизации: 1) от основания у-та до восьмидесятых годов; 2) с восьмидесятых годов до революции 1905 г.; 3) 1905—1917 гг.; 4) от Октября до Отечественной войны; 5) военные годы и послевоенный период. И. Б. Погребысский

7407. Из прошлого и настоящего Английской математической ассоциации и «Математической газеты». Гайдук Ю. М., Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 87—105

Статья описывает деятельность Английской Математической ассоциации от ее возникновения (фактически—в 1870 г.) до последнего времени. Попутно изложены необходимые сведения об организации английской средней школы и постановке в ней преподавания математических предметов. Охарактеризована работа съездов ассоциации, достаточно полно описана деятельность ее Учебного комитета, работающего над методическими вопросами. Даны подробные сведения о печатном органе ассоциации — «Математической газете»; при этом разбирается содержание ее первого номера (1894 г.), одного из номеров за 1938 г., одного из послевоенных (сентябрь 1953 г.), что хорошо знакомит с этим изданием и его эволюцией. И. Б. Погребысский

7408. Василий Петрович Ермаков (1845—1922). Грацианская Л. Н., Наук. Зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 2, 11—34

Биографический очерк. Дана характеристика некоторых научных исследований Ермакова, его методических взглядов и преподавательской деятельности. К статье приложен список публикаций, принадлежащих В. П. Ермакову, и библиография литературы о нем (34 назв.) И. Б. Погребысский

7409. Сочинения Матиаша Лерха в области математического анализа. Борувка (Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy. Borůvka Otakar), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 10-11, 417—419 (чешск.)

Вводная статья к группе статей о научной деятельности М. Лерха (1860—1922), профессора Высшей технической школы в Праге (1906—1920) и университета в Брно (1921—1922) (реф. 7410—7416). Содержит биографический и библиографический материал. Работы Лерха (238 назв.) относятся преимущественно к математическому анализу (150 назв.) и теории чисел (40 назв.). Систематическое изучение научного наследства Лерха начато в «Семинаре по изучению трудов М. Лерха» в университете в Брно (1945—1949) и возобновилось с 1952 г. в Центральном математическом институте, как часть работы по истории математики в Чехословакии. В области математического анализа М. Лерх характеризуется как выдающийся представитель классического направления конца 19 в.—начала 20 в. Полный список работ М. Лерха составил Шкрашек (РЖМат, 1954, 5025). Т. Грушкова

7410. Вклад Лерха в общую теорию функций. Чермак (Lerchův přínos k obecné theorii funkcí. Čermák Jiří), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 10-11, 419 — 433 (чешск.)

В начале приводится список 20 работ Лерха по общей теории функций (1885 — 1910). Лерх — ученик Вейерштрасса, разрабатывал проблемы, которыми занимался его учитель, и получил ряд новых результатов. Вклад Лерха в общую теорию функций в основном относится к следующим вопросам:

1) Построение непрерывных функций, не имеющих производную. Лерх исследует тригонометрический ряд вида $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu \cos a_\nu \pi x$ и некоторые его частные случаи, приводит пример непрерывной функции без производной, построенный Вейерштрассом, $\sum_{\nu=0}^{\infty}b^\nu \cos a^\nu \pi x$, $b<1$, a — нечетное, $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ и приходит к несколько более общим условиям, наложенным на параметры a, b, именно: $ab\geqslant 1$, $a^2b>1+\pi^2$.

2) Разложимость функций в ряд Тейлора. Лерх строит и исследует примеры функций и классов функций, всюду бесконечно раз дифференцируемых и ни в одной точке не разложимых в ряд Тейлора, среди них функцию $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos a^\nu x}{\nu!}$, a — нечетное.

3) Функции с ограниченной областью определения. Наибольшее значение имеют три теоремы, данные Лерхом в работе „Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche“ (1888), среди них теорема: если $f(z)$—функция, представимая в виде степенного ряда, сходящегося при $|z|<1$ и расходящегося при $|z|>1$, и удовлетворяющая функциональному уравнению $f(z^a)=G[z, f(z)]$, a — фиксированное натуральное число, $G(z, u)$ — целая функция переменных z, u, то $f(z)$ существует только для $|z|<1$.

4) Теорема об однозначности класса функции $I(a)$, которые Лерх называет создающими (génératrice) и которые определяются интегралом $I(a)=\int_0^\infty e^{-ux}\varphi(x)\,dx$, a — комплексное число. Лерх первым точно исследовал вопрос о характере многозначности функции $\varphi(x)$ при заданной функции $I(a)$. Результатом является теорема Лерха: функции $\varphi(x)$ при заданной функции $I(a)$ могут отличаться не более, чем на функцию $N(x)$ такую, что интеграл с переменным верхним пределом $\int_0^x N(t)\,dt\equiv 0$.

Т. Грушкова

7411. Вклад Лерха в теорию бесконечных рядов. Ч е р м а к (Lerchův přínos k theorii nekonečných řad. Čermák Jiří), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 10-11, 433 — 455 (чешск.)

Вначале приводится список 49 работ Лерха по теории бесконечных рядов (1885 — 1920). Результаты Лерха в этой области касаются в первую очередь класса бесконечных рядов вида

$$Ml(v, w, u, s)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2+u^2]^{1/2s}}, \qquad (1)$$

исследованием которого до Лерха занимались особенно Мельмстен и Липшиц. Лерх выводит формулу

$$e^{2vw\pi i}\,Ml(v, w, u, s)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2nw\pi i}\int_0^\infty e^{-u^2x-\frac{\pi^2(v-n)^2}{x}}\,x^{\frac{s-3}{2}}\,dx,$$

$$0<v<1,\ \mathrm{Re}\,u^2>0,$$

с помощью которой доказывает, что $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{Ml(v, w, u, s)}$ — трансцендентная функция переменной s, если только v не является целым числом, и ряд других следствий. С помощью методов теории аналитических функций Лерх доказывает, что функция

$$\mathfrak{R}(w, x, s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{(w+n)^s},\quad \mathrm{Im}\,x\geqslant 0,\quad 0<w<1,\quad \mathrm{Re}\,s>1$$

является целым трансцендентом переменной s. Лерх исследует частные случаи функции $\mathfrak{R}$, именно функции

$$R(w, s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(w+n)^s};\qquad L(x, s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nx\pi i}}{n^s}$$

и получает для них несколько более общие результаты, чем Стилтьес. Лерху удалось с помощью теории рядов (1) разрешить проблему нахождения производной ряда Куммера, именно:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k+1)v\pi\,\log\frac{k}{k+1}=\left\{\log 2\pi-\Gamma'(1)\right\}\sin v\pi+$$

$$+\frac{\pi}{2}\cos v\pi+\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\sin v\pi\qquad(0<v<1).$$

Лерх занимался также изучением функции $\varsigma(s)$ и ее представление в виде несобственного интеграла

$$\varsigma(s)=\frac{1}{1-2^{-s}}\cdot\lambda(s),$$

$$\lambda(s)=\frac{2^{s-2}}{s-1}-2^{s-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin s\varphi-e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{tg}\varphi}\cdot\cos s\varphi}{1+e^{\pi\mathrm{tg}\varphi}}\cos^{s-2}\varphi\,d\varphi.$$

В последней части статьи дается анализ остальных работ Лерха по теории бесконечных рядов, которые играют менее значительную роль. Т. Грушкова

7412. Работы Матиаша Лерха в области теории гамма-функций. Б о р у в к а (Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma. Borůvka Otakar), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 10 - 11, 455 — 501 (чешск.)

Вначале приводится список 53 работ Лерха в этой области (1887 — 1922). Вклад Лерха в теорию гамма-функций заключается в открытии целого ряда новых свойств гамма-функций и других элементов этой теории. Особенно большое значение имеет открытие Лерхом, связей между гамма-функцией и рядами Мальмстена и результаты Лерха, касающиеся функции Прима. Работы Лерха в области гамма-функций, несмотря на их большое значение, в мировой литературе пока не нашли распространения.

Лерх занимался особенно следующими вопросами:

I. Представление гамма-функции. Асимптотические и характеристические свойства. Более сложные формы,

зависящие от гамма-функции. Здесь важнейшим результатом Лерха является вывод нового характеристического свойства гамма-функции, выраженного теоремой: Если $F(z)$—однозначная аналитическая функция, не имеющая других особенностей, кроме полюсов 1-го порядка $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, удовлетворяющая уравнению

$$F(z+1) = zF(z)$$

и при $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и достаточно больших $|\eta|$ неравенству

$$|F(\xi + i\eta)| < A\,|\xi + i\eta|^p \cdot e^{\alpha\pi|\eta|},$$

A, p, — любые положительные константы, $0 < \alpha < \frac{3}{2}$,

то отношение $\frac{F(z)}{\Gamma(z)}$ постоянно.

II. Логарифм гамма-функции, функция Бине и ее обобщение. Независимо от Кинкелина и Шредера Лерх дал разложение функции

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}, \quad \mathrm{Re}\ s < 1,$$

в окрестности точек 1 и 0, именно:

$$R(w,s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \ldots \quad (1)$$

и

$$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots,$$

и распространил его на более общую функцию

$$R(a, u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+n)^2 + u^2]^s}, \quad 0 < \mathrm{Re}\, a < 1;\ 0 < u;$$

$$\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, s.$$

Вследствие этого был получен ряд выражений с гамма-функцией. Что касается функции Бине

$$\widetilde{\omega}(u) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-ux}\,\frac{dx}{x},$$

то Лерх дал ее новые представления в виде

$$\widetilde{\omega}(u) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma'(u-x)}{\Gamma(u+x)}\,dx$$

$$\widetilde{\omega}(u) = \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)} R(u, v); \quad \mathrm{Re}\, u > 1, \quad \text{или}$$

$$|\mathrm{Im}\, u| > 1$$

определил обобщенные функции Бине

$$|\mathrm{Im}|\ u > 1$$

$$u, s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ux} x^{s-1} dx; \qquad \mathrm{Re}\, u > 0,$$

$\mathrm{Re}\, s > -1$ и

$$\widetilde{\omega}(u, s) =$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} B_{\nu} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu)!} e^{-ux}\, x^{s-1}\, dx\right)$$

($\mathrm{Re}\, u > 0$; $\mathrm{Re}\, s > -2p - 1$; B_{ν} — числа

Полученные результаты обобщены в теореме: Пусть $f(x)$ — вещественная функция, для которой существует интеграл

$$F(u) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-ux} dx.$$

Пусть этой функции соответствует ряд

$$c_0 x^{\alpha_0} + c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \ldots, \quad \alpha_i > -1,$$

сходящийся или расходящийся и обладающий тем свойством, что разность $f(x) - \sum_{\nu=0}^{p-1} c_{\nu} x^{\alpha_{\nu}}$ при всех $x > 0$ по модулю меньше первого пропущенного члена $c_p x^{\alpha_p}$. Тогда имеется следующее семиконвергентное разложение

$$F(u) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{c_{\nu} \cdot \Gamma(\alpha_{\nu} + 1)}{u^{1+\alpha_{\nu}}} + R_p,$$

где остаток R_p по модулю меньше первого пропущенного члена $\frac{C_p \Gamma(\alpha_p + 1)}{u^{1+\alpha_p}}$,

III. Логарифмическая производная гамма-функции. Результаты Лерха, касающиеся логарифмической производной $\psi(u)$ функции $\Gamma(u)$, вытекают главным образом из теории рядов Мальмстена и принадлежат к лучшим достижениям Лерха в анализе. Их источником является формула (1), ее непосредственное следствие

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = [\zeta(s) - R(w, s)]_{s=1} + \Gamma'(1)$$

и формула Лерха

$$\sum_{n=0}^{\alpha} \frac{e^{-2x\pi i.(v+n)}}{v+n} = -\log 2\pi + \Gamma''(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \frac{\pi i}{2} -$$

$$- \log x - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log\frac{x+k}{k} \qquad (0 < x < 1; \quad 0 < v < 1).$$

Одним из важнейших достижений являются общие теоремы Лерха о дифференцировании некоторых тригонометрических рядов; среди них теорема: Производная суммы $f(x)$ сходящегося ряда $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu} \sin 2\nu x\pi$ выражается уравнением:

$$f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{\nu} - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1)\, x\pi, c_0 = 0, \quad \text{если}$$

только ряд в правой части равномерно сходится.

Из этой теоремы Лерх получает формулу дифференцирования ряда Куммера и ряд других следствий.

IV. Неполные гамма-функции, интеграл-логарифм и трансцендент Крампа L. Исследования Лерхом функции $P(a,\omega)=\int_0^\omega e^{-x}x^{a-1}dx$ носят преимущественно методологический характер. Новыми являются разложения функции P в цепные дроби, среди них разложение

$$\omega^{-a}e^{\omega}P(a,\omega)=\frac{1}{a}-\frac{\omega a|}{|\omega+a+1}-\frac{\omega(a+1)|}{|\omega+a+2}-\frac{\omega(a+2)|}{|\omega+a+3}-\ldots$$

При изучении функции $Q(a,\omega)=\int_\omega^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ Лерх получает представление Q в виде:

$$Q(a)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\binom{a-1}{\nu-1}\Phi(\nu)\Psi(a-\nu),\quad a\text{ — любое,}$$

где

$$\Phi(\nu)=\int_0^u e^t t^{\nu-1}dt;\quad \Psi(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\omega+nu)^a}{e^{\omega+nu}},\ \omega>0,\ u>0.$$

Важнейшими результатами Лерха, касающимися функции Q, являются разложения Q в бесконечные ряды. Исходным разложением является следующее:

$$e^{\frac{u}{v}}Q\left(1-a,\frac{u}{v}\right)=v^a\sum_{\nu=0}^{\infty}{}^{\bullet}c_\nu(v)\,\Delta^\nu u^{-a},\ \mathrm{Re}\,a>0,\ \mathrm{Re}\,u>0,$$

$0<v<\frac{1}{\log 2}$, где $c_\nu(v)$—полиномы, получаемые из рекуррентного уравнения

$c_\nu=v\left(c_{\nu-1}-\frac{1}{2}c_{\nu-2}+\frac{1}{3}c_{\nu-3}-\frac{1}{4}c_{\nu-4}+\ldots\right)$; $c_0=1$ и $\Delta^\nu u^{-a}$ означает ν-ю разность функции $f(u)=u^{-a}$, определяемую формулой

$$\Delta^{\nu+1}f(u)=\Delta^\nu f(u+1)-\Delta^\nu f(u);\quad \Delta^0 f=f.$$

Лерх выводит целый ряд других разложений функций Q, удобных для вычислений. При исследовании этих разложений приходит к замечательным представлениям для интеграл-логарифма, например:

$$-li(e^{-w})=\log\frac{1}{1-e^{u}}-\sum_{\mu=1}^{m-1}\frac{e^{-\mu u}}{\mu}-\frac{e^{-w}}{2m}+$$

$$+e^{-w}\sum_{\nu}(-1)\frac{B_\nu}{2\nu m^{2\nu}}\sum_{\alpha=0}^{2\nu-1}\frac{w^\alpha}{\alpha!}\quad\left(u=\frac{w}{m};\ \nu=1,2,3,\ldots\right).$$

Аналогично, как в случае функции P, Лерх получает разложения в цепные дроби и для функции Q.

V. Постоянная Эйлера. Лерх дает несколько новых ее представлений через бесконечные ряды, среди них разложение

$$\log 2\left(c-\frac{1}{2}\log 2\right)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\nabla^\nu\frac{\log w}{w}\right)_{w=1},$$

где ∇ — операция, определенная формулами:

$$\nabla f(w)=f(w)-f(w+1);\quad \nabla^{\nu+1}=\nabla(\nabla^\nu),$$

и представлений с помощью интегралов от функций, зависящих от эллиптических трансцендентов.

VI. Неполная функция бета. Лерх получает для нее разложения в бесконечные ряды, например:

$$\mathfrak{M}(a,b)=\omega^a(1-\omega)^b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b,\nu)}{(a,\nu+1)}\omega^\nu,\quad 0<\omega<1,$$

где $\mathfrak{M}(a,b)=\int_0^\omega x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Т. Грушкова

7413. Вклад Лерха в теорию эллиптических функций Радохова (Lerchův přínos k theorii funkcí eliptických. Radochová Věra), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, 29, № 10 - 11, 502 — 515 (чешск.)

В начале дается список 25 работ Лерха по теории эллиптических функций (1884 — 1908 гг.) Первые работы Лерха в этой области относятся к 90-м годам 19-го в., когда развитие классической теории эллиптических функций было почти завершено. Эти работы Лерха не имеют основного значения. Лерх опирается в них на исследования Якоби и Эрмита и вносит некоторые дополнения к уже известным результатам. В этих работах Лерх изучает:

I. Основные эллиптические функции, особенно тета-функции. Вклад Лерха здесь имеет преимущественно методический характер. Наибольшее внимание он уделяет тета-функциям, способу их введения в теорию эллиптических функций, формулам, описывающим их свойства и их применению к изучению других трансцендентных функций, в их числе функции

$$X_0(w_1,w_2\,|\,\tau_1,\tau_2;\sigma)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2n\sigma\pi i}}{(e^{2\pi i(w_1+n\nu_1)}-1)(e^{2\pi i(w_2+n\nu_2)}-1)}$$

$(\mathrm{Im}\,\tau_1>0,\ \mathrm{Im}\,\tau_2>0,\ 0<\mathrm{Im}\,\sigma<\mathrm{Im}(\tau_1+\tau_2))$,

для которой получает уравнения:

$$e^{2w_1\pi i}X_0(w_1,w_2\,|\,\tau_1,\tau_2;\sigma+\tau_1)=$$

$$=X_0(w_1,w_2\,|\,\tau_1,\tau_2;\sigma)+\frac{\vartheta_1'(0\,|\,\tau_2)}{2\pi i}\cdot\frac{\vartheta_1(w_2+\sigma\tau_2)}{\vartheta_1(w_2\,|\,\tau_2)\,\vartheta_1(\sigma\,|\,\tau_2)},$$

$$e^{2w_2\pi i}X_0(w_1,w_2\,|\,\tau_1,\tau_2;\sigma+\tau_2)=$$

$$=X_0(w_1,w_2\,|\,\tau_1,\tau_2;\sigma)+\frac{\vartheta_1'(0,\tau_1)}{2\pi i}\cdot\frac{\vartheta_1(w_1+\sigma\tau_1)}{\vartheta_1(w_1\,|\,\tau_1)\,\vartheta_1(\sigma\,|\,\tau_1)}$$

II. Различные трансцендентные функции, связанные с эллиптическими, например, при рассмотрении функции

$$R(u,w\,|\,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{n^2}e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n}e^{2w\pi i}},\quad q=e^{v\pi i},\ |q|<1.$$

Лерх обобщает соотношение Эрмита следующим образом

$$R_n(u,w\,|\,\tau)\,\vartheta_1(nw\,|\,n\tau)\,q^{2n-\frac{1}{4}}e^{(nw-2nu)\pi i}=$$

$$=i\sum_{s=0}^{n-1}q^{2s}e^{2sw\pi i}\vartheta_3(nu+s\tau\,|\,n\tau)\,R_1\left(nw+\frac{n+n\tau}{2},\ nu+\right.$$

$$\left.+s\tau-\frac{n+n\tau}{2}\,|\,n\tau\right),$$

где $R_n(u, w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2} e^{2\nu n i \pi}}{1 - q^{2\nu} e^{2\pi i w}}$

Лучшим своим результатом, опирающимся на сочинение Кронекера („Zur Theorie der elliptischen Funktionen", 1890), Лерх считает теорему: Функция

$$e^{2v_2\pi i(-w_2 + w_1\omega_1)}\,\Phi(w_1, -w_2 + w_1\omega_1,\ v_1 + v_2\omega_1 \mid \omega_1) - e^{2v_2\pi i(w_2 - w_1\omega_2)}\,\Phi(w_1, -w_2 - w_1\omega_2,\ v_1 - v_2\omega_2 \mid \omega_2),$$

где $\Phi(u, w, v \mid \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u+m} \frac{e^{2mv\pi i}}{1 - e^{2\pi i(w + m\omega)}}$

является инвариантом эквивалентных систем

$$w_1 \parallel \alpha w_1' + \beta w_2';\quad w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2',$$

$$v_1' = \alpha v_1 + \gamma v_2;\quad v_2' = \beta v_1 + \delta v_2;\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Т. Грушкова

7414. Вклад Лерха в интегральное исчисление. Радохова (Lerchův přínos k integrálnímu počtu. Radochová Věra), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 10-11, 516—531 (чешск.)

В начале статьи приводится список 26 работ Лерха по интегральному исчислению.

Вклад Лерха в этой области носит преимущественно методический характер, несмотря на некоторые новые результаты и обобщения уже известных теорем и формул. Из методов вычисления Лерх часто пользуется своеобразным методом умножения обеих частей интегрального уравнения на особым образом подобранное выражение и интегрирования результата. Используя потом замену порядка интегрирования, Лерх очень просто и быстро добивается искомых результатов. Таким путем Лерх получает, например, следующую формулу:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{a}{x} \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\,dx = \log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b},\ a,\ b \text{ — положительные константы.}$$

Из новых результатов Лерха приведем несколько следующих:

1) Исследуя функцию Бесселя

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos a}\,da,$$

он приходит к формуле

$$\int_0^{\infty} I_0(u) u^{s-1}\,du = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 \sin\frac{s\pi}{2}}{2\pi};\quad 0 < \operatorname{Res} < \frac{1}{2}$$

2) Обобщение формулы Фруллани следующим образом:

$$\int_a^b \left[f(x) - f(\varphi)\cdot\varphi'(x)\right]dx = A\log\varphi'(a) - B\log\varphi'(b),$$

где $A = \lim_{x\to a}(x-a) f(x)$, $B = \lim_{x\to b}(x-b) f(x)$.

3) Обобщением интеграла Дирихле Лерх получает формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{axi} f(x)\,dx}{(c_1^2 + x^2)(c_2^2 + x^2)\ldots(c_m^2 + x^2)} = \pi \frac{e^{-|a| c_1} f(\pm c_1 i)}{c_1(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_1^2)\cdots(c_m^2 - c_1^2)} + \pi \frac{e^{-|a| c_2} f(\pm c_2 i)}{c_2(c_1^2 - c_2^2)(c_3^2 - c_2^2)\cdots(c_m^2 - c_2^2)} + \ldots,$$

причем предполагается, что у аналитической функции $f(x)$ все особые точки находятся либо под, либо над действительной осью, $a < 0$ в первом случае, $a > 0$ во втором. Знак выражения $\pm c_\nu i$ выбирается положительный, если особые точки находятся в верхней полуплоскости, и отрицательный, — если в нижней полуплоскости.

Т. Грушкова

7415. Спор Матиаша Лерха с Альфредом Прингсгеймом. Франк (Spor Matyáše Lercha s Alfredem Pringsheimem. Frank Ludvik) Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29** № 10-11, 532—538 (чешск.)

Вначале приводится список 8 работ Лерха, относящихся к спору. Спор между Лерхом и мюнхенским математиком Прингсгеймом проходил в 90-х годах прошлого века в целом ряде математических журналов.

Причина спора заключается в следующем. Лерх формулирует критерий сходимости: если все элементы системы $D_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ меньше единицы, то ряд положительных членов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится. Лерх сразу замечает, что встречаются такие сходящиеся ряды, для которых $D_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ содержит числа и меньшие и большие единицы. Как один из примеров таких рядов он приводит ряд с общим членом

$$u_k = \delta^{k-[\lambda k]}\, g^{[\lambda k]} \cdot \frac{1+[\lambda k]}{2},$$

где $[\lambda k]$ — характеристика логарифма числа k, δ — любое положительное число меньше единицы, g — больше единицы, но такое, что $\delta\sqrt{g} < 1$. Этот ряд сходится, причем $D_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ содержит точки δ и точку ∞. Против этого примера выступил Прингсгейм, считая его громоздким и совсем ненужным.

Вторая фаза спора началась выступлением Лерха в защиту приоритета некоторых его результатов, которые впоследствии приводил Прингсгейм в своих работах, не указывая источника. Спор был длительный, его форма острая.

Т. Грушкова

7416. Сочинения Матиаша Лерха в области математического анализа. Борувка (Mathias Lerch und sein Werk auf dem Gebiete der mathematischen Analysis. Borůvka Otakar), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 10-11, 539—540 (нем.)

Сокращенное изложение на немецком языке одноименной чешской статьи того же автора (реф. 7409).

Т. Грушкова

7417. Математическая жизнь Луиджи Фантапье. Фикера (La vita matematica di Luigi Fantappiè. Fichera Gaetano), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 1-2, 143—160 (итал.)

Некролог выдающегося итальянского математика Луиджи Фантапье (скончался 28 июля 1956 г., на пятьдесят пятом году жизни). Автор приводит основные сведения о жизни и научной деятельности Фантапье,

более подробно характеризуя работы последнего по теории аналитических функционалов (останавливаясь в связи с этим на ранних этапах развития функционального анализа), в области приложений символического исчисления операторов к теории дифференциальных уравнений, по теории относительности и в некоторых других областях математики и теоретической физики.
А. Д. Мышкис

7418. К 75-й годовщине со дня рождения Эммы Нётер (1882—1935). Рыхлик (K 75. výročí narození Emmy Noetherové. Rychlík K.), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 5, 611 (чешск.)

7419. Отто Юльевич Шмидт. Мартан (Otto Juljevič Smidt. Martan František), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 5, 601—605 (чешск.)

7420. К 60-летию профессора Карла Коутского. Чулик (K šedesátinám profesora Karla Koutského. Čulík Karel), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 6, 718—719 (чешск.)

7421. Профессор д-р Франтишек Вычихло скончался (Profesor Dr. František Vyčichlo zemřel), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 127 (чешск.)

Извещение редакции о кончине 6 января 1958 г. профессора Высшей технической школы в Праге Ф. Вычихло, известного своими работами по дифференциальной геометрии и тензорному анализу.

7422. Профессор Франтишек Радл (1876—1956). (Некролог). Рыхлик (Prof. dr. František Rádl (Nekrolog). Rychlík Karel), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 5, 600 (чешск.)

7423. Конрад Кнопп. Камке, Целлер (Konrad Knopp. Kamke E., Zeller K.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 60, № 2, 43—49 (нем.)

Обзор трудов Кноппа (1882—1957), относящихся в большинстве своем к теории рядов. Список работ Кноппа (15 назв.). И. Я. Депман

7424. Хосе Мингот Шелли (Jose Mingot Shelly), Gac. mat., 1957, 9, № 4-5, 103 (исп.)

Краткий некролог, с указанием трудов Шелли. Даты рождения и смерти отсутствуют. И. Я. Депман

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

7425. От редакции математики Учпедгиза. Пономарев С. А., Матем. в школе, 1958, № 2, 89

Сообщение о пособиях для учителей и книгах для учащихся средней школы по математике.

7426. К вопросу о преподавании математического анализа и некоторые замечания о преподавании математики в педагогических вузах. Горошко, Романовский (До питання викладання математичного аналізу та деякі зауваження про викладання математики в педагогічних вишах. Горошко В. Я., Романовський Б. В.), Наук. зап. Вінницьк. держ. пед. ін-т, 1957, 9, № 1, 26—32

Математический анализ авторы считают центральной дисциплиной для студента-математика. Из дидактических соображений предлагается строить курс анализа на основе аксиомы непрерывности Кантора, доказать позже аксиому непрерывности Дедекинда как теорему, а полную теорию действительного числа дать по Дедекинду в курсе теории функций. Новые пятилетние учебные планы педагогических институтов требуют доработки, так как они отводят слишком мало времени на собственно математические дисциплины.
И. Б. Погребысский

7427. Математический практикум в педагогическом институте. Белый (Математичний практикум в педагогічному інституті. Білий Б. М.), Наук. зап. Вінницьк. держ. пед. ін-т, 1957, 9, № 1, 33—39 (укр.)

Методические замечания о проведении практикума (измерения на местности, моделирование, вычислительный практикум) на основе опыта работы автора.
И. Б. Погребысский

7428. Использование индукции в обучении математике. Дубец (Pestovanie indukcie pri vyučovaní matematiky. Dubec Anton), Mat. škole, 1957, 7, № 9, 541—549 (словацк.)

В школах Чехословакии достаточно внимания уделяется дедуктивному методу, но недостаточно — роли индукции в математике. Даются примеры применения индукции в курсе школьной математики. И. Я. Депман

7429. Математика в общем образовании. Лейтон (Mathematics in general education. Layton W. I.), Math. Teacher, 1957, 50, № 7, 493—497 (англ.)

Многие колледжи США работают по так называемой общеобразовательной программе с сокращенной программой по математике. Автор анализирует результаты анкетного опроса 150 колледжей из 24 штатов; из них 91 колледж действуют по общеобразовательной программе. Он делает вывод (поддержанный большинством опрашиваемых) о необходимости увеличения числа часов на математику (в среднем 4,82 часа вместо 1,97 часа в неделю) и увеличения объема программ.
Г. Б. Петросян

7430. О подготовке учащихся с высшим математическим потенциалом. Элдер (Providing for the student with high mathematical potential. Elder Florence L.), Math. Teacher, 1957, 50, № 7, 502—506 (англ.)

Излагается опыт работы школы в Западном Хемпстедте, Нью-Йорк, по подбору и воспитанию способных учеников. Г. Б. Петросян

7431. Численный анализ и математика средней школы. Льюк (Numerical analysis and high school mathematics. Luke Yudell L.), Math. Teacher, 1957, 50, № 7, 507—512 (англ.)

Методическая заметка. Рекомендуется обучать учащихся численным методам, основанным на итерации и биномиальной теореме. Методы разъясняются на примере вычисления значений чисел вида $\sqrt{n}$. Библ. 7 назв. Г. Б. Петросян

7432. Постановка проблемных вопросов в процессе преподавания физики и математики. Цумме Г., Сов. педагогика, 1958, № 1, 49—57

Автор разъясняет, что особенно эффективным приемом активизации деятельности учащихся в процессе обучения математике является постановка цели работы самими учащимися. Чтобы пробудить интерес при выборе проблемы, необходимо учитывать ее практическую ценность. Автор разъясняет эти мысли на многих примерах из области физики и математики, включая и определенный интеграл. Г. Б. Петросян

7433. Введение действительных чисел в средней и высшей школе. Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 131—132

Вводная заметка к статьям о разных способах изложения теории действительного числа, принадлежащих Г. М. Фихтенгольцу, А. А. Ляпунову, А. Я. Дубовицкому и А. Н. Колмогорову. И. Я. Депман

7434. Иррациональные числа в средней школе. Фихтенгольц Г. М., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 133—148

Обработка лекции автора, читанной ленинградским учителям. И. Я. Депман

7435. Как мы улучшили обучение учащихся устному решению задач по алгебре. Вандингем (How we improved our teaching of the story problems in algebra. Vanlandingham Dean), School Sci. and Math., 1957, 57, № 9, 717—721 (англ.)

Рассматривается методика обучения учащихся устному решению задач по алгебре. Выводы сделаны на основании результатов эксперимента, который проводился в течение пяти лет. Е. В. Вандышева

7436. Элементарное исчисление значений синуса и тангенса определенных углов. Рюдель (Elementare Berechnung bestimmter Werte der Sinus-und Tangensfunktion. Rüdel H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 8, 360 (нем.)

Автор дает элементарный способ вычисления синуса и тангенса углов

$$\alpha = 60^\circ\left(\frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{2^m}\right) \text{ и } \alpha = 90^\circ\left(\frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{2^m}\right),$$

доступный для учащихся средней школы. А. Е. Раик

4737. Цветные карты (Coloring maps), Math. Teacher 1957, **50**, № 8, 546—550 (англ.)

Популярная статья о проблеме четырех красок.

А. С. Пархоменко

7438. Окрашенные кубы: новая танталова задача. О'Бэрн (Coloured cubes: a new «Tantalizer». O'Beirne Thos H.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 292—293 (англ.)

Новая игра с 4 кубами, грани которых окрашены. Полную теорию ее см. Eureka, 1947, **9**, 9.

И. Я. Депман

См. также: 7439, 7444, 7568, 7571, 7842, 7857 К—7860 К, 7933, 7985, 7986, 8034 К, 8053, 8061, 8068, 8069, 8102, 8140 К, 8144 К, 8146, 8178 К—8181 К

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

7439. 18-е собрание общества математической логики (Eighteenth meeting of the association for symbolic logic), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 2, 200—205 (англ.)

Собрание проходило 29 декабря 1954 г. Приведены резюме докладов: Гилмор (P. C. Gilmore), Об относительной неприводимости полиномов; Робинсон (A. Robinson), О предикатах в системах, полных по отношению к моделям; Бун (W. W. Boone), Неразрешимая проблема, касающаяся внутренних автоморфизмов некоторых конечно определенных групп; Райт (G. H. Wright), Смысл вероятности; Шёнфилд (J. R. Shoenfield), Неразрешимость аксиомы выбора; Аддисон (J. W. Addison), Аналогии в иерархиях Бореля, Лузина и Клини; Ори (S. Orey), ω-непротиворечивость и связанные с ней свойства; Кемень (J. G. Kemeny), Унифицированные основания для семантики; Спектор (C. Spector), Рекурсивные полные упорядочения; Деккер (J. C. E. Dekker), Неконструктивное расширение системы арифметики; Майхилл (J. Myhill), Теорема о неподвижной точке в теории рекурсивных функций.

7440. О конструктивном понимании математических суждений. Шанин Н. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 189—190

Резюме доклада автора на съезде. Отмечаются недостатки принципов конструктивного понимания арифметических суждений, предложенных С. Клини («расшифровка» суждения снова есть суждение, требующее «расшифровки»; «расшифровка» суждения обычно не проще исходного суждения; правила «расшифровки» не идемпотентны). Предлагаются новые принципы понимания математических суждений, основанные на следующей установке: а) некоторые суждения понимаются как зашифрованные утверждения о потенциальной осуществимости конструктивных объектов; б) в число суждений, о которых идет речь в а), не входят суждения, не содержащие $\vee$ и $\exists$ понимание суждений, не содержащих $\vee$ и $\exists$, основано на экстраполяции определенной части классической логики; в) суждение «Процесс применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к исходному данному S не является безгранично продолжимым» считается достаточным основанием для суждения «Алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к S».

Н. М. Нагорный

7441. Понятия теории моделей. Хенкин (Two concepts from the theory of models. Henkin Leon), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 1, 28—32 (англ.)

Пусть H и K — означают произвольные классы алгебраических структур. Согласно терминологии А. Робинсона (Robinson A., On the metamathematics of algebra, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951), класс H называется устойчивым (persistent) по отношению к K, если $H \cup K$ не пусто и если условия $M \in H \cap K$, M' — расширение M и $M' \in K$ влекут $M' \in H$ Робинсон показал (Methodos, 1951, **3**, 140—149), что если K — класс абелевых групп (или коммутативных полей), а H — арифметический класс, устойчивый по отношению к K, то $H \cap K$ содержит конечную группу (или конечное поле). С помощью этого результата автор вводит следующие определения:

Определение 1. Класс K обладает свойством конечной устойчивости, если каждый арифметический класс H, устойчивый по отношению к K, содержит конечную алгебраическую структуру, входящую в K.

Определение 2. (см. РЖМат, 1954, 5426). Класс K обладает свойством конечного погружения, если для каждого $M \in K$ и каждого конечного множества α элементов M существует изоморфное погружение α в некоторую конечную алгебраическую структуру из K.

Автор доказывает, что понятия, данные определениями 1 и 2, эквивалентны в предположении, что К— квазиарифметический класс (т. е. состоит из всех алгебраических структур, удовлетворяющих некоторому фиксированному множеству предложений первого порядка).

Он показывает, однако, что без этого предположения теорема неверна, потому что класс K всех вполне упорядоченных множеств обладает свойством конечного погружения, но не обладает свойством конечной устойчивости.

Из этой теоремы автор легко извлекает некоторые известные теоремы и следующие новые результаты: 1) класс коммутативных полей обладает свойством конечного погружения; 2) класс булевых алгебр и класс алгебр замыкания обладают свойством конечной устойчивости; 3) класс полей не обладает свойством конечного погружения; 4) если K—любой класс, обладающий свойством конечной устойчивости, и если H — любой квазиарифметический класс, содержащий все конечные структуры из K, то каждая структура из K может быть погружена в некоторый элемент H.

Наконец, автор доказывает, что непустой арифметический класс H устойчив по отношению к классу всех структур (данного класса подобия) тогда и только тогда, когда он является чисто экзистенциальным. Аналогичная теорема была доказана Лосем (РЖМат, 1958, 1765).

H. Rasiowa

7442. Замечание об одной проблеме Хенкина. Робинсон (Note on a problem of L. Henkin. Robinson Abraham), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 1, 33—35 (англ.)

Рассматриваются экзистенциальные утверждения, т. е. элементарные утверждения, предваренная форма которых не содержит кванторов общности.

Обобщая теорему Хенкина (реф. 7441), автор доказывает, что: Если утверждение X устойчиво (persistent) по отношению к множеству утверждений K (т. е. если, коль скоро X верно в некоторой модели M для K, оно верно в каждом расширении M, являющемся моделью для K), то существует экзистенциальное утверждение Y такое, что эквивалентность $X \equiv Y$ выводима из K.

Примечание референта: Эта теорема содержится в § 9 статьи референта (РЖМат, 1958, 1765).

J. Łoś

7443. Об одном методе построения модальных логик. Кубинский (O pewnej metodzie tworzenia logik modalnych. Kubinski Tadeusz), Studia log., 1956, **4**, 213—240 (польск.; рез. русск., англ.)

Автор рассматривает метод построения модальных систем, который основывается на отмеченной Карнапом (Carnap) связи между модальными предложениями, устанавливающими возможность или необходимость событий, и логическими (синтаксическими или семантическими) свойствами предложений, описывающих эти события. Например: α необходимо ввиду того, что β тогда и только тогда, когда предложение α следует (следует по правилам вывода или следует в семантическом смысле) из предложения β. Следовательно, модальные предложения вводятся этим методом всегда в метасистеме MJ некоторой немодальной системы J; при этом метасистема MJ содержит систему J. Некоторую совокупность предложений метасистемы MJ, содержащую все предложения системы J и введенные модальные предложения, автор называет модальной логикой, основанной на языке J, а затем определяет совокупность теорем этой модальной логики.

Рассматриваемый автором метод построения модальных систем очень общий и неоднозначный. Он может быть применен различным способом. Автор вовсе не рассматривает связей между модальными системами, которые могут быть построены описанным выше методом и традиционными модальными системами Льюиса (Lewis). Автор показывает способ введения модальных понятий и конструирования модальной системы в основном только на одном частном примере. Этот пример не описан, однако, с необходимой точностью. R. Suszko

7444. Логические символы в математической литературе. Шнейдер (Logische Symbole in der mathematischen Literatur. Schneider H.), Math.-phys. Semesterber., 1957, **5**, № 3-4, 252—260 (нем.)

Статья посвящена вопросу о значении логических символов для математических теорий.

Наблюдающийся за последние десятилетия процесс все более и более широкого внедрения логической символики в математику автор сравнивает с процессом внедрения математической символики в математику в ранние эпохи развития математики, когда математика пользовалась еще обыденным языком. Громадные успехи математики были немыслимы без соответствующей символики, которую она выработала на протяжении своей истории с древнейших времен до настоящего времени; дальнейшим успехам математики должно содействовать внедрение в нее логической символики.

Автор останавливается на причинах, делающих необходимым внедрение логической символики в математику. Первая причина заключается в том, что математика до сих пор еще полностью не освободилась от выражений обыденного языка, обладающих многозначностью. Например, в математике возникают недоразумения из-за многозначности слова «или», которое может употребляться как в исключающем, так и в неисключающем смысле. Введение логических символов позволяет сделать язык математики еще более точным, чем прежде, освобождая математику от многозначных слов и выражений, имеющих своим источником обыденный язык.

Вторая причина, делающая необходимым внедрение логической символики в математическую литературу, заключается в том, что логическая символика позволяет во многих случаях упрощать дедуктивные процессы в математике. Автор дает описание основных логических символов и на некоторых примерах из математики показывает, каким образом с помощью логической символики достигается упрощение дедуктивных процессов в математике.

С. К. Шаумян

7445. Вариант тьюринговской теории вычислительных машин. Ван Хао (A variant to Turing's theory of computing machines. Wang Hao), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 63—92 (англ.)

Рассматривается идеализированная машина B с программным управлением, имеющая общие черты с машинами Тьюринга и фактически конструируемыми быстродействующими вычислительными машинами. Машина B обладает неограниченной внутренней памятью, в ячейках которой хранятся команды программы, и бесконечной в обе стороны лентой, в ячейках которой хранится перерабатываемая информация. В каждый момент в поле зрения машины находится одна ячейка ленты. Машина может выполнять четыре операции: сдвиг ленты на одну ячейку влево, сдвиг ленты на одну ячейку вправо, печать знака * в рассматриваемой ячейке и условный переход. Эти операции обозначаются $\leftarrow$, $\rightarrow$, * и C. Соответствующие команды программы записываются в виде $<i,\leftarrow>$, $<i,\rightarrow>$, $<i,*>$ $u<i,Ck>$ (i— адрес команды). После выполнения команды одного из трех первых типов машина переходит к выполнению команды со следующим адресом. Выполнение команды условного перехода состоит в выполнении команды с адресом k, если рассматриваемая ячейка занята знаком *, и в выполнении команды с адресом $i+1$, если рассматриваемая ячейка пуста. Машина выполняет команды, начиная с первой, и останавливается, когда в программе нет указаний, что делать дальше.

Вводится специальный способ записи на ленту систем натуральных чисел. Арифметическая функция f n аргументов называется B-вычислимой, если можно построить такую программу, работая согласно которой, машина B перерабатывает систему чисел $x_1,...,x$ в некоторую систему $x_1,..., x_n, y$ тогда и только тогда, когда f определена в $x_1,..., x_n$ и $f(x_1,..., x_n)=y$. Всякая B-вычислимая функция n аргументов является частично рекурсивной. Оказывается, что всякая частично рекурсивная функция может быть вычислена на машине B, т. е. является B-вычислимой. Приведенный выше список операций машины B является минимальным. Если запретить машине использовать хотя бы одну из этих операций, не всякая частично рекурсивная функция будет B-вычислимой. Добавление к числу операций машины B операций стирания E, безусловного перехода U и двойственного условного перехода C' расширяет класс задач, решение которых можно ей поручать. Автор исследует, как операции C, C', U и E связаны друг с другом. Например, C' и U могут быть выражены через C и E. Далее автор рассматривает машину W, получающуюся из B путем добавления к ее операциям операции стирания E.

От рассмотрения машины общего назначения B автор переходит к рассмотрению специализированных машин типа машины B. Память у этих машин конечна, а программа не может быть изменена. Каждая такая маши-

на вычисляет некоторую функцию n аргументов. Возникает вопрос о возможности построения универсальной машины данного типа, работающей за любую специализированную машину этого типа при условии, что на ее ленту нанесена надлежащая информация об этой машине. Оказывается, что этот вопрос может быть решен положительно. В заключении автор приводит некоторые рассуждения общего характера о машинах для доказательств. Н. М. Нагорный

7446 К. Введение в математическую логику. Черч (Introduction to mathematical logic. Rev. and much enlarg. ed. Church Alonzo. Princeton (N. J.), Univ. Press, London, Oxford Univ. Press, 1956, x, 376 pp., ill., vol. I, 60 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 359, 4 (англ.)

7447 К. Алгебраическая логика и автоматизм. Онига (Lógica algébrica e automatismo. Oniga Theodore. Rio de Janeiro, Inst. Nac. Tecnol., 1954, 51 p. il), Boll. bibliogr. brasil., 1956, 1, № 4, 31 (порт.)

7448 К. Введение в формальную логику математики. Ниддич (Introductory formal logic of mathematics. Nidditch Peter Harold. London, Univ. Tutorial Press, 1957, vii, 188 pp., 12 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 413, 11 (англ.)

7449 Д. О теории рекурсивной неразрешимости. Дейвис (On the theory of recursive unsolvability. Davis Martin David. Doct. diss., Princeton Univ., 1950), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 424 (англ.)

См. также: 7378, 7384, 7560

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

7450. Об асимптотическом поведении тригонометрических сумм (Второе сообщение). Данкан (On the asymptotic behavior of trigonometric sums. (Second communication). Duncan Cecil E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 4, 369—373; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 369—373 (англ.)

Дано обобщение формулы суммирования Эйлера—Маклорена. Доказана следующая формула суммирования:

$$\sum_{n=A+1}^{B} f(n) = \int_{A-\alpha}^{B-\beta} f(x)\,dx + \sum_{s=0}^{h} \frac{\varphi_{s+1}(\beta+1)}{(s+1)!} f^{(s)} \quad (B-\beta) -$$

$$- \sum_{s=0}^{h} \frac{\varphi_{s+1}(\alpha+1)}{(s+1)!} f^{s)}(A-\alpha) - R_{h+1},$$

где

$$R_{h+1} = \int_{A-\alpha}^{A+\theta} \frac{\varphi_{h+1}(A+1-x)}{(h+1)!} f^{(h+1)}(x)\,dx +$$

$$+ \int_{A+\theta}^{B+\theta} \frac{\varphi^*_{h+1}(B+1-x)}{(h+1)!} f^{h+1}(x)\,dx +$$

$$+ \int_{B+\theta}^{B-\beta} \frac{\varphi_{h+1}(B+1-x)}{(h+1)!} f^{(h+1)}(x)\,dx.$$

Здесь $\varphi_n(u)$ — n-й полином Бернулли; $\varphi^*_n(u)$ — периодическая функция с периодом 1, равная $\varphi_n(u)$ для $0 < u < 1$; $B - A > 0$, $h > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, α и β — произвольные вещественные числа; $f(x)$ имеет $(h+1)$-ю непрерывную производную в интервале

$$\mathrm{Min}\ (A-\alpha,\ A+\theta,\ B-\beta) \leqslant x \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Max}\ (A-\alpha,\ B+\theta,\ B-\beta).$$

В конце заметки эта формула используется для получения асимптотических выражений тригонометрических сумм $S\,\frac{i}{T}$ и $M\,\frac{i}{T}$, уже рассмотренных в первом сообщении (РЖМат, 1958, 3516). Отмечается, что эта формула суммирования применима и к другим суммам. А. В. Малышев

7451. Об асимптотическом поведении тригонометрических сумм (Третье сообщение). Данкан (On the asymptotic behavior of trigonometric sums. (Third communication). Duncan Cecil E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 4, 374—380; Indagationes math, 1957, **19**, № 4, 374—380 (англ.)

Дается приложение метода обобщенных пределов к формуле суммирования Эйлера—Маклорена (предыдущие два сообщения см. РЖМат, 1958, 3516, реф. 7450). Используя концепцию обобщенного предела по Адамару, автор преобразует свою формулу суммирования (реф. 7450) и снова прилагает ее к сумме Уотсона $S_p = \sum_{n=1}^{p-1} \csc^2 \frac{\pi n}{p}$. А. В. Малышев

7452. О необращающихся в нуль эйлеровых произведениях. Винер, Винтнер (On the non-vanishing of Euler products. Wiener Norbert, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 801—808 (англ.)

Доказывается следующее: Пусть для каждого простого числа определено значение $\chi_p = \pm 1$ или 0 и функция $f(s)$, при $\sigma > 1$ определенная равенством $f(s) = \Pi_p (1 - \chi_p p^{-s})^{-1}$, будет мероморфной на прямой $\sigma = 1$. Тогда $f(s)$ будет регулярной и необращающейся в нуль функцией в каждой точке $s \neq 1$ прямой $\sigma = 1$.

Доказательство основано на использовании простейших свойств дзета-функции Римана в полуплоскости $\sigma \geqslant 1$. К. А. Родосский

7453. Приложение теоремы о среднем значении рядов Дирихле. Инь Вэнь-линь (An application of the mean value theorem of the Dirichlet series. Yin Wen-lin), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжанькэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, 3, № 4, 391—394 (кит.; рез. англ.)

Получено асимптотическое выражение для

$$\sum a_n \exp\left(-(2N)^{-2} \ln^2 \frac{x}{n}\right), \quad |n-x| \leqslant cx \sqrt{\ln x}\cdot N \quad \text{при}$$

$N \ll \ln^{-\frac{1}{2}} x, x \to \infty$ при тех же условиях, накладываемых на функцию $Z(s) = \sum a_n n^{-s}$, при которых в работе

Рихерта выведена асимптотическая формула для $\sum_{n\leqslant x} a_n$ (РЖМат, 1955, 4841). К. А. Родосский

7454. О характерах квадратичных форм. Пилер (Über die Charaktere quadratischer Formen. Piehler Joachim), Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle—Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1955, **4**, № 6, 1215—1224 (нем.)

Обобщаются исследования Брандта (Brandt H., Math Ann., 1952, **124**, 334—342) о характерах тернарных квадратичных форм на случай квадратичных форм от n переменных. После обычных определений (гл. 1; при этом рассматриваются неклассические формы, т. е. формы, у которых коэффициенты при x_i, x_j могут быть нечетными) вводится (гл. II) понятие инвариантов по Поллу (Pall G., Quart., J. Math., 1935, **6**, 30—51); формы с одинаковыми инвариантами объединяются в порядок. В гл. III—V вводится понятие характера формы; находятся условия существования главных, дополнительных и одновременных характеров; отыскиваются соотношения между ними; формы порядка с одинаковыми характерами составляют род. Наконец, в гл. VI доказывается существование рода с наперед заданными инвариантами и характерами, если выполнены указанные в гл. IV—V необходимые условия.

Примечание референта. По содержанию статья соответствует первой части известной работы Минковского о квадратичных формах (Minkowski H., Ges. Abhandl., 1911, **1**, 3—144); однако эти исследования существенно упрощаются и обобщаются на неклассические формы. По этому предмету см. также работы Смита (Smith H. J. S., Collected Math. Papers, 1894, 1, 412—417, 510—523; II, 623—680), Браун (Braun H., J. reine angew. Math., 1940, **182**, 32—49) и Полла (Pall G., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, **51**, 185—197). А. В. Малышев

7455. Эквивалентность квадратичных форм. Уотсон (The equivalence of quadratic forms. Watson G.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 4, 526—548 (англ.)

Автор переносит результаты статьи Джонса и Уотсона (РЖМат, 1958, 975) о количестве классов в роде неопределенных тернарных квадратичных форм с целыми коэффициентами на формы с четырьмя и более переменными.

Пусть $f(x_1, \ldots x_k) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, $2a_{12}, \ldots 2a_{n-1,n}$ — целые числа, — квадратичная форма; ей сопоставляем матрицу $A = (2a_{ij})$ и определитель

$$d = d(f) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}k} \det A, & \text{если } k \text{ четно,} \\ \frac{1}{2}(-1)^{\frac{1}{2}k-1} \det A, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Формы определителя d относим к одному роду, если для любого положительного целого числа m каждая из них (mod m) переходит в другую целочисленной подстановкой. Формы относим к одному классу в широком смысле, если они переходят друг в друга целочисленной подстановкой определителя ± 1; относим к одному классу в узком смысле, если они переходят друг в друга целочисленной подстановкой определителя $+1$.

Пусть Γ_d — группа бесквадратных целых чисел, простых с d относительно операции „умножения“ $v_1 \cdot v_2 = v_1 v_2 (v_1, v_2)^{-2}$, $\Gamma(f)$ — ее подгруппа, состоящая из тех q, для которых можно найти целое число $n = n(q)$ и целый вектор $t = t(q)$ с условиями: $n \nmid f(t)$, $n \nmid t'At$; $n \nmid d$, $q \in \Gamma d$, $f(t) \equiv qn \pmod{d^4}$, $qnf > 0$, если форма f положительна; $\Gamma^+(f)$ — подгруппа $\Gamma(f)$, состоящая из попарных произведений элементов $\Gamma(f)$. Доказана теорема: Пусть f — невырожденная целочисленная квадратичная форма с тремя или более переменными. Тогда 1) число классов в широком смысле рода f не меньше порядка фактор-группы $\Gamma_{d(f)}/\Gamma(f)$, а в узком смысле — порядка $\Gamma_{d(f)}/\Gamma^+(f)$; для неопределенных форм f имеет место знак равенства; 2) для того чтобы f была несобственно эквивалентна себе, необходимо (а для неопределенных форм — и достаточно), чтобы $\Gamma(f) = \Gamma^+(f)$. Отсюда следует, что для неопределенных форм число классов есть степень 2.

Изучив строение $\Gamma(f)$, автор выводит отсюда теорему: Пусть f — неопределенна, $\kappa \geqslant 3$, d_1 — наибольшее целое с условием $d_1^{\frac{1}{2}k(k-1)} \mid d$. Тогда, если $d_1 = 1$ или 2 или 4 или p или $2p$, где $p \equiv -1 \pmod 4$ — простое число, то число классов (в узком смысле) рода f равно 1. Эта теорема содержит результат Мейера (Meyer A., Vierteljahrschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 1891, **36**, 241—250). К этой теме относится и интересная статья Кнезера (РЖМат, 1958, 976). А. В. Малышев

7456. Количество классов определенных квадратичных форм. Кнезер (Klassenzahlen definiter quadratischer Formen. Kneser Martin), Arch. Math., 1957, **8**, №4, 241—250 (нем.)

Пусть $h(d, n)$ — количество классов определенных квадратичных форм определителя d с числом переменных n. Автор предлагает алгорифм для вычисления $h(d, n)$, по замечанию автора, менее трудоемкий для $n > 4$, чем алгорифм приведения квадратичных форм. С помощью этого алгорифма автором вычислены $h(d, n)$ для всех $d \leqslant 3$ и $n + d \leqslant 17$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	5	8
2	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	7	11	
3	1	2	2	2	2	3	3	4	5	7	8	10	13	19		

А. В. Малышев

7457. О неопределенных тернарных родах, содержащих только один класс. Мак-Карти (On indefinite ternary genera of one class. McCarthy Paul J.), Math. Z., 1957, **68**, № 3, 290—295 (англ.)

Предлагается ряд условий, аналогичных условиям Мейера (Meyer A., J. reine und angew. Math. 1891, **108**, 125—139), при которых род целочисленных неопределенных тернарных квадратичных форм содержит ровно один класс. Пусть f — неопределенная тернарная квадратичная форма с целочисленной матрицей A; пусть f — примитивна; J — о. н. д. всех миноров второго порядка матрицы A; $\det f = J^2 K$. Тогда род форм f содержит ровно один класс, если (теорема 3) $(J, K) \mid 6$, $J \not\equiv 0 \not\equiv K \pmod 4$, $\det f \not\equiv 0 \pmod{81}$, $C_3(f) = 1$, где $C_p(f)$ — инвариант Гассе; или если (теорема 5)

$$J \equiv 8 \pmod{16},\ K \equiv 2 \pmod 4,\ (J, K) = 2;$$

или если (теорема 6) $J \equiv 2 \pmod 4$, $K \equiv 4 \pmod 8$, $(J, K) = 2$; или если (теорема 7) $J \equiv 8 \pmod{16}$,

$$K \equiv 1 \pmod 2,\ (J, K) \equiv 1,\ (-1)^{\frac{(f-1)}{2}} = (-1)^{\frac{(K-1)}{2}},$$

форма F, взаимная с f, собственно примитивна; или если (теорема 8) $J \equiv 4 \pmod 8$, $K \equiv 1 \pmod 2$, $(j, K) = 1$,

$(-1)^{\frac{f-1}{2}} = (-1)^{\frac{K-1}{2}}$, сравнение $F \equiv -\frac{J}{4} \pmod 4$ разрешимо.

Приведены и некоторые другие условия.

А. В. Малышев

7458. Приложение кватернионов к представлениям бинарной квадратичной формы суммой четырех квадратов. Полл, Таусски (Application of quaternions to the representations of a binary quadratic form as a sum of four squares. Pall G., Taussky O. Proc. Roy. Irish Acad., 1957, A58, № 3, pp. 23—28) (англ.)

Пусть $r_s(n)$ — количество представлений целого числа n суммой s целых квадратов, а $r_s(\varphi)$ — количество представлений целочисленной бинарной квадратичной формы φ суммой s квадратов целочисленных линейных форм. Пусть $\varphi = e\varphi_1$, где $\varphi_1 = ax^2 + 2t_0xy + by^2$, $(a, t_0, b) = 1$, e, a, t_0, b, — целые числа, $a \geqslant 0$, $e \geqslant 0$, $d = ab - t_0^2 \geqslant 0$ $(a, 2t_0, b) = k$.

Доказано, что

$$r_4(\varphi) = \sum_{h,e} r_4(h\,h) r_3(e^2 d; h), \qquad (1)$$

где $r_3(e^2 d, h)$ — количество решений $e^2 d = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ с условием $(t_1, t_2, t_3, e) = h$; суммирование ведется по всем положительным делителям числа e. Отсюда, в частности, следует результат Морделла (Mordell L. J., Quart J. Math., 1930, 4, 276—280; 1937, 8, 58—61) о том, что для того чтобы $r_4(\varphi) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $r_3(e^2 d) > 0$. Доказательство формулы (1) по идее близко рассуждениям Морделла во второй из указанных статей. В заключение авторы выписывают формулы для $f(e) = r_4(e^2 \varphi_1)/r_4(\varphi_1)$. А. В. Малышев

7459. Минимум неопределенной квадратичной формы с целыми коэффициентами. Уотсон (The minimum of an indefinite quadratic form with integral coefficients. Watson G. L.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 4, 503—507 (англ.)

Доказана теорема: Пусть f — целочисленная примитивная неопределенная квадратичная форма от $k \geqslant 3$ переменных с определителем $d \neq 0$. Обозначим через $\min^+ f$ наименьшее положительное значение f, когда переменные пробегают целые значения. Тогда

$$\min^+ f = O\left(|d|^{\frac{1}{2k-2} + \varepsilon} \right),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное вещественное число; постоянная, входящая в O, зависит только от ε (и не зависит от k). А. В Малышев

7460. Произведение n линейных форм в поле рядов. Армитидж (The product of n linear forms in a field of series. Armitage J. V.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 132—137 (англ.)

Пусть K — некоторое поле; $K(t)$ — кольцо полиномов от t над K; $K(t)$ — поле отношений для $K[t]$, т. е. поле формальных рациональных функций от t над K. В $K(t)$ вводим норму: если $f \in K(t)$, то $|f| = l$ степень f; пусть $K\{t\}$ — замыкание $K(t)$ по этой норме. $K\{t\}$ есть поле всех формальных рядов от t вида

$$\varphi = a_n t^n + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1} + \ldots, \quad a_i \in K.$$

Множество точек $(L_1, \ldots, L_n)$,

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\alpha_{ij} \in K\{t\}$, $\det(\alpha_{ij}) = D \neq 0$, а $u_1, \ldots, u_n$ пробегают независимо друг от друга все значения из $K[t]$, называется решеткой определителя $[D] = l^d$; здесь d — целое число. Малер (Mahler K., Ann. Math., 1941, 42, 488—522) развил для $K\{t\}$ теорию, аналогичную геометрии чисел Минковского. В частности, он доказал, что найдутся такие значения полиномов $u_1, \ldots, u_n$ не все равные нулю, что

$$|L_1, L_2, \ldots L_n| \leqslant e^{-(n-1)} |D|. \qquad (1)$$

В реферируемой статье исследуется точность этой оценки. Доказано: 1) если K имеет характеристику 0 или есть конечное поле из $q \geqslant n-1$ элементов, то оценка (1) неулучшаема; 2) если K — поле из $q \leqslant n-2$ элементов, то оценку (1) можно заменить на

$$L_1, \ldots L_n| \leqslant e^{-n+2+\gamma} |D|, \qquad (2)$$

где $\gamma \geqslant 2$ — целое число, определяемое неравенствами

$$\gamma \geqslant \frac{n-1}{q} > \gamma - 1.$$

Автору неизвестно, является ли оценка (2) наилучшей. А. В. Малышев

7461. О некоторых трехчленных уравнениях в конечном поле. Альберт (On certain trinomial equations in finite fields. Albert A. A.), Ann. Math., 1957, 66, № 1, 170—178 (англ.)

Пусть $F = F_q$ есть поле $q = \pi^m$ элементов (π — простое), $\mathfrak{R}$ — поле порядка n над F, y — примитивный элемент из $\mathfrak{R}$ с периодом $q^n - 1$; каждый элемент из $\mathfrak{R}$ есть некоторая степень y.

Рассматривается уравнение:

$$y^s + y^t = 1. \qquad (1)$$

Даны некоторые сведения о разрешимости уравнений (1). Среди них следующие:

Теорема 1. Пусть x — примитивный корень p-й степени из единицы и $p > 3$ — простое, q — примитивный корень по модулю p, тогда уравнение: $x^s + x^t = 1$ не имеет решений в $\mathfrak{R} = F_q(x)$.

Решение (s, t) называется исключительным, если p не делит ни одного из двух s и t.

Теорема 4. Если q четное, то (1) содержит $p-2$ исключительных решений (s, t):

$$s = q^{\operatorname{ind}\,(\lambda+1)} - 1, \qquad t = q^{\operatorname{ind}\lambda} - q^{\frac{p-1}{2}},$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p-2).$$

Если q нечетное, то (1) содержит $p-2$ исключительных решений:

$$S = eq^{\operatorname{ind}(\lambda+1)} + p\rho - 1, \qquad t = eq^{\operatorname{ind}\lambda} + p\rho - q^{\frac{p-1}{2}},$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots, p-2,$$
$$e = q^{\operatorname{ind} 2} - 1, \qquad n = p - 1 = 2\nu, \qquad \rho = q^{\nu} - 1.$$

Указаний на другие работы в статье не содержится. П. Н. Реморов

7462. О росте круговых полиномов в интервале (0,1). Эрдеш (On the growth of the cyclotomic polynomial in the interval (0,1). Erdös P.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 2, 102—104 (англ.)

Пусть $F_n(x)=\prod_{d|n}(x^{\frac{n}{d}}-1)^{\mu(d)}$ — обозначает n-й круговой полином. Дано доказательство неравенства

$$\max|F_n(x)|>\exp\left\{n\frac{c_3}{\log\log n}\right\}$$
$$0\leqslant x\leqslant 1$$

при $c_3<\log 2$. П. Н. Реморов

7463. О нахождении делителей чисел и о больших простых числах. Инкери (Lukujen tekijöihin jaosta ja suurista alkuluvuista. Inkeri K.), Arkhimedes, 1957, № 2, 1—16 (финск.)

Изложение некоторых вопросов элементарной теории чисел, связанных с числами Мерсенна и Ферма, относящимися сюда работами Эйлера и т. п.

Указаны отдельные результаты Э. Люка (E. Lucas) в этом направлении,— в том числе указанное им обращение малой теоремы Ферма, а также несколько соображений о рекуррентных рядах Люка—Фибоначчи и соответствующих непрерывных дробях; рассмотрено несколько чисел вида $2^{2^n}+1$ (числа Ферма), причем дано несколько образцов определения делителей больших чисел этого рода и примеры больших простых чисел. Упомянуты отдельные результаты подобного характера, полученные с помощью современных вычислительных машин. А. И. Попов

7464. О свойствах величин вида $1/N$, где N — нечетное число. Андерссон (Om udda stambrak. Andersson Josef), Elementa, 1957, **40**, № 3, 165—170 (шведск.)

Пусть N — нечетное натуральное число. Тогда дробь t/N можно разложить на сумму дробей вида $1/N_i$, где N_i — различные нечетные натуральные числа. Приводятся несложные формулы, позволяющие найти указанное разложение в случаях $t=1$, 2, 3 или 4.

В. Д. Подсыпанин

7465. Об одном свойстве чисел Бернулли. Балк М. Б., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 55—59

Рассматривается определитель m-го порядка $\delta_m=|a_{ik}|$ с элементами $a_{ik}=B_2(i+k-1)/[2(i+k-1)]!$, где B_l — l^n-е — число Бернулли.

Доказывается, что

$$\frac{1}{\delta_m}=\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(4n+2)!^2(4n+3)}{(2n+1)!^2}.$$

Для доказательства рассматриваются разложения $\sqrt{z}\operatorname{cth}\sqrt{z}$ в степенной ряд и в непрерывную дробь. Из сравнения этих разложений и получается указанная формула. В. Д. Подсыпанин

7466. Наибольшее (из известных) простое число. Андерссон (Le plus grand nombre premier. Andersson J.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 316 (франц.)

В сентябре 1957 г. шведский математик Ризель (Стокгольм) при помощи электронной машины БЭСК определил, что число $2^{3217}-1$, имеющее 969 цифр, простое. Это 18-е простое число Мерсенна.

В. А. Голубев

7467. Диофантово уравнение. Гурматай (Equation diophantienne. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1957, **66**, № 7—9, 322 (франц.)

Показано, что уравнение $x^8+y^4+z^4=2t^2$ имеет бесконечное множество целочисленных решений, получающихся из тождества $(2a+1)^8+[4a^2(a+1)^2-1]^4+[4a(a+1)(a^3+a+1)]^4=2(4a^4+8a^3+6a^2+2a+1)^4$ при $a=1, 2,\ldots$ В. А. Голубев

7468. Производные от числа. Капрекар (Dérivées d'un nombre. Kaprekar D. R.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 326—327 (франц.)

Рассматриваются бесконечные последовательности натуральных чисел $N_1, N_2, \ldots$, образованных из данного числа N_1 так: $N_2=N_1+d_1$, $N_3=N_2+d_2$, где d_1, $d_2, \ldots$—суммы цифр чисел N_1 $N_2, \ldots$ по десятичной нумерации. Указывается, что все эти последовательности распределяются на три класса и каждое натуральное число принадлежит одному из классов.

В. А. Голубев

7469. Доказательство теоремы Вейля. Лопес-Гали (Una demostracion del teorema de Weill. Lopez Gali Emilio), Gac. mat., 1957, **9**, № 2-3, 63 (исп.)

Доказывается, что $(mn)!$ делится на $m!^n n!$

Э. Апарисио

7470. Заметка о совершенных и кратно-совершенных числах. Мак-Карти (Note on perfect and multiply perfect numbers. McCarthy Paul J.), Portug. math., 1957, **16**, № 1-2, 19—21 (англ.)

Доказываются две теоремы, выражающие одно из необходимых условий существования нечетных совершенных и кратно-совершенных чисел. В. А. Голубев

7471. О гипотезе Гурматая. Маковский (Sur une hypothèse de R. Goormaghtigh. Makowski A.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 327—328 (франц.)

Гурматай предположил, что при $A<1\,000\,000$ уравнение $A=1+x+x^2+\ldots+x^m=1+y+y^2+\ldots+y^n$, (1) $m>1$, $n>1$, $x>1$, $y>1$, $x\neq y$; имеет лишь два решения (A, m, n, x, y) в натуральных числах, именно $(31, 4, 2, 2, 5)$ и $(8191, 12, 2, 2, 90)$. Бровкин и Шинцель доказали, что уравнение

$$2^m-1=\frac{1}{2}y(y+1) \qquad (2)$$

имеет 4 решения (m, y)) в натуральных числах: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 5)$, $(12, 90)$.

Показывается, что уравнения (1) и (2) идентичны и что решения $(4, 5)$ и $(12, 90)$ второго уравнения соответствуют решениям (1) при $n=x=2$.

В. А. Голубев

7472. Конечные цифры степеней целых чисел. Тебо (Chiffres terminaux des puissances des nombres entiers. Thébault V.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 322—324 (франц.)

Рассматриваются степени натуральных чисел, имеющие окончания из одинаковых цифр, например, $368288471^3=\ldots 111\,111\,111$. В. А. Голубев

7473. Греко-латинские квадраты. Верхуфф (Grieks—latijnse vierkanten. Verhoeff J.), Rapp. Math. centrum, 1956, № 020, 1—8 (гол.)

Дается обоснование построения и свойств греко-латинских квадратов. В. А. Голубев

7474. Три теоремы о перестановках. Маллин (Three theorems on permutations. Mullin A. A.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 9, 669—670 (англ.)

Доказываются три теоремы для вывода асимптотического выражения функции $\Phi(n)=A_n^1+A_n^2+\ldots+A_n^n$, где $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ — число сочетаний из n по m. В. А. Голубев

7475. Теорема о треугольных числах. Стольт (A theorem on triangular numbers. Stolt B.), Portug. math., 1957, № 1-2, 3—5 (англ.)

Пусть $\Delta_k=\frac{1}{2}k(k+1)$. Доказывается теорема, высказанная в 1854 г. Поллоком: Если n — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\Delta_k\leqslant n<\Delta_{k+1}$, то имеем $n=\Delta_x+\Delta_y+\Delta_u+\Delta_v$, где x, y, u, v — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $x+y+u+v=2k-1$. В. А. Голубев

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7476. Обозрение корней многочленов второй и третьей степени. Шильт (Übersicht über die Nullstellen einer Funktion zweiten und dritten Grades. Schilt H.), Elem. Math., 1956, **11**, № 3, 51—56 (нем.)

Приводятся описания расположений на комплексной плоскости корней квадратного уравнения $t^2+2t-q=0$ в зависимости от параметра q, принимающего любые комплексные значения, и слагаемых u и v (в зависимости от параметра p) корней кубического уравнения $z^3+3pz+2=0$, в сумму которых разлагаются эти корни при решении кубического уравнения методом Кардана. Е. Г. Шульгейфер

7477. Об арифметике на алгебраических кривых. Малер (On the arithmetic on algebraic curves. Mahler), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago. s. a., 28—32 (англ.)

Пусть $f(x, y)$ — целочисленный полином от x, y, не постоянный и неприводимый в поле рациональных чисел, и C — множество точек на плоскости, обе координаты которых принадлежат подгруппе мультипликативной группы рациональных чисел, порожденной конечным числом простых чисел $p_1, \ldots, p_l$. Доказывается, что если $f(x, y)$ обращается в нуль в бесконечном числе точек из C, то он является биномом. В. В. Морозов

7478. Об одной теореме Гаусса. Грегер (Über einen Satz von Gauss. Greger Karl), Medd. Lunds univ. mat. semin., 1954, **12** (нем.)

Обобщается теорема о произведении примитивных многочленов. Многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ из кольца многочленов $\mathfrak{o}[x]$ над произвольным коммутативным кольцом $\mathfrak{o}$ с единицей автор называет примитивным, если идеал $(a_0, a_1, \ldots, a_n)=\mathfrak{o}$. Доказывается, что произведение двух многочленов из кольца $\mathfrak{o}[x]$ тогда и только тогда является примитивным многочленом, когда примитивны оба сомножителя. Отмечается, что это же утверждение справедливо и для многочленов от нескольких неизвестных. (Перепечатано из Kgl. fysiogr. sällskap. Lund förhandl., 1953, 23, № 16, 1—2). Е. Г. Шульгейфер

7479. Две алгебраические проблемы, связанные с правилом Горнера. Островский (On two problems in abstract algebra connected with Horner's rule. Ostrowski A.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 40—48 (англ.)

Как известно, для того чтобы, пользуясь методом Горнера, вычислить значение многочлена $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ степени n с коэффициентами из некоторого поля P при заданном значении неизвестного x, нужно провести n сложений и n умножений. В работе ставится и отрицательно решается вопрос о возможности вычисления значения многочлена $f_n(x)$ с помощью меньшего чем n числа сложений, допуская при этом произвольное число умножений как между элементами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и значением неизвестного x, так и произвольного элемента поля P на каждый из этих элементов. Аналогичный вопрос относительно умножений ставится в несколько более общей форме. Пусть M_0 — модуль всех линейных многочленов от неизвестных $x, a_0, \ldots, a_n$ с коэффициентами из поля P (под модулем здесь автор понимает множество, замкнутое относительно сложения и умножения на элементы основного поля). Отправляясь от модуля M_0, можно построить (конечно, далеко не однозначно) последовательность модулей $\{M_n\}$, в которой каждый модуль $M_{n+1}=M_n(A_{n+1})$ $(n\geqslant 0)$ состоит из всех сумм вида $\alpha A_{n+1}+m$, где $\alpha\in P$, $m\in M_n$, а A_{n+1} — многочлен, являющийся произведением некоторых двух многочленов из M_n и не содержащийся в M_n. Указанный выше вопрос относительно умножений теперь можно сформулировать следующим образом: можно ли построить такую последовательность модулей $\{M_n\}$, чтобы данный многочлен $f_n(x)$ принадлежал модулю M_k с индексом $k<n$. Автор предполагает, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным, и доказывает это для случаев, когда $n=2, 3, 4$.

В связи с вопросом об единственности метода Горнера, при котором точно n раз проводится умножение, высказывается следующее предположение. Если многочлен $f_n(x)$ принадлежит n-му члену M_n последовательности модулей $\{M_n\}$, то многочлены $A_{\nu+1}$, с помощью которых строится эта последовательность, для $\nu=0, 1, \ldots, n-1$ имеют вид

$$A_{\nu+1}=(\alpha_\nu x+\beta_\nu)A_\nu+m_\nu,$$

где α_ν и β_ν — некоторые элементы поля P, а $m_\nu\in M_\nu$. Справедливость этого предложения доказывается автором для $n=2, 3$.

В заключение рассматривается вопрос о минимальном числе сложений и умножений, которое нужно провести для вычисления значения многочлена от нескольких неизвестных. Е. Г. Шульгейфер

7480. Заметка к вопросу о разрешимости определенной системы неравенств при помощи положительных чисел. Червена (Poznámka k otázce řešitelnosti jisté soustavy nerovností kladnými čísly. Červená Alena), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 3, 335—341 (чешск.; рез. русск., нем.)

Доказывается следующее предложение. Система неравенств

$$\begin{cases} a_1c_{11}-a_2c_{12}-a_3c_{13}-\ldots-a_nc_{1n}>0, \\ -a_1c_{21}+a_2c_{22}-a_3c_{23}-\ldots-a_nc_{2n}>0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_1c_{n1}-a_2c_{n2}-a_3c_{n3}-\ldots+a_nc_{nn}>0, \end{cases}$$

в которой все c_{ik} положительны, тогда и только тогда имеет решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с положительными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, когда ее определитель положителен и когда произведение $c_{11}c_{22}\ldots c_{nn}$ превосходит каждое из произведений $c_{1i_1}c_{2i_2}\ldots c_{ni_n}$, где $i_1i_2\ldots i_n$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, отличная от перестановки $12\ldots n$. С. Н. Черников

7481. Полилинейные формы и элементарные делители в кольце главных идеалов. Грегер (Multilinear forms and elementary divisors in a principal ideal ring. Greger Karl), Medd. Lunds univ. mat. semin., 1954, **12** (англ.)

В первой части работы на полилинейные формы с коэффициентами из некоторого кольца главных идеалов R без делителей нуля обобщается теорема Шмитта—Фробениуса о том, что если d — наибольший общий делитель коэффициентов $a_{j_1j_2\ldots j_n}$ полилинейной формы

$$f(x^1, x^2\ldots, x^n)=$$

$$=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\ldots\sum_{j_n}a_{j_1j_2\ldots j_n}x_{j_1}^1x_{j_2}^2\ldots x_{j_n}^n$$

то в кольце R существуют такие элементы $h^1_{j1}, h^2_{j2}, \ldots, x^n_{jn}$, что

$$f(h^1, h^2, \ldots, h^n) =$$

$$= \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_n} a_{j_1 j_2 \ldots j_n} h^1_{j_1} h^2_{j_2} \ldots h^n_{j_n} = d.$$

Во второй части приводится новое доказательство теорем о подмодуле свободного R-модуля с конечной базой (где R—кольцо главных идеалов без делителей нуля) и о связях между базами подмодуля и модуля, т. е. о существовании такой базы $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ свободного R-модуля G, что элементы $e_1\mathfrak{M}_1, \ldots, e_m\mathfrak{M}_m$, где $e_i \in R$, $m \leqslant n$, образуют базу данного подмодуля $\mathfrak{M}$; причем $(e_j) \supset (e_k)$, если $j < k$. Доказывается однозначность, с точностью до обратимых множителей, определения элементарных делителей e_i подмодуля $\mathfrak{M}$. (Перепечатано из Kgl. fysiogr. sallskap. Lund förhandl., 1953, 23 № 17, 1—7). Е. Г. Шульгейфер

7482. Разложение полиноминальной матрицы на множители. Лопатинский Я. Б., Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1956 (1957), вып. 38, 3—7

Пусть $A(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} A_{s-j}\lambda^j$, $s \geqslant 2$, где A_j, $j = 0, \ldots, s$ — комплексные квадратные матрицы порядка p, $\det A_0 \neq 0$ и пусть из ps корней (с учетом их кратности) уравнения $\det A(\lambda) = 0$ выделены pk корней (k — квадратное число, $k < s$), отличных от остальных корней этого уравнения. Доказывается, что для существования полиномиальных матриц $B(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}\lambda^j$, $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{s-k} P_{k-j}\lambda^j$, удовлетворяющих условиям: 1) $A(\lambda) = B(\lambda)P(\lambda)$; 2) $\det B_0 \neq 0$; 3) корни уравнения $\det B(\lambda) = 0$ совпадают с выделенными pk корнями, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\mathrm{Res}_+ \left\{ \begin{pmatrix} E \\ \lambda E \\ \lambda^{s-1} E \end{pmatrix} A^{-1}(\lambda) (E, \lambda E, \ldots, \lambda^{k-1} E) \right\}$$

был равен pk. При этом E обозначает единичную матрицу порядка p, Res_+ — сумму вычетов относительно выделенных pk корней, а

$$\begin{pmatrix} E \\ \lambda E \\ \lambda^{s-1} E \end{pmatrix} \text{ и } (E, \lambda E, \ldots, \lambda^{k-1} E)$$

— прямоугольные $ps \times p$- и $p \times pk$-матрицы, составленные из матриц $E, \lambda E, \ldots, \lambda^{s-1}E$ и $E, \lambda E, \lambda^{k-1}E$ соответственно. Доказательство основано на рассмотрении системы дифференциальных уравнений

$$A\left(\frac{d}{dx}\right) u(x) = 0.$$

М. А. Наймарк

7483. О некоторых применениях гиперматриц с перестановочными блоками. Егервари (Über einige Anwendungen vor Hypermatrizen, deren Blöcke vertauschbar sind. Egervary E.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 252 (нем.)

Приводятся некоторые правила действий с гиперматрицами порядка m, элементами которых являются блоки (квадратные матрицы порядка n). В случае, когда блоки гиперматрицы перестановочны, действия с такими матрицами во многом сходны с действиями над обычными матрицами. Приводится также спектральное разложение аналитической функции от гиперматрицы, блоками которой являются многочлены от некоторой обычной матрицы.

А. Ф. Голубчиков

7484. Об одном свойстве квазиобратных матриц. Стоякович (Sur une proprieté des matrices quasi-inverses. Stojaković Mirko), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, **6**, № 3-4, 154—157 (франц., рез. серб.)

Продолжая ранее начатое исследование (РЖМат, 1953, 73), автор доказывает, что сумма определителей всех главных подматриц порядка $i (i = 1, 2, \ldots, k)$ квазиединичной матрицы E (в настоящей работе автор квазиединичную матрицу почему-то называет квазиобратной), ассоциированной с данной прямоугольной $l \times k$-матрицей $A (l \leqslant k)$ ранга l, равна C_l.

Е. Г. Шульгейфер

7485. Неравенства для симметричных функций и эрмитовых матриц. Маркус, Лопес (Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices. Marcus M., Lopes L.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 305—312 (англ.)

Пусть $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ — совокупность действительных чисел. Сложение совокупностей (a) и (b), а также умножение их на действительное число λ выполняется по тем же правилам, что и соответствующие операции над n-мерными векторами. Если существует число λ такое, что $a_j = \lambda b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $(a) \sim (b)$. Авторы ограничиваются рассмотрением лишь таких совокупностей, которые состоят из неотрицательных чисел, причем по крайней мере r чисел рассматриваемой совокупности положительны.

Пусть, далее, $E_r(a) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n} \prod_{j=1}^{r} a_i$, $E_0(a) = 1$ — элементарные симметрические функции

Авторами доказываются следующие предложения:

Теорема 1. $E_r(a+b) > E_r(a) + E_r(b)$, кроме случаев $r = 1$ и $(a) \sim (b)$, когда имеет место знак равенства.

Теорема 2. Если (a) и (b) являются совокупностями с положительными элементами, то для $1 \leqslant r \leqslant n$

$$E_r^{\frac{1}{2}}(a+b) > E_r^{\frac{1}{2}}(a) + E_r^{\frac{1}{2}}(b),$$

кроме случаев $r = 1$ и $(a) \sim (b)$, когда имеет место знак равенства.

Пусть A, B и $A+B$ — неотрицательные эрмитовы матрицы порядка n с характеристическими числами соответственно $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}$; $0 \leqslant \beta_i \leqslant \beta_{i+1}$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, тогда имеют место следующие предложения:

Теорема 3. $E_r^{\frac{1}{r}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \leqslant E_r^{\frac{1}{r}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + E_r^{\frac{1}{r}}(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ $(1 \leqslant r \leqslant k \leqslant n)$

Теорема 4. Пусть $x^n + \sum_{j=1}^{n} \rho_j(C) x^{n-j}$ — характеристический многочлен матрицы C. Коэффициента ха-

рактеристических многочленов матриц A и B удовлетворяют следующим неравенствам: $|\rho_r(A+B)|^{\frac{1}{r}} \geqslant \geqslant |\rho_r(A)|^{\frac{1}{r}} + |\rho_r(B)|^{\frac{1}{r}}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Теорема 5. Если $\omega + \sigma = 1$, $\omega \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, то $|\rho_r(\omega A + \sigma B)| \geqslant |\rho_r(A)|^{\omega} |\rho_r(B)|^{\sigma}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Авторами дается чисто алгебраическое доказательство теорем 1 и 2. Теорема 2 не является новой, однако ее доказательство ранее проводилось геометрическим путем.

Теоремы 3, 4, 5 являются результатом непосредственного применения теорем 1 и 2 к неотрицательным эрмитовым матрицам. А. Ф. Голубчиков

7486. К изучению условия ассоциативности множеств со случайным законом композиции. Гуревич (Sur l'étude de la condition d'associativité des ensembles à la loi de composition aléatoire. Gourevitch Georges), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 7, 778—780 (франц.)

Условия коммутативности и ассоциативности множеств E_n (РЖМат, 1958, 2752) рассматриваются при определенных ограничениях, наложенных на вероятности p^k. Л. М. Глускин

7487. Одно решение для траектории вектора. Хаята (Hayata Yasunori), Канто гакуин дайгаку когакубу кенкю хококу, J. Technol. Res., 1957, 2, № 1, 25—31 (японск.; рез. англ.)

Исследуется траектория вектора, рассмотренного как функция от λ (действительного параметра), имеющего форму

$$W = \frac{A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \ldots + A_m\lambda^m}{B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \ldots + B_n\lambda^n},$$

где A, B — постоянные комплексные векторы и m, n — целые положительные числа. Решение этого вопроса получено автором с помощью его теоремы. Резюме автора

7488. О взаимном расположении двух линейных векторных пространств. Зушовк (Über die gegenseitige Lage zweier linearer Vektorräume. Suschowk Dietrich), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1956(1957), 15—22 (нем.)

Пусть $\mathfrak{V}$ — n-мерное векторное комплексное пространство со скалярным произведением, $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — два линейные подпространства пространства $\mathfrak{V}$. Пусть P_i — матрица ортогонального проектирования на $\mathfrak{T}_i$.

В статье доказано, что собственные числа матрицы P_1P_2 неотрицательны, лежат на сегменте $[0,1]$ и по крайней мере $n - \min(\dim \mathfrak{T}_1, \dim \mathfrak{T}_2)$ из них равны нулю. Характеристикой взаимного расположения пространств $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ автор считает упорядоченный по убыванию набор этих собственных чисел, обозначаемый им $\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$. Основной результат статьи таков:

Пусть $\mathfrak{T}_i$ и U_i $(i = 1, 2)$ — подпространства пространства V, $\dim \mathfrak{T}_i = \dim U_i$ $(i = 1, 2)$. Для того чтобы существовало унитарное преобразование Φ со свойством $\Phi\mathfrak{T}_i = U_i$, необходимо и достаточно выполнение условия $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = J(U_1, U_2)$.

В заключение автор дает для фиксированных размерностей подпространств $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ описание подмножества, принадлежащего n-мерному единичному кубу и состоящего из точек $J(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$. В. П. Хавин

7489. Применение логической математики к теории информации. Применение теории групп к логической математике. Комамия (Application of logical mathematics to information theory. Application of theory of groups to logical mathematics. Komamiya Yasuo), Proc. 3rd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1953. Tokio, 1954, 437—442 (англ.)

Рассматривается следующая задача, имеющая значение в теории информации. Пусть матрица (x_{ij}) с m строками и n столбцами имеет в качестве элементов нули и единицы, и пусть

$$(a)\ |x_{i1} - x_{j1}| + |x_{i2} - x_{j2}| + \ldots + |x_{in} - x_{jn}| \geqslant p$$
$$(i \neq j;\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant m;\ 1 \leqslant p \leqslant n).$$

Допустим, что n и p фиксированы. Требуется оценить максимальное число строк m, для которого такая матрица существует. Обозначим это число через m_0.

В первой части статьи автор получает неравенство

$$2 \leqslant m_0 \leqslant 2^{n-p+1}. \qquad (1)$$

При доказательстве логические высказывания, выраженные неравенствами из условия (a), приводятся к конъюнктивной нормальной форме и условие (a) записывается в виде конъюнкции таких форм (Следует заметить, что оценку (1) очень просто получить и непосредственно).

Во второй части автор связывает рассматриваемый вопрос с изучением некоторых конечных групп и доказывает, в частности, что $m_0 = 2^k$, где k — целое. В статье много опечаток и неточностей. Ю. Т. Медведев

7490. К вопросу о расчете перекрытий с несколькими перекрестными связями по методу проф. А. И. Сегаля. Гройсман С. Х., Тр. Моск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 8, 140—141

Согласно методу А. И. Сегаля (РЖМех, 1955, 4560), решение задачи о прочности перекрытия с несколькими перекрестными связями сводится к решению нелинейной системы уравнений:

$$m(a_{11} + m\,a_{12} + n\,a_{13} + r\,a_{14}) =$$
$$= a_{21} + m\,a_{22} + n\,a_{23} + r\,a_{24},$$
$$n(a_{11} + m\,a_{12} + n\,a_{13} + r\,a_{14}) =$$
$$= a_{31} + m\,a_{32} + n\,a_{33} + r\,a_{34},$$
$$r(a_{11} + m\,a_{12} + n\,a_{13} + r\,a_{14}) =$$
$$= a_{41} + m\,a_{42} + n\,a_{43} + r\,a_{44}.$$

Автор показывает, что решение этой системы сводится к решению системы линейных уравнений вида:

$$a_{11} + \bar{m}a_{12} + \bar{n}a_{13} + \bar{r}a_{14} = \lambda,$$
$$a_{21} + \bar{m}\,a_{22} + \bar{n}\,a_{23} + \bar{r}\,a_{24} = \lambda\,\bar{m},$$
$$a_{31} + \bar{m}\,a_{32} + \bar{n}\,a_{33} + \bar{r}\,a_{34} = \nu\,\bar{n},$$
$$a_{41} + \bar{m}\,a_{42} + \bar{n}\,a_{43} + r a_{44} = \lambda\,\bar{r}$$

и характеристического уравнения этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix}.$$

А. Ф. Голубчиков

7491. Использование матриц в методе наименьших квадратов. Пиментел-Гомис (Demonstracao pela

álgebra de matrizes do método Doolittle abreviado. Pimentel Gomes Frederico), Rev. brasil. estatíst., 1956, **17**, № 67, 216—218 (порт.)

С помощью матриц выводится формула для вычисления суммы квадратов отклонений наблюденных величин в методе наименьших квадратов. Э. Апарисио

7492 К. Упрощенный процесс вычисления полной гармонической потенциальной функции для молекулы с помощью частот колебаний. Бродерсен (A simplified procedure for calculating the complete harmonic potential function of a molecule from the vibrational frequencies. Brodersen Svend. Mat.-fys. skr. Kgl. danske vid. selskab, 1957, **1**, № 4, 34 pp., ill.) (англ.)

Гармонические колебания атомов в молекуле определяются заданием двух квадратичных форм—потенциальной энергии $V=\frac{1}{2}S'FS$ и кинетической энергии $T=\frac{1}{2}\dot{S}'G^{-1}\dot{S}$, где F и G — симметрические матрицы, G — положительно определенная, а $\dot{S}$ — столбец из координат. Тогда квадраты частот $\lambda=\omega^2$ определяются из векового уравнения

$$|FG-\lambda E|\equiv(-\lambda)^n+c_1(-\lambda)^{n-1}+\ldots+c_{n-1}(-\lambda)+c_n=0.$$

При определении значений коэффициентов c_k возникают большие вычислительные трудности, поскольку n велико. Показывается, что эти трудности в значительной степени могут быть преодолены, если выбрать специальные «симметрические» координаты, учитывающие симметрию атомов в молекуле и являющиеся линейными комбинациями локальных декартовых координат.

В качестве примера рассматриваются молекулы этилена, ацетилена и этана. Ф. Р. Гантмахер

7493 К. Теория матриц. Гантмахер (Teoria matricilor. Gantmaher F. R. Bucuresti, Ed. Acad. R. P. R., 1957, 60 lei. — Litogr. Vol. 1. 314, III p.; vol. 2. p. 315—576, II, vol. 3. p. 577—871, II), Bibliogr. RPR, 1957, **6**, № 18, 632 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1953, 593).

ГРУППЫ

7494. Узлы и классы подстановок, соответствующих размещениям за круглым столом. Гилберт (Knots and classes of ménage permutations. Gilbert E. N.), Scripta Math., 1957, **22**, № 3-4, 228—233 (англ.)

Любому размещению n мужчин и их жен за круглым столом, где каждый мужчина сидит между двумя женщинами, из которых ни одна не является его женой, соответствует такая подстановка $\begin{pmatrix}1&\ldots&n\\ \alpha_1&\ldots&\alpha_n\end{pmatrix}$, что

$$\alpha_i\not\equiv i,\ i+1\pmod n \text{ (ménage permutation).} \quad (1)$$

(Предполагается, что обход совершается по часовой стрелке; α_i — номер жены мужчины, сидящего справа от женщины с номером i). Эти подстановки в дальнейшем мы будем называть M-подстановками.

Капланский и Риордан (Kaplansky I., Riordan J., Scripta math., 1946, **12**, 113—124) определили число подстановок $\begin{pmatrix}1&\ldots&n\\ \alpha_1&\ldots&\alpha_n\end{pmatrix}$, где точно k элементов α_i не удовлетворяют условию (1).

M-подстановки P и Q назовем эквивалентными, если существует такой цикл C длины n, что $P=C^{-1}QC$. Задача определения числа $T(n)$ классов, эквивалентных между собой M-подстановок, связана с задачей перечисления узлов и поставлена Тейтом (Tait P. G., Scientific paper, Cambridge, 1898). Автор доказывает, что функция Эйлера

$$T(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{n}{d}\right)^d U_d\left(1-\frac{d}{n}\right),$$

$$U_m(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{2m}{2m-k}\binom{2m-k}{k}(m-k)!\,(t-1)^k, \text{ а } \varphi(m)$$

С. Д. Берман

7495. П-факторизация конечных групп. Чунихин С. А., Матем. сб., 1957, **43**, № 1, 49—66

Автор доказывает теоремы из своей ранее опубликованной работы (РЖМат, 1957, 1154). П. А. Гольберг

7496. О факторизации П-отделимых групп. Каргаполов М. И., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 6, 1155—1157

С. А. Чунихин (РЖМат, 1955, 93) доказал следующую теорему: Пусть $m>1$ — наибольший П-силовский делитель порядка g конечной П-отделимой группы G и пусть $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа m. Тогда группу G можно представить в виде произведения $G=P_1P_2\cdot\ldots\cdot P_k$, (1) где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — некоторые подгруппы группы G, имеющие наибольшими П- силовскими делителями своих порядков, соответственно, числа $P_1^{\alpha_1}, P_2^{\alpha_2}, \ldots, P_k^{\alpha_k}$.

В реферируемой работе показано, что можно выбрать попарно перестановочные сомножители произведения (1). (В этом случае совокупность подгрупп разложения (1) автор называет П-отделимой базой группы G).

Основной результат автор переносит на некоторый класс бесконечных групп. П. А. Гольбер

7497. Конечные группы, порядок каждого элемента в которых есть степень простого числа. Хигман (Finite groups in which every element has prime power order. Higman Graham), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 335—342 (англ.)

Группы, изучаемые в реферируемой работе, назовем коротко $\bar{P}$-группами. Автор интересуется строением ненильпотентных $\bar{P}$-групп, исключая, в частности, из рассмотрения конечные P-группы. Сначала дается полное описание разрешимых $\bar{P}$-групп. Оказывается, что они образуют очень узкий класс групп. Например, порядок любой такой группы имеет вид p^aq^b (p, q—простые числа). Класс X_n разрешимых $\bar{P}$-групп с показателем n (порядки всех элементов являются делителями числа n) обладает бернсайдовским свойством, т. е. с точностью до изоморфизма, в X_n содержится только конечное число групп с фиксированным числом k образующих. $\bar{P}$-группы, не являющиеся разрешимыми, имеют более сложное строение. Описание их достигается конкретизацией одной теоремы Холла. Доказывается также, что класс неразрешимых $\bar{P}$-групп с показателем n обладает бернсайдовским свойством, если число n не содержит множителей вида $p^2(kp+1)$, где p и $kp+1$— простые числа. Без этого ограничения на n утверждение, вообще говоря, перестает быть верным. При доказательстве основных теорем автор опирается на свои исследования автоморфизмов группы, оставляющих на месте только единичный элемент (РЖМат, 1958, 2762). В конце статьи отмечается, что некоторые содержащиеся в ней результаты были независимо получены Цакером (РЖМат, 1957, 1152).

А. И. Кострикин

7498. Конечные группы, в которых всякие две подгруппы одинакового порядка изоморфны. Армстронг (Finite groups in which any two subgroups of the same order are isomorphic. Armstrong Ruth), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 1, 18—27 (англ.)

Автор называет конечную группу принадлежащей к классу (C), если в этой группе всякие две подгруппы одинакового порядка изоморфны. Сначала исследуются такие группы порядков p^α и $p^\alpha q^\beta$ (p,q — простые числа). Основным результатом работы являются следующие теоремы:

4,1: Пусть G—конечная разрешимая группа, принадлежащая к классу (C). Тогда G имеет нормальный ряд $1 \leqslant N \leqslant M \leqslant G$, причем группы G/M, M/N, N нильпотентны и порядков попарно взаимно простых.

4.2. Если G—конечная разрешимая группа, принадлежащая к классу (C), то длина ряда коммутантов группы $G \leqslant 4$, причем значение 4 возможно лишь в случае, когда G содержит в качестве подгруппы группу кватернионов. В. К. Туркин

7499. Геометрический образ в пространстве [8], инвариантный относительно группы порядка 51840×81. Хорадам (A locus in [8] invariant under a group of order 51840×81. Horadam A. F.), Quart J. Math., 1957, **8**, № 32, 241—259 (англ.)

Через [8] обозначено комплексное проективное пространство 8 измерений, точка которого задается девятью однородными координатами $x_{00}, x_{01}, \cdots, x_{22}$. Клиффордовыми матрицами, относящимися к пространству [8], называются мономиальные матрицы девятого порядка, у которых элементы, отличные от нуля, являются степенями числа $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, причем эти элементы расположены в матрице следующим образом. Пусть строки и столбцы клиффордовой матрицы $W^{aa'}_{\beta\beta'}$ перенумерованы с помощью двух индексов в соответствии с нумерацией однородных координат пространства [8]; тогда произвольный элемент этой матрицы запишется в виде $\alpha^{\ gg'}_{hh'}$, где верхние индексы указывают строку, а нижние столбец. Расположение в $W^{aa'}_{\beta\beta'}$ элементов, отличных от нуля, дается формулой $\alpha^{\ cc'}_{c+\beta,c'+\beta'} = \varepsilon^{\ ac+a'c'}$ где $c, c' = 0,1,2$ и значения нижних индексов приводятся mod 3. Всего имеется 81 клиффордова матрица, относящаяся к пространству [8]. Совокупность этих матриц образует относительно умножения группу CG (клиффордова группа коллинеаций). Клиффордовой совокупностью называется совокупность каких-либо клиффордовых матриц W_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), для которых выполняется условие $W_s W_r = \varepsilon W_r W_s$ ($r < s$; $r, s = 1,2,3,4,5$,). Основной клиффордовой совокупностью называется совокупность $W^{10}_{00}, W^{10}_{10}, W^{01}_{10}, W^{01}_{11}, W^{00}_{11}$. Совокупность подстановок, переводящих основную клиффордову совокупность в какую-либо другую клиффордову совокупность, составляет группу CS порядка 51840 (клиффордова группа подстановок). Через $C\Gamma$ (клиффордова группа преобразований подобия) обозначается группа порядка 51840×81, у которой фактор-группа по группе CG изоморфна группе CS. Автором найден геометрический образ порядка 45 и размерности 4, инвариантный относительно группы $C\Gamma$. Б. К. Туркин

7500. Некоторые замечания о структуре подгрупп конечной группы. Курцио (Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito. Curzio Mario), Ricerche mat., 1957, **6**, № 1, 96—110 (итал.)

В структуре $\mathfrak{L}(G)$ всех подгрупп конечной группы G рассматриваются следующие подструктуры: $\mathfrak{L}_N(G)$ — структура всех нормальных делителей и $\varphi(G)$ — структура всех композиционных подгрупп группы G. Устанавливаются некоторые теоремы, характеризующие строение G по свойствам указанных подструктур. Структура $\mathfrak{L}_N(G)$ тогда и только тогда является структурой с дополнениями, когда группа G разложима в прямое произведение простых групп. Если в группе G нет различных нормальных делителей одинакового порядка, то структура $\mathfrak{L}_N(G)$ дистрибутивна. Элемент a в структуре R называется $\bigcup$-квазидистрибутивным, если для всех $x, y \in R$ из $a \bigcup x = a \bigcup y$ следует $a \bigcup (x \bigcap y) = (a \bigcup x) \bigcap (a \bigcup y)$. Структура R называется $\bigcup$-квазидистрибутивной, если таковыми являются все ее элементы. Подгруппа A из G называется $\bigcup$-квазидистрибутивной, если она является $\bigcup$-квазидистрибутивным элементом в структуре $\mathfrak{L}(G)$. Дуальным образом определяется $\bigcap$-квазидистрибутивность. Необходимым и достаточным условием $\bigcup$-или $\bigcap$-квазидистрибутивности структуры $L(G)$ является цикличность группы G. Структура $\varphi(G)$ тогда и только тогда структура с дополнениями, когда каждая композиционная подгруппа из G является прямым произведением простых групп. Если $\varphi(G)$ $\bigcup$-или $\bigcap$-квазидистрибутивна, то она также дистрибутивна.

В работе даны также некоторые приложения доказанных результатов к разрешимым и специальным группам. Например, показывается, что в конечной специальной группе G подгруппа A тогда и только тогда $\bigcup$-или $\bigcap$-квазидистрибутивна, когда она является единичной подгруппой данного порядка.

Отметим некоторые опечатки. На стр. 98, в 15 строке сверху, вместо $M \bigcup H$ должно быть $N \bigcap H$; на стр. 102, в 11 строке сверху, вместо $x \subseteq a$ должно быть $x \supseteq a$; на стр. 104, в 5 строке сверху, вместо $x \supseteq a$ должно быть $x \subseteq a$. П. Г. Конторович

7501. Совершенность голоморфов. Переманс (Completeness of holomorphs. Peremans W.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 608—619; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 608—619 (англ.)

Совершенная группа — это группа без центра и внешних автоморфизмов. Доказывается, что группа G тогда и только тогда является прямым множителем в своем голоморфе, когда она совершенна или является прямым произведением совершенной группы без подгрупп индекса 2 и группы второго порядка.

Если G — абелева группа, в которой отображение $x \to 2x$ есть автоморфизм, то голоморф группы G тогда и только тогда не является совершенной группой, когда группа G распадается в такую прямую сумму групп B и C, что: 1) $B \neq 0$; 2) группа гомоморфизмов группы C в группу B ($\mathrm{Hom}(C,B)$) равна нулю; 3) существует изоморфизм $x \to \delta(x)$ группы B и $\mathrm{Hom}(B,C)$; 4) существует функция $f(x)$ ($x \in B$, $f(x) \in B$), удовлетворяющая условиям $\delta(y) f(x) = \delta(x) \cdot y$ для всех $x, y \in B$.

Отсюда выводится, что если G — абелева группа и отображение $x \to 2x$ в ней является автоморфизмом, то голоморф G является совершенной группой, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: A) G не разложима в прямую сумму; B) G разлагается в прямую сумму циклических групп; C) G — полная группа. Б. И. Плоткин

7502. Теоремы вложения для бесконечных групп. Брёйн (Embedding theorems for infinite groups. Bruijn N. G. de), Proc. Konikl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 560—569; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 560—569 (англ.)

Исследуется вопрос о возможности вложения одних бесконечных групп в другие.

Пусть $\mathfrak{Q}$ и H — группы, N — множество мощности $\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — конечное или бесконечное кардинальное число. Пусть для каждого $\alpha \in N$ в $\mathfrak{Q}$ имеется подгруппа $H_\alpha = \chi_\alpha(H)$, изоморфная группе H. Пусть Γ — конечное подмножество множества N, состоящее из элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$; через G_Γ обозначается группа, порождаемая всеми подгруппами H_{γ_i}. Если множество N содержит в себе совокупность натуральных чисел, то группа G_Γ, порождаемая подгруппами $H_1, \ldots, H_k$, обозначается через G_k.

Автор называет условием симметрии следующее условие: для всякого подмножества Γ и всякого отображения $\varphi(\Gamma)$ множества Γ в N можно подобрать такой гомоморфизм $\psi_{\Gamma,\varphi}$ группы G_Γ, для которого

$$\psi_{\Gamma,\varphi} x_\gamma(h) = \chi_{\varphi(\Gamma)}(h) \quad (h \in H,\ \gamma \in \Gamma).$$

Если группа $\mathfrak{Q}$ порождается группами H_α, причем выполняется условие симметричности, то группа $\mathfrak{Q}$ называется симметрически порождаемой $\mathfrak{n}$ группами H_α.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 3,1: Пусть $\mathfrak{w}$ — бесконечное кардинальное число и $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{w}}$. Если группа $\mathfrak{Q}$ симметрически порождается $\mathfrak{n}$ группами H и если для каждого натурального k группа G_k может быть вложена в фиксированную группу S, то $\mathfrak{Q}$ может быть вложена в $S^{\mathfrak{w}}$ (неограниченное прямое произведение $\mathfrak{w}$ групп S).

С помощью этой теоремы доказаны следующие теоремы о вложениях, относящиеся к бесконечным симметрическим группам подстановок $\Sigma_{\mathfrak{w}}$ ($\mathfrak{w}$ — мощность множества символов, над которыми осуществляются подстановки):

Теорема 4,1: Если $\mathfrak{w}$ — бесконечное кардинальное число, то прямое произведение $\mathfrak{Q}$ $2^{\mathfrak{w}}$ групп $\Sigma_{\mathfrak{w}}$ может быть вложено в $\Sigma_{\mathfrak{w}}$.

Теорема 4,2: Если $\mathfrak{w}$ — бесконечное кардинальное число, то свободное произведение $\mathfrak{Q}2^{\mathfrak{w}}$ групп $\Sigma_{\mathfrak{w}}$ может быть вложено в $\Sigma_{\mathfrak{w}}$.

Теорема 4,3: Если $\mathfrak{w}$ — бесконечное кардинальное число, то всякая абелева группа порядка $2^{\mathfrak{w}}$ может быть вложена в $\Sigma_{\mathfrak{w}}$.

Даны также примеры групп, которые не могут быть вложены в $\Sigma_{\mathfrak{w}}$ (теорема 5,1). В. К. Туркин

7503. Две теоремы о приводимых нильпотентных группах. Супруненко Д. А., Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1957, вып. 2, 255—259

Через $GL(n,P)$ обозначается полная линейная группа над алгебраически замкнутым полем P любой характеристики и доказываются две следующие теоремы:

1) Если нильпотентная подгруппа Γ группы $GL(n,P)$ состоит из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ 0 & c_g \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $g \to a_g$ и $g \to c_g$ — неприводимые неэквивалентные представления группы Γ, то группа Γ вполне приводима.

2. Если нильпотентная подгруппа Γ группы $GL(n,P)$ состоит из матриц вида (1), где $g \to a_g$ — неприводимое представление группы Γ, то матрицы g из группы Γ одновременно приводятся к виду

$$g = \begin{pmatrix} a_g & \lambda a_g \\ 0 & a_g \end{pmatrix}, \quad \lambda \in P.$$

А. Х. Лившиц

7504. Классификация модулярных групп. Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 1, 19—22

Дано описание модулярных групп, связанных с алгебрами умножений римановых матриц. Как известно, матрица ω из p строк и $2p$ столбцов называется римановой, если существует такая рациональная кососимметрическая матрица R_0 порядка $2p$, что $\omega R_0 \omega' = 0$, $i\omega R_0 \omega' > 0$. Квадратная рациональная матрица A определяет умножение римановой матрицы ω, если существует такая комплексная матрица α, что $\alpha\omega = \omega A$.

Пусть $\mathfrak{A}$ алгебра умножений некоторой римановой матрицы, инволюция в которой задается с помощью некоторой кососимметрической матрицы R_0. Модулярной группой $\Gamma_{\mathfrak{A},R_0}$ называется совокупность таких целочисленных матриц U, что $UR_0U' = R_0$ и $UA = AU$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра с делением над полем рациональных чисел с инволюцией $a \to a^\sigma$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_m$ матриц порядка m с элементами из $\mathfrak{A}$. В этой алгебре можно ввести инволюцию $A = (a_{ks}) \to A^\sigma = (b_{ks})$, где $b_{ks} = a^\sigma_{sk}$. Матрицу H условимся называть кососимметрической, если $H^\sigma = -H$. В алгебре $\mathfrak{A}_m$ выделим некоторое кольцо целых элементов и рассмотрим совокупность Δ таких элементов A этого кольца, что $A^\sigma HA = H$.

Устанавливается, что всякая модулярная группа соизмерима с произведением групп, полученных указанной выше конструкцией. А. О. Гельфонд

7505. О структуре полугрупп с полуторным делением. Кон (On the structure of sesquilateral division semigroups. Cohn P. M.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 31, 466—480 (англ.)

Полугруппа с полуторным делением, не являющаяся группой, названа в работе d-полугруппой (РЖМат, 1957, 1180), Если φ — отличный от изоморфизма гомоморфизм d-полугруппы S, то φS является группой. Для всякой d-полугруппы S существует такой гомоморфизм $\bar{\varphi}$, что при любом гомоморфизме φ полугруппы S, не являющемся изоморфизмом, группа φS является гомоморфным образом группы $G = \bar{\varphi} S$. Группа G называется группой, ассоциированной с полугруппой S.

Будем писать $a < b$ $(a, b \in S)$, если существует такой элемент $c \in S$, что $a = bc$. Отношение $<$ является регулярным слева и сокращаемым слева (РЖМат, 1956, 240) в d-полугруппе S, причем S является линейно упорядоченной и плотной в себе относительно порядка $<$. Рассмотрены некоторые другие свойства полугруппы S относительно упорядоченности, а также гомоморфизмы в группу полугруппы T, погружаемой в d-полугруппу.

Группа G тогда и только тогда ассоциирована с некоторой d-полугруппой, когда G линейно упорядочена слева. Каждая d-полугруппа S может быть погружена в простую d-полугруппу (РЖМат, 1956, 3693).

Примечание референта. Теоремы 2, 2—2, 4 являются частным случаем результатов референта (РЖМат, 1956, 7161).

Л. М. Глускин

7506. Теория построения конечных полугрупп. II. Композиции полугрупп и конечные S-разложимые полугруппы. Тамура (The theory of construction of finite semigroups. II. Compositions of semigroups, and finite s-decomposable semigroups. Tamura Takayuki), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 1, 1—42 (англ.)

I ч. см. РЖМат, 1958, 143. Полугруппа S называется композицией своих непересекающихся подполугрупп S_τ, если S_τ являются классами в каком-нибудь s-разложении полугруппы S. Всякая композиция S двух произвольных полугрупп S_0 и S_1 может быть получена следующим

образом. Пусть Φ_0 (Ψ_0) — подполугруппа полугруппы Φ (Ψ) левых (правых) сдвигов (РЖМат, 1957, 6176) полугруппы S_0, причем $\varphi\psi=\psi\varphi$ и $x(\varphi y)=(\psi x)y$ для любых $\varphi\in\Phi_0$, $\psi\in\Psi_0$, $x,y\in S_0$; отображение $\alpha\to\varphi_\alpha$ — гомоморфизм S_1 в Φ_0, а отображение $\alpha\to\psi_\alpha$ — обратный гомоморфизм S_1 в Ψ_0 ($\Psi_\alpha\Psi_\beta=\Psi_{\beta\alpha}$ для любых $\alpha,\beta\in S_1$). Тогда для любых $x\in S_0, \alpha\in S_1$ действие в S определяется как $X_\alpha=\psi_\alpha(X)$, $\alpha x=\varphi_\alpha(x)$. Детально рассмотрены случаи, когда $\varphi_\alpha=\psi_\alpha$ для любого $\alpha\in S_1$, в частности, когда S коммутативна или S_1 содержит единицу. Описание композиций полугрупп связано с результатами Клиффорда о расширении полугрупп (Clifford A. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, № 2, 165—173).

Значительная часть работы посвящена исследованию полуструктур, т. е. коммутативных полугрупп, все элементы которых идемпотентны. Доказано, что полугруппа Φ всех сдвигов полуструктуры S также является полуструктурой. Полугруппа всех внутренних сдвигов (РЖМат, 1957, 6176) полуструктуры S изоморфна S. Если S конечна, то Φ является структурой. Если при этом S — структура, то Φ изоморфна S. Дано полное описание всех стабильных эквивалентностей на конечной полуструктуре S. Изложены два метода построения конечных полуструктур. Один из них — построение всех полуструктур с числом элементов n, если известны все полуструктуры с числом элементов $<n$; другой — аналогичная индукция по длине цепей полуструктуры.

Приведен ряд условий, при которых существует композиция S данного множества полугрупп S_τ, s-гомоморфный образ которой изоморфен данной полуструктуре T. В частности, такая композиция всегда существует, если T — цепь (например, если T содержит точно два элемента).

Доказано, что всякая конечная s-разложимая полугруппа S может быть представлена в виде композиции s-неразложимых полугрупп S_τ. Даны условия, при которых две композиции s-неразложимых полугрупп изоморфны. Приведены примеры. Л. М. Глускин

7507. О структуре полугруппы мер конечной полугруппы. Шварц (On the structure of the semigroup of measures on a finite semigroup. Schwarz Stefan), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 3, 358—373 (англ.; рез. русск.)

Пусть S — конечная полугруппа. Неотрицательная аддитивная функция μ, определенная на подмножествах полугруппы S, называется мерой полугруппы S, если $\mu(S)=1$. Множество $\mathfrak{M}(S)$ всех мер полугруппы S является полугруппой относительно действия $\mu_1*\mu_2(x)=\Sigma_{uv=x}\mu_1(u)\cdot\mu_2(v)$ ($u,v,x\in S$; $\mu_1,\mu_2\in\mathfrak{M}(S)$).

В работе предполагается, что множество $\mathfrak{A}$ всех инвариантных справа мер полугруппы (S) (РЖМат, 1958, 2745) не пусто. Доказано, что полугруппа $\mathfrak{M}(S)$ содержит, и притом единственный, минимальный левый идеал $\mathfrak{L}$. Идеал $\mathfrak{L}$ содержит множества $\mathfrak{A}$. Каждый элемент из $\mathfrak{L}$ является минимальным правым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}(S)$.

Пусть $C(\mu)$ — множество всех элементов $x\in S$, для которых $\mu(x)\neq 0$; $N=\Sigma_\alpha G_\alpha$ — минимальный идеал полугруппы S (G_α — максимальные подгруппы полугруппы S). Для того чтобы $\mu\in\mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $C(\mu)\subseteq N$ и чтобы $\mu(x)=\mu(y)$ для любых двух элементов x, y из одной и той же подгруппы G_α. Элемент $\pi\in\mathfrak{L}$ тогда и только тогда содержится в $\mathfrak{A}$, когда $C(\pi)\in\in\bigwedge/[S/N)S]$. В частности, $\mathfrak{L}=\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда S является полугруппой с левым делением. Получен ряд других свойств полугруппы $\mathfrak{M}(S)$, для которой множество $\mathfrak{A}$ не пусто. Л. М. Глускин

7508. Замечания к разложению и построению конечных группоидов. Мантёйффель (Bemerkung zur Zerlegung und Erzeugung endlicher Gruppoide. Manteuffel Karl), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, **1**, № 1, 1—2 (нем.)

Группоид Брандта ранга r и порядка g (Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, ОНТИ, Харьков—Киев, 1937, гл. 5) представляется в виде прямого произведения группы порядка g и группоида порядка 1 ранга r. Л. М. Глускин

7509. Односторонние базы и сдвиги полугруппы. Тамура (One-sided bases and translations of a semigroup. Tamura Takayuki), Math. japon., 1955, **3**, № 4, 137—141 (англ.)

Если среди подмножеств X полугруппы S, удовлетворяющих условию $SX\cup X=S$, существует минимальное (по включению) множество A, то оно называется правой базой полугруппы S. Пусть S — полугруппа, обладающая правой базой A, φ — такое однозначное отображение A в S, что для любых $x,y\in S$, $a,b\in A$: 1) из $xa=yb$ следует $x\bar{\varphi}(a)=y\bar{\varphi}(b)$, 2) из $xa=a$ следует $x\bar{\varphi}(a)=\bar{\varphi}(a)$. Тогда отображение $\bar{\varphi}(a)=\varphi(a)$, $\varphi(xa)=x\varphi(a)$ ($a\in A$, $x\in S$), является правым сдвигом (РЖМат, 1957, 6176) полугруппы S. Всякий правый сдвиг полугруппы S может быть получен указанным выше образом. Рассмотрены некоторые другие свойства полугрупп, обладающих правыми базами. Л. М. Глускин

7510. О существовании и единственности решения уравнения общего вида в связи с обратимостью в полугруппах преобразований. Ляпин Е. С., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 552—555

Элемент s полугруппы A называется обратимым слева, если для любого $a\in A$ в A разрешимо уравнение $xs=a$. Аналогично определяется и обратимость справа. Пусть A_l — множество элементов из A, обратимых слева, но необратимых справа; A_r — множество элементов, обратимых справа, но необратимых слева; A_0 — множество элементов, необратимых ни слева, ни справа. A_1 — множество элементов обратимых слева и справа. Все эти четыре множества являются подполугруппами A. Если $xy\in A_1$ (x, $y\in A$), то или x, $y\in A_1$, или $x\in A_r$, $y\in A_l$. Все левые увеличительные элементы полугруппы A (РЖМат, 1954, 2041) содержатся в A_r. В полугруппе с единицей всякий элемент $a\in A_r$ является левым увеличительным.

Пусть A — правильная относительно обратимости справа полугруппа преобразований множества Ω (т. е. всякий элемент $s\in A$ обратим справа в A только тогда, когда он обратим справа в полугруппе S_Ω всех отображений множества Ω в себя). Для того, чтобы уравнение $s\xi=a$ ($s\in A$) относительно известного ξ было разрешимо при любом $\alpha\in\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы s был обратимым справа элементом полугруппы A. Если A правильна относительно обратимости слева, то для единственности решения уравнения $s\xi=\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы S был обратимым слева элементом полугруппы A. Полугруппа $M\Gamma$ всех изотонных отображений частично упорядоченного множества Γ правильна относительно обратимости справа. Приведено достаточное условие, при котором она правильна относительно обратимости слева.

Пусть A — полугруппа с единицей, A/A_1 — ее подполугруппа, отличная от A; A называется полугруппой с отделяющейся групповой частью. Для того чтобы A была полугруппой с отделяющейся групповой частью, необходимо и достаточно, чтобы $A=B\bigcap C$, где B — группа, а C — левый или правый идеал полугруппы A. Если подполугруппа B полугруппы с отделяющейся групповой частью A содержит единицу полугруппы A, то она сама является полугруппой с отделяющейся групповой частью. Всякая полугруппа с единицей, изоморфно представимая матрицами, является полугруппой с отделяющейся групповой частью.

Приведены и другие теоремы о полугруппах с отде-

ляющейся групповой частью. Доказательств статья не содержит. Л. М. Глускин

7511. Идеалы в ассоциативных системах. Гардашник (Ідеали в асоціативних системах. Гардашнік М. Ф.), Наук. зап. Полтавськ. держ. пед. ін-т, 1955, 8, 57—60 (укр.)

Даны два достаточных условия, при которых полугруппа является группой. Л. М. Глускин

7512. Полугомоморфизмы групп. Скотт (Half-homomorphisms of groups. Scott W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1141—1144 (англ.)

Однозначное отображение φ полугруппы S называется полугомоморфизмом, если $\varphi(ab)=\varphi a\cdot\varphi b$ или $\varphi b\cdot\varphi a$ для любых $a, b\in S$. Если $\varphi(ab)=\varphi b\cdot\varphi a$ для любых $a, b\in S$, то φ называется антигомоморфизмом. Полугомоморфизм, являющийся изоморфизмом, называется полуизоморфизмом. В работе доказано, что всякий полуизоморфизм полугруппы с сокращением в полугруппу с сокращением является либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом. Всякий полугомоморфизм группы в группу является гомоморфизмом или антигомоморфизмом.

Л. М. Глускин

7513. Заметка о представлениях инверсных полугрупп. Престон (A note on representations of inverse semigroups. Preston G. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1144—1147 (англ.)

Всякая инверсная полугруппа S (РЖМат, 1957, 169) может быть гомоморфно представлена полугруппой взаимно однозначных частичных преобразований множества своих элементов. В отличие от цитированной выше статьи автора, в качестве отображаемых подмножеств используются подполугруппы eSe, где e — идемпотент из S. Л. М. Глускин

7514. Заметка о слабо разбивающих точках в кланах. Кох (Note on weak cutpoints in clans. Koch R. J.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 611—615 (англ.)

Кланом называется бикомпактный связной моб с единицей (РЖМат, 1956, 5124). Элемент a континуума X называется слабо разбивающей точкой, если существуют $x, y\in X\setminus a$ такие, что всякий подконтинуум X, содержащий x и y, содержит и a. Для элемента $p\in X$ через T_p обозначено множество всех $x\in X$ таких, что если x — внутренняя точка некоторого континуума M, то $p\in M$.

Пусть S — клан с единицей u, H_u — максимальная подгруппа S, имеющая u единицей, C_u — компонента единицы в H_u.

Доказано, что если S не группа, то T_u является нормальным делителем группы H_u и C-множеством (РЖМат, 1956, 5742). Если $T_u\neq u$, то T_u совпадает с C_u. Если S одномерен или однороден, то u не является слабо разбивающей точкой. Л. М. Глускин

7515. n-Мерный куб как произведение полугрупп. Шилдс (The n-cube as a product semigroup. Shields Allen), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 165—166 (англ.)

Пусть I_k ($k=1,2,\ldots,n$) — топологические полугруппы гомеоморфные отрезку, в каждой из которых ее границы являются соответственно нулем и единицей; S и T — две топологические полугруппы, гомеоморфные n-мерному шару, причем T топологически изоморфна прямому произведению полугрупп $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Доказана теорема: Если существует такой гомеоморфизм φ границы C полугруппы T на границу полугруппы S, что $\varphi c\cdot\varphi d=\varphi(cd)$, если $c, d, cd\in C$, то полугруппы S и T топологически изоморфны. Л. М. Глускин

7516. Простые идеалы и идемпотенты в компактных полугруппах. Нумакура (Prime ideals and idempotents in compact semigroups. Numakura Katsumi), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 671—680 (англ.)

Левый (правый, двусторонний) идеал P полугруппы S называется простым, если для любых идеалов $A, B\subset S$ из $AB\subset P$ следует $A\subset P$ или $B\subset P$. Пусть S — моб (РЖМат, 1956, 5124), содержащий ядро (РЖМат, 1957, 2041). Левый (правый, двусторонний) идеал моба S называется нильпотентным, если для всякого открытого множества U, содержащего ядро K, $A^n\subset U$ при некотором n. Объединение всех нильпотентных идеалов S называется радикалом моба S.

Всюду в дальнейшем S — бикомпактный моб. Доказано, что радикал S совпадает с пересечением всех открытых простых идеалов и с пересечением всех открытых простых левых (правых, двусторонних) идеалов, содержащих K.

Обозначим через $I_0(A)$ объединение всех идеалов S, содержащихся в множестве A. Основным результатом статьи является следующая теорема: Каждый собственный открытый простой идеал $P\subset S$ имеет вид $P=I_0(S\setminus e)$, где e — идемпотент, не содержащийся в K. Обратно, для каждого идемпотента $e\notin K$ множество $I_0(S\setminus e)$ является открытым простым идеалом.

В заключение рассмотрены простые идеалы бикомпактного моба S, в котором двусторонне-идеальные компоненты являются левоидеальными компонентами (РЖМат, 1957, 1177). Л. М. Глускин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

7517. Конечно порожденные расширения дифференциальных полей. Кон (Finitely generated extensions of difference fields. Cohn Richard M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 3—5 (англ.)

Пусть J, H, K — дифференциальные поля и $J\subseteq H\subseteq K$. Доказывается, что если дифференциальное поле K является конечно порожденным расширением дифференциального поля J, то и дифференциальное поле H является конечно порожденным расширением дифференциального поля J. А. Х. Лившиц

7518. Специализации над дифференциальными полями. Кон (Specializations over difference fields. Cohn Richard M.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, Suppl., № 2, 887—905 (англ.)

Два расширения дифференциального поля F называются совместимыми, если они могут быть изоморфно вложены в некоторое расширение одного из них. Доказываются теоремы:

1. Если F — дифференциальное поле и

$$H=F<\beta_1,\ldots,\beta_q;\ \gamma_1,\ldots,\gamma_p>$$

— его расширение, причем степень дифференциальной трансцендентности дифференциального поля $G=F<\beta_1,\ldots,\beta_q>$ над дифференциальным полем F равна q, то существует такой ненулевой элемент δ дифференциального поля $F<\beta_1,\ldots,\beta_q>$, что каждая специализация $\bar\beta_1,\ldots,\bar\beta_q$ над дифференциальным полем F элементов $\beta_1,\ldots,\beta_q$, обладающая следующими свойствами:

а) $F<\bar\beta_1,\ldots,\bar\beta_q>$ и H — совместимые расширения дифференциального поля F;

б) специализация элемента δ не нулевая может быть продолжена до специализации $\bar\beta_1,\ldots,\bar\beta_q,\ \bar\gamma_1,\ldots,\bar\gamma_p$ над дифференциальным полем F элементов $\beta_1,\ldots,\beta_q,\gamma_1,\ldots,\gamma_p$.

2) В дифференциальном поле $F\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$, являющимся расширением дифференциального поля F существует такой элемент $\gamma=0$, что если $\bar\gamma_1,\ldots,\bar\gamma_n$ — некоторая специализация над дифференциальным полем F элементов $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ и соответствующая специализация элемента γ не нулевая, то $F<\gamma_1,\ldots,\gamma_n>$ и $F<\bar\gamma_1,\ldots,\bar\gamma_n>$ — совместимые расширения дифференциального поля F.

А. Х. Лившиц

7519. О пересечениях компонент дифференциального полинома. Кон (On the intersections of the components of a difference polynomial. Cohn Richard M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 42—45 (англ.)

Компонентой дифференциального многообразия называется максимальное неприводимое его подмногообразие. Сепарантой дифференциального полинома относительно неопределенного y называется его частная производная по производной неопределенного y наивысшего порядка из входящих в полином. Доказывается теорема: Общие решения двух различных компонент многообразия дифференциального полинома аннулируют сепаранты полинома. А. Х. Лившиц

7520. Одна задача дифференциальной алгебры, возникающая из математической статистики. Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 169—170

Постановка проблемы.

7521. Тензорные произведения полупримарных алгебр. Розенберг, Зелинский (Tensor products of semiprimary algebras. Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 555—559 (англ.)

Алгебра A (над полем F) называется алгеброй типа SP_i, где $i=1, 2, 3$, если существует такой идеал N, что фактор-алгебра A/N полупроста (и удовлетворяет условию минимальности), причем идеал N квазирегулярен, если $i=1$, является нильидеалом, если $i=2$, и нильпотентен, если $i=3$. Доказано, что если тензорное произведение двух алгебр принадлежит к типу SP_i $i=1, 2, 3$, то один из множителей либо также принадлежит типу SP_i, либо является соответственно квазирегулярной, ниль- или нильпотентной алгеброй. В частности, если произведение $A\otimes A^*$, где A^* — алгебра антизоморфная алгебре A, принадлежит типу SP_i, то и A принадлежит к этому же типу. Обратное верно, если $i=3$ и алгебра A/H конечномерна. М. М. Постников

7522. Группы гомологий нильпотентных алгебр. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 6, 1066—1069

Пусть N—нильпотентная алгебра ранга r над полем k произвольной характеристики, b_n—ее числа Бетти, т. е. ранга групп $H^n(N;\kappa)$ (предполагается, что N тривиально действует в k) и $R_N(t)=\sum_n b_n t^n$—ее ряд Пуанкаре. Намечено доказательство следующих утверждений: а) функция $\frac{1}{R_N(t)}-1$, соответствующая прямой сумме $N=N_1+N_2$ нильпотентных алгебр N_1 и N_2, равняется сумме аналогичных функций, соответствующих слагаемым; б) ряд $\frac{R_N(t)}{1+t}$ мажорирует ряд $\frac{1}{1-t^2}$, так как $b_n>0$ для всех n; в) ряд $R_N(t)$ мажорируется рядом $\frac{1}{1-rt}$, г) если поле k конечно, а числа b_n ограничены в совокупности, то функция $R_N(t)$ рациональна. Эти результаты применимы, в частности, и к когомологиям конечных p-групп над полем Z_p, так как для любой такой группы G группа $H^n(G,Z_p)$ совпадает с группой когомологий радикала ее групповой алгебры. При этом утверждение в) можно усилить. Именно, оказывается, что ряд Пуанкаре группы порядка p^v мажорируется рядом $\frac{1}{(1-t)^v}$. Рассмотрено несколько примеров, причем функция $R_N(t)$ каждый раз оказывается рациональной. В связи с этим высказывается предположение, подкрепляемое утверждением г), что этот факт имеет общий характер. М. М. Постников

7523. Кольца частных. Целые элементы. Теоремы Крулля. Лафон (Anneaux de fractions. Eléments entiers. Théorèmes de Krull. Lafon J.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. École norm. supér., 1955—1956, **8**, № 1, 1—12 (франц.)

Первое сообщение на семинаре Картана и Шевалле, посвященное абстрактной алгебраической геометрии. Рассматриваются элементарные понятия теории коммутативных колец (кольца частных, локальные кольца целые элементы, кольца оценок и т. п.). Доказаны следующие теоремы: 1) локальное подкольцо A поля K тогда и только тогда максимально (не содержится ни в каком более «высоком» локальном кольце, т. е. в локальном подкольце, максимальный идеал которого содержит максимальный идеал кольца A), когда оно является кольцом оценки поля K (т. е. $x^{-1}\in A$ для любого элемента $x\in K\setminus A$); 2) целозамыкание (в поле K) некоторого кольца $A\subset K$ совпадает с пересечением всех колец оценки поля K, содержащих кольцо A; 3) если целозамыкание подкольца A области целостности A^1 совпадает с A^1, то для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует в кольце A^1 такой простой идеал $\mathfrak{p}'$, что $\mathfrak{p}'\cap A=\mathfrak{p}$; кроме того, если $\mathfrak{M}'\cap A=0$, где $\mathfrak{M}'$—идеал кольца A', то $\mathfrak{M}'=0$; в случае если область целостности A' целозамкнута, для любых простых идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ кольца A, удовлетворяющих условию $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$, и любого простого идеала $\mathfrak{q}'$ кольца A', для которого $\mathfrak{q}'\cap A=\mathfrak{q}$, в кольце A' существует такой простой идеал $\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{q}'$, что $\mathfrak{p}'\cap A=\mathfrak{p}$.

В дополнении введено (для любых, вообще говоря, некоммутативных, колец) понятие радикала, как пересечения всех левых (или правых) максимальных идеалов. М. М. Постников

7524. Нетеровы кольца. Лафон (Anneaux noethériens. Lafon J.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, **8**, № 2, 1—9 (франц.)

Второе сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7423). Рассматриваются элементарные свойства нетеровых модулей (т. е. модулей с условием максимальности для подмодулей) и нетеровых колец (т. е. коммутативных колец с условием максимальности для идеалов). В частности, доказываются теорема Гильберта (кольцо многочленов над нетеровым кольцом нетерово), теорема Крулля-Артина (для любого идеала $\mathfrak{N}$ нетерова кольца A и любого подмодуля P нетерова A-модуля N существует такое целое $h\geq 0$, что $(\mathfrak{N}^nN)\cap P=\mathfrak{N}^{n-h}((\mathfrak{N}^hN)\cap P)$ для всех $n\geq h$) и некоторые ее следствия (например, следующее: для любого нетерова модуля M над нетеровым кольцом A имеет место соотношение $\bigcap_n(r^nM)=0$, где r—радикал кольца A). Специальное внимание уделяется простым идеалам. В частности, доказывается, что для любого идеала $\mathfrak{A}$ нетерова кольца A среди всех простых идеалов, содержащих идеал $\mathfrak{A}$, имеется конечное число минимальных. Если кольцо A является областью целостности, целозамкнутой в своем поле частных K и $\mathfrak{A}=(x)$, где $x\neq 0$, то любой простой идеал $\mathfrak{P}$, минимальный среди всех простых идеалов, содержащих идеал $\mathfrak{A}$, будет минимальным идеалом кольца A; кроме того, максимальный идеал $\mathfrak{P}A_{\mathfrak{P}}$ локального кольца $A_{\mathfrak{P}}$ будет главным идеалом (порожденным некоторым элементом из $\mathfrak{P}$), кольцо $A_{\mathfrak{P}}$ будет степенью идеала $\mathfrak{P}A_{\mathfrak{P}}$. М. М. Постников

7525. Аффинные алгебраические многообразия. Картан (Variétés algébriques affines. Cartan H.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. École norm. supér., 1955—1956, **8**, № 3, 1—2 (франц.)

Третье сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523, 7524). Рассматриваются элементарные свойства аффинных алгебраических многообразий (термин «многообразие» автор применяет, в отличие от референта, только по отношению к неприводимым многообразиям) и их связи с полиномиальными идеалами. В частности, доказывается теорема Гильберта о корнях. Следующим образом вводится понятие абстрактного аффинного алгебраического многообразия: пусть

k—некоторое поле, содержащееся в алгебраически замкнутом поле K; множество V, рассматриваемое вместе с некоторой k-алгеброй A, элементами которой являются K-значные функции, определенные на V, называется абстрактным многообразием, если для любого k-гомоморфизма $f:A\to K$ существует и притом только одна, такая точка $x\in V$, что $f(u)=u(x)$ для любой функции $u\in A$. Абстрактное многообразие V называется неприводимым, если алгебра A является областью целостности. В этом случае поле частных алгебры A обозначается через $F(V)$ и называется полем функций на многообразии V. Очевидно, что аффинные многообразия являются в этом смысле абстрактными аффинными многообразиями, причем класс алгебр A, соответствующих неприводимым аффинным многообразиям, совпадает с классом k-алгебр конечного типа (т. е. имеющим конечное число образующих), являющихся областями целостности. Алгебры этого класса автор называет аффинными k-алгебрами. Любая такая алгебра однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет соответствующее абстрактное неприводимое многообразие. Естественным образом вводится понятие регулярного отображения (в терминологии автора, морфизма) абстрактных алгебраических многообразий. Совокупность всех абстрактных многообразий и их морфизмов образует, очевидно, категорию в смысле Эйленберга и Маклейна), причем $V\to V'$ находятся во взаимно однозначном соответствии с k-гомоморфизмами $A'\to A$. Естественным образом определяется понятие (неприводимого) подмногообразия абстрактного многообразия и доказывается, что подмногообразия многообразия V находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми идеалами алгебры A. Для любого подмногообразия W неприводимого многообразия V определяется соответствующее локальное кольцо, как кольцо $A_{\mathfrak{O}}$, где $\mathfrak{P}$ — простой идеал, соответствующий подмногообразию W. Фактор-кольцо $A_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}A_{\mathfrak{P}}$ кольца $A_{\mathfrak{P}}$ по его максимальному идеалу $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{P}}$ естественно отождествляется с полем $F(W)$. На произвольном абстрактном многообразии V вводится топология Зариского, замкнутыми множествами которой являются содержащиеся в V абстрактные (вообще говоря, приводимые) многообразия. В этой топологии любой морфизм является непрерывным отображением. Для любого морфизма $\mu:V\to V'$ замыкание $\varphi(V)$ его образа в V' является многообразием, алгеброй A которого служит образ соответствующего гомоморфизма $g:A'\to A$. Если V неприводимо, то $\varphi(V)$ неприводимо. Гомоморфизм g тогда и только тогда является мономорфизмом, когда $\varphi(V)=V'$. В этом случае мономорфизм g индуцирует мономорфизм $\bar{g}:F(V')\to F(V)$ полей функций. Мономорфизм $\bar{g}$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда существуют такие открытые специальные множества $V0\subset V$ и $V_0'\subset V'$, что φ определяет изоморфное отображение $V_0\to V_0'$ (открытое подмножество $V_0\subset V$ называется специальным, если в алгебре A существует такой элемент $u\neq 0$, что $u(x)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $x\in V_0$; специальное множество является абстрактным многообразием, алгеброй A которого служит подалгебра поля $F(V)$, порожденная алгеброй A, соответствующей многообразию V, и элементом u^{-1}). Для любых абстрактных многообразий V и W прямое произведение $V\times W$ естественным образом определяется как абстрактное многообразие (соответствующая алгебра A является фактор-алгеброй тензорного произведения $A\otimes_k B$, где A и B—алгебры, соответствующие многообразиям V и W, соответственно по идеалу, состоящему из всех нильпотентных элементов). Доказывается, что если поле k алгебраически замкнуто, то прямое произведение неприводимых многообразий также является неприводимым многообразием. Подмногообразия (вообще говоря, приводимые) произведения $V\times W$ называются, как обычно, соответствиями между V и W. Если соответствие Γ неприводимо, то подмногообразия $V_1=\overline{p_1(\Gamma)}$ и $W_1=\overline{p_2(\Gamma)}$, где p_1 и p_2—естественные морфизмы $V\times W\to V$ и $V\times W\to W$, неприводимы. Пусть $A(V_1)$, $A(W_1)$ и $A(\Gamma)$—алгебры A-многообразий V_1, W_1 и Γ соответственно и пусть $g_1:A(V_1)\to A(\Gamma)$, $g_2:A(W_1)\to A(\Gamma)$—гомоморфизмы, индуцированные морфизмами p_1 и p_2. Если $V_1=V$, а отображение $\bar{g}:F(V\to F(\Gamma)$ изоморфно, то соответствие Γ называется функцией, определенной на V и принимающей значения в W. В этом случае на некотором специальном открытом множестве $V_0\subset V$ соответствие Γ определяет морфизм $V_0\to W$ (вообще говоря не продолжающийся на все V). Обратное утверждение также, очевидно, справедливо. Если $V_1=V$ и $W_1=W$, то отображения g_1 и g_2 определяют вложения полей $F(V)$ и $F(W)$ в поле $F(\Gamma)$. Обратно, любое вложение полей $F(V)$ и $F(W)$ в одно и то же поле Q определяет некоторое соответствие Γ, для которого $V_1=V$ и $W_1=W$. Подмногообразия $V'\subset V$ и $W'\subset W$ тогда и только тогда соответствуют друг другу при таком соответствии Γ (т. е. существует такое подмногообразие $\Gamma'\subset\Gamma$, что $V'=\overline{p_1(\Gamma')}$ и $W'=\overline{p_2(\Gamma')}$), когда локальные кольца этих подмногообразий можно включить в одно и то же локальное подкольцо поля $F(\Gamma)$ (так чтобы их максимальные идеалы содержались в максимальном идеале объемлющего кольца. Если $V_1=V$, $W_1=W$ и отображения g_1 и g_2 являются изоморфизмами, то соответствие Γ называется бирациональным. Бирациональное соответствие индуцирует изоморфизм $F(V)\approx F(W)$ и, обратно, любой изоморфизм $F(V)\approx F(W)$ индуцируется некоторым бирациональным соответствием. Соответствие Γ называется бирегулярным, если естественные проекции $\Gamma\to V$ и $\Gamma\to W$ являются изоморфизмами. Любое бирациональное соответствие индуцирует бирегулярное соответствие между некоторыми открытыми специальными множествами $V_0\subset V$ и $W_0\subset W$. Обратно, задание произвольных открытых специальных множеств $V_0\subset V$ и $W_0\subset W$ и некоторого изоморфизма $V_0\to W_0$ определяет бирациональное соответствие между V и W.

В дополнении рассматриваются кольца Джекобсона, т. е. кольца, каждый простой идеал которых является пересечением максимальных идеалов. Доказывается, что кольцо A многочленов над кольцом Джекобсона B также является кольцом Джекобсона, причем для любого максимального идеала $\mathfrak{P}$ кольца A идеал $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}\cap B$ является максимальным идеалом кольца B, а поле $A/\mathfrak{P}$ алгебраично над полем $B/\mathfrak{G}$ (эта теорема принадлежит Круллю и была доказана им с помощью теории исключения).

М. М. Постников

7526. Аффинные алгебры. Лазар (Algèbres affines. Lazard M.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 4, 1—8 (франц.)

Четвертое сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523—7525). Доказывается, что любая аффинная алгебра A содержит алгебру многочленов $B=k(y_1,\ldots,y_s)$, над которой все элементы алгебры A являются целыми элементами. При этом для любого идеала $\mathfrak{A}\subset A$ алгебру B и ее образующие $y_1,\ldots,y_s$ можно выбрать так, чтобы $\mathfrak{A}\cap B=(y_1,\ldots,y_r)$, где $r\leqslant s$ (это утверждение известно, как лемма Ф. Нётера; оно справедливо для любых фактор-алгебр алгебры многочленов). Далее доказывается, что целозамыкание аффинной k-алгебры A в произвольном конечном расширении ее поля частных $F(A)$ является нетеровой (как A-модуль) аффинной k-алгеброй. Если аффинная алгебра A имеет размерность d (т. е. степень трансцендентности поля $F(A)$ над полем k равна d), то любая цепь (упорядоченная по возрастанию и не содержащая повторений последовательность) ее простых идеалов содержится в цепи длины d (т. е. состоящей из $d+1$ идеалов). Для любой цепи $(\mathfrak{p}_0,\ldots,\mathfrak{p}_d)$ длины d размерность фактор ал-

гебры $A/\mathfrak{p}_i$ равна $d-i$, $i=0,1,\ldots,d$. Доказаны также и некоторые другие предложения того же рода, относящиеся к понятию размерности. М. М. Постников

7527. Схемы. Шевалле (Les schémas. Chevalley C.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 5, 1—6 (франц.)

Пятое сообщение на семинаре Картана и Шевалле (см. реф. 7523—7526). Рассматриваются аффинные алгебры, лежащие в фиксированном расширении L (с конечным числом образующих) основного поля K. Основное внимание уделяется подкольцам поля L вида $A_{\mathfrak{p}}$, где A—некоторая аффинная алгебра, а $\mathfrak{p}$ — ее простой идеал. Эти подкольца называются местами (localité) поля L. Место M называется специализацией места N, если в M существует такой простой идеал $\mathfrak{p}$, что $N=M_{\mathfrak{p}}$. Размерностью $d=\dim M$ места $M=A_{\mathfrak{M}}$ называется степень трансцендентности поля частных области целостности $A/\mathfrak{M}$, а его уровнем ν—размерность алгебры A, т. е. степень трансцендентности ее поля частных. Разность $\nu-d$ называется высотой места M. Доказывается, что высота равна наименьшему r, для которого в M существует примарный идеал (т. е. идеал, не содержащийся ни в каком немаксимальном простом идеале локального кольца M) с r образующими.

Пусть A—произвольная аффинная алгебра. Совокупность S всех мест вида $A_{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p}$—пробегает все простые идеалы алгебры A, автор называет аффинной схемой с определяющей алгеброй A. Очевидно, что пересечение всех мест некоторой схемы совпадает с ее определяющей алгеброй A. Для любого идеала $\mathfrak{A}\subset A$ рассмотрим множество $E(\mathfrak{A})$ всех мест из S, для которых соответствующие простые идеалы содержат идеал $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что множества $E(\mathfrak{A})$ можно принять за замкнутые множества некоторой топологии. Эту топологию схемы S автор называет топологией Зарисского. Замыкание произвольного множества $P\subset S$ в топологии Зарисского состоит из всех специализаций элементов этого множества.

Множество S мест поля L автор называет схемой, если: 1) это множество является объединением конечного числа аффинных схем $S_1,\ldots,S_r$ и 2) для любых двух различных мест из этого множества не существует ни одного места (поля L), которое было бы «выше» каждого из этих мест. Определяющие алгебры аффинных схем $S_1,\ldots,S_r$ имеют одно и то же поле частных, которое автор называет полем частных схемы S.

Важный класс схем строится следующим образом: пусть H — конечномерное линейное подпространство поля L и пусть S_u, где u — произвольный отличный от нуля элемент подпространства, H — аффинная схема, определяющая алгебра которой порождается всеми элементами вида $u^{-1}v$, где $v\in H$. Тогда объединение всех аффинных схем S_u является схемой. Эту схему автор называет проективной схемой, соответствующей пространству H. Схема S называется полной, если для любого места M ее поля частных в S найдется такое место N, что существует место (поля L) более высокое, чем места M и N. Оказывается, что любая проектная схема полна. С другой стороны, если $S\supset S'$, где S' — полная схема, то $S=S'$. Отсюда следует, что если проективная схема S соответствует пространству H и если H_n — подпространство поля L, порожденное всевозможными произведениями n элементов пространства H, то проективная схема, соответствующая пространству H_n, совпадает с S. М. М. Постников

7528. Схемы. II. Шевалле (Les schémas (II). Chevalley C.), Sémin H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 6, 1—11 (франц.)

Продолжение предыдущего сообщения (реф. 7527). Доказывается несколько теорем о наиболее слабой топологии множества всех мест поля L, совместимой с топологиями Зарисского всех аффинных схем. Эта топология, так же как и индуцированная ею топология любой схемы, снова называется топологией Зарисского. В частности, доказывается, что: 1) в такой топологии любая схема открыта; 2) любое открытое подмножество некоторой схемы является схемой, и обратно; 3) пересечение двух схем открыто и, следовательно, (если оно не пусто), является схемой; 4) любое замкнутое подмножество некоторой схемы является объединением конечной системы замкнутых неприводимых (т. е. не разложимых в объединение истинных замкнутых подмножеств) множеств; 5) замкнутое подмножество схемы тогда и только тогда неприводимо, когда оно является замыканием некоторого места; 6) любая схема неприводима и состоит из специализации некоторого однозначно определенного места Q, являющегося полем частных этой схемы; 7) для любого замкнутого подмножества F схемы S совокупность всех мест из F, размеренность которых равна нулю, плотна в F; 8) если S и S' — такие схемы, что для любого места M' схемы S' в схеме S существует (очевидно, однозначно определенное) такое место M, что M' выше M (в этом случае говорят, что схема S' выше схемы S), то соответствие $M'\to M$ определяет непрерывное отображение $S'\to S$ (заметим, что афинная схема S' с определяющей алгеброй A' тогда и только тогда выше аффинной схемы S с определяющей алгеброй A', когда $A\subset A'$).

Доказательство леммы 4 содержит ошибку, исправляемую в восьмом сообщении (реф. 7530).

М. М. Постников

7529. Нормальные схемы; морфизмы; конструктивные множества. Картан, Шевалле (Schémas normaux; morphismes; ensembles constructibles. Chevalley C., Cartan H.). Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 7, 1—10 (франц.)

Седьмое сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523—7528). Схема называется нормальной, если все ее места нормальны (т. е. целозамкнуты). Доказывается, что для любой схемы S и любого алгебраического расширения F' ее поля частных (лежащего в поле L) существует нормальная схема S'', обладающая следующими свойствами: 1) схема S'' выше схемы S и ее поле частных совпадает с F'; 2) любая нормальная схема, которая выше схемы S и поле частных которой содержит поле F', выше схемы S''. Свойства 1) и 2) однозначно характеризуют схему S'. Если схема S аффинна (полна или проективна), то схема S' также аффинна (соответственно, полна или проективна). Схема S' называется производной схемой от схемы S в поле F'; если $F=F'$, то S' называется нормальной производной схемой от схемы S. Оказывается, что для любого места $M\in S$ в схеме S' существует только конечное число мест более высоких, чем место M; эти места соответствуют максимальным идеалам целозамыкания кольца M в поле F'.

Пусть S и S' — две схемы (построенные, вообще говоря, для разных расширений L и L' основного поля K). Морфизмом схемы S в схему S' авторы называют непрерывное (т. е. сохраняющее отношение включения) отображение $f: S\to S'$, рассматриваемое вместе с таким гоморфизмом $\varphi: f(F)\to F$, где F — поле частных схем S, что $\varphi(f(M))\subset M$ и $\varphi(r(f(M)))\subset r(M)$ для каждого места $M\in S$. Любой морфизм разлагается в композицию инъективного морфизма (для которого гомоморфизм φ является мономорфизмом) и надъективного морфизма (для которого гомоморфизм φ является эпиморфизмом). С точностью до изоморфизма это разложение единственно. Если схемы S и S' аффинны, то морфизмы $S\to S'$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами $A'\to A$ соответствующих определяющих алгебр. Если схема S выше схемы S', то естественное

отображение $S \to S'$ является инъективным морфизмом и, обратно, любой инъективный морфизм имеет такой вид. Инъективный морфизм переводит любое открытое подмножество схемы S в подмножество, содержащее внутренние точки.

Пусть S — произвольная схема. Рассмотрим минимальную систему подмножеств схемы S, содержащую все открытые подмножества и замкнутую относительно операций (конечного) пересечения и взятия дополнения. Подмножества этой системы авторы называют конструктивными подмножествами схемы S. Доказывается, что любой морфизм переводит конструктивные подмножества в конструктивные.

Имеется довольно много неточностей и опечаток, исправляемых в следующих сообщениях. М. М. Постников

7530. Морфизмы и конструктивные множества. Картан (Morphismes et ensembles constructibles. Cartan H.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 8, 1—7 (франц.)

Продолжение предыдущего сообщения (реф. 7529). Доказывается, что любой морфизм полной схемы является замкнутым отображением. Доказывается также, что если морфизм $f: S \to S'$ инъективен, то множество E_h мест $M \in S$, являющихся специализациями таких мест P, что $f(P) = f(M)$ и $\dim P \geqslant \dim f(M) + h$, замкнуто, совпадает с S, если $h \leqslant \dim_{F'} F$, и отлично от S, если $h > \dim_{F'} F$. Аналогично, множество C'_h мест $M \in S'$, для которых существует такое место $M \in S$, что $f(M) = M$ и $\dim M' \geqslant \dim M' + h$, конструктивно, совпадает с $f(S)$, если $h \leqslant \dim_{F'} F$, и не плотно, если $h > \dim_{F'} F$. Отсюда следует, что множество фундаментальных мест инъективного морфизма f (т. е. мест либо не принадлежащих образу отображения f, либо мест $M' \in S'$, для которых существует такое место $M \in S$, что $\dim M > \dim M' + \dim_{F'} F$) конструктивно и не плотно. В заключение доказывается, что для любого инъективного морфизма $f: S \to S'$ существует такое открытое множество $U \subset S$, что для любого места $M \in U$ и любого места $N' \in S'$, специализацией которого является место $f(M)$, в U существует такое место N, что $f(N) = N'$ и M является специализацией N. Вообще говоря, $U \neq S$. М. М. Постников

7531. Соответствия. I. II. Шевалле (Correspondances. I. Chevalley C.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 9, 1—7; № 10, 1 — 5 (франц.)

Девятое и десятое сообщения на семинаре Картана и Шеваллея (реф. 7523—7530).

Соответствием между двумя схемами S и S' называется некоторая схема S'', рассматриваемая вместе с двумя морфизмами $f: S'' \to S$ и $f: S'' \to S'$. Соответствия (S'', f, f') и (S_1'', f_1, f_1') считаются равными, если существует такой изоморфизм $j: S'' \to S_1''$, что $f = f_1 j$, $f' = f_1' j$. Говорят, что места $M \in S, M' \in S'$ соответствуют друг другу при соответствии $\Gamma = (S'', f, f')$, если существует такое место $M'' \in S''$, что $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$. Для любого места M (или M') множество всех соответствующих мест $M' \in S'$ (соответственно $M \in S$) конструктивно и состоит из специализаций конечной системы мест. Соответствие Γ называется невырожденным, если $f(S'') = S$ и $f'(S) = S'$. В этом случае существует такое открытое множество $U \subset S$, что если место $M \in U$, являющееся специализацией некоторого места $N \in S$, соответствующее месту $M' \in S'$, то найдется место $N' \in S'$, соответствующее месту N и имеющее среди своих специализаций место M. Размерностью невырожденного соответствия Γ называется размерность объединения схем S и S' (для невырожденного соответствия можно считать, что схема S'' выше каждой из схем S и S'). Любому соответствию $\Gamma = (S'', f, f')$ отвечает некоторое невырожденное соответствие (S'', g, g') между схемами $f(S'')$ и $f'(S'')$ соответственно. Размерность последнего соответствия называется размерностью данного соответствия Γ. Для любых соответствующих друг другу мест M и M' соответствие Γ определяет некоторое соответствие $(\gamma(M''), g, g')$ между схемами $\gamma(M)$ и $\gamma(M')$ (здесь M'' — такое место, что $f(M'') = M$, $f'(M'') = M'$, а $\gamma(M)$, $\gamma(M')$ и $\gamma(M')$ — схемы, состоящие из всех специализаций мест M, M' и M'' соответственно); размерность этого соответствия обозначается через $\delta''(M, M')$. Пусть Z_h' — множество всех специализаций размерности h места M', соответствующего месту M. Основная теорема: Множество Z_h' плотно в $\gamma(M')$, если $\dim M + \dim M' - \delta''(M, M') \leqslant h \leqslant \dim M'$, и не плотно, если $h < \dim M + \dim M' - \delta''(M, M')$.

Обобщая понятие фундаментального места инъективного морфизма (реф. 7530), автор вводит понятие фундаментального места невырожденного соответствия и доказывает, что множество всех фундаментальных мест по-прежнему является конструктивным неплотным множеством. Пусть Γ — невырожденное соответствие между схемами S и S'' и пусть M — произвольное не фундаментальное место схемы S. Рассмотрим соответствующее место $M' \in S'$. Оказывается, что если M' не является специализацией никакого места, соответствующего месту M, то $0 \leqslant h_0 \leqslant \dim M$, где $h_0 = \dim M' - \dim \Gamma + \dim S$. При этом множество мест размерности h из $\gamma(M)$, которым соответствует место M', плотно в $\gamma(M)$, если $h_0 \leqslant h \leqslant \dim M$, и не плотно, если $h < h_0$. Аналогично, множество мест размерности h из $\gamma(M')$, которым соответствует место M, плотно в $\gamma(M')$, если $h_0 \leqslant h \leqslant \dim M'$, и неплотно, если $h < h_0$. М. М. Постников

7532. Основная теорема Зарисского. I, II. Шевалле (La théorème principal de Zariski. I. Chevalley C.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 11, 1—6; № 12, 1—3 (франц.)

Одиннадцатое и двенадцатое сообщения на семинаре Картана и Шеваллея (реф. 7523—7531).

Место M' называется регулярным над местом места M, если: 1) оно выше M; 2) имеет ту же размерность и тот же уровень, что и M; 3) идеал места M', порожденный максимальным идеалом места M, примарен. Доказывается следующая теорема Зарисского: Если M' регулярно над M, то $M' = M^* \mathfrak{M}^*$, где M^* — целозамыкание M в M', а $\mathfrak{M}^*$ — его максимальный идеал.

Пусть теперь S и S' — две схемы и пусть j — некоторый изоморфизм поля частных F' схемы S' на поле частных F схемы S. Тогда определена схема $j(S')$ с полем частных F. Пусть S'' — объединение схем S и $j(S')$, $f: S'' \to S$ и $f': S'' \to S'$ — естественные отображения. Тройка (S'', f, f') является, очевидно, невырожденным соответствием между схемами S и S'. Соответствия, получающиеся описанным приемом, автор называет бирациональными соответствиями. С помощью теоремы Зарисского легко доказывается следующее утверждение: Пусть Γ — бирациочальное соответствие между схемами S и S', M — некоторое нормальное место схемы S и M' — место схемы S', соответствующие месту M и не являющееся специализацией никакого отличного от него места из S', соответствующего месту M; тогда, если никакая отличная от M' специализация места M' не соответствует M, то M' является единственным местом из S', соответствующим месту M. При этом $j(M') \subset M$, где j — изоморфизм полей частных, определяющий соответствие Γ. М. М. Постников

7533. Дифференцирования в полях. Картье (Dérivations dans les corps. Cartier P.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 13, 1—13 (франц.)

Тринадцатое сообщение на семинаре Картана и Шеваллея (реф. 7523—7532), посвященное элементарному изучению дифференцирований и дифференциалов (дифференцированием называется такое аддитивное отобра-

жение $D: A\otimes M$ коммутативного кольца A в A-модуль M, что $D(\alpha\alpha')=\alpha D(\alpha')+\alpha' D(\alpha)$: дифференциалами называются элементы фактор-модуля $D(A)=A\otimes/R$, где R — подмодуль, порожденный элементами вида $1\otimes\alpha\alpha'-\alpha\otimes\alpha'-\alpha'\otimes\alpha$; дифференцирования $A\otimes M$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами $D(A)\to M$). Особое внимание уделено задаче продолжения дифференцирований с поля на некоторое его расширение. В частности, подробно изучаются сепарабельные расширения, т. е. расширения, для которых задача продолжения дифференцирований всегда разрешима. М. М. Постников

7534. Регулярные расширения. Картье (Extensions régulières. Cartier P.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 14, 1—10 (франц.)

Продолжение предыдущего сообщения (реф. 7533). Определяется и изучается понятие композита двух (заданных с точностью до изоморфизма) расширений основного поля. С трех различных точек зрения дается описание всех неэквивалентных композитов данных двух расширений. В частности, доказывается, что если одно из расширений имеет конечное число образующих, то число всех неэквивалентных композитов конечно. Специально изучаются расширения L/K, для которых композит с любым другим расширением L'/K определен однозначно (с точностью до эквивалентности). Оказывается, что расширение L/K тогда и только тогда обладает этим свойством, когда оно примарно, т. е. алгебраическое замыкание поля K, в поле L чисто несепарабельно над K. Доказывается также, что расширение L/K тогда и только тогда примарно, когда для любого расширения L'/K (или даже только для алгебраического замыкания поля K) любой делитель нуля тензорного произведения $L\otimes L'$ нильпотентен.

Сепарабельные и примарные расширения автор называет регулярными. Другими словами, регулярными называются сепарабельные расширения L/K, любой элемент которых, не принадлежащий полю K, трансцендентен над K. В частности, все чисто трансцендентные расширения, а также любые расширения алгебраически замкнутого основного поля регулярны. Любое подрасширение регулярного расширения регулярно. Композит регулярного расширения с любым расширением K'/K регулярен над K'. Композит двух регулярных расширений регулярен. Доказывается ряд свойств расширений, равносильных свойству регулярности. В частности, доказывается, что расширение L/K тогда и только тогда регулярно, когда для любого расширения L'/K (или даже только для алгебраического замыкания поля K) алгебра $L\otimes L'$ не имеет делителей нуля, а также, когда идеал алгебраических соотношений с коэффициентами из алгебраического замыкания поля K между некоторой системой образующих поля L обладает базой, состоящей из многочлена над K. М. М. Постников

7535. Расширение основного поля схем. Картье, Шевалле (Extension du corps de base dans les schémas. Cartier P., Chevalley C.), Sémin. H. Cartan et Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 15, 1—12 (франц.)

Пятнадцатое сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523—7534), посвященное исследованию изменений схем и мест при расширении основного поля. М. М. Постников

7536. Простые места. I, II. Годман (Localités simples. I. Godement R.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, 8, № 16, 1—10; № 17, 1—11 (франц.)

Шестнадцатое и семнадцатое сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523—7535). Пусть M—нетерово локальное кольцо, $\mathfrak{Q}$ – его примарный идеал, E— произвольный, M-модуль конечного типа. Рассматривается функция $\chi_E(\mathfrak{Q}; n)$, равная длине композиционного ряда M-модуля $E/\mathfrak{Q}^n E$. Доказывается, что для достаточно больших n эта функция является многочленом от n, степень h которого не превосходит числа образующих идеала $\mathfrak{Q}$. Эта степень не зависит от $\mathfrak{Q}$ и называется высотой модуля E. Высота h кольца M (рассматриваемого как M-модуль) оказывается равной наименьшему r, для которого существует примарный идеал с r образующими и, следовательно, если M является местом, совпадает с высотой места M в введенном ранее смысле (реф. 7527). Элементы $x_1, \ldots, x_n$, порождающие примарный идеал кольца M, образуют, по определению, систему параметров кольца M. Кольцо M называется регулярным, если в нем существует система параметров, порождающая его максимальный идеал $r(M)$. Доказывается, что кольцо регулярно тогда и только тогда, когда размерность пространства $r(M)/r(M)^2$ над полем $L=M/r(M)$ равна h, а также тогда и только тогда, когда градуированная алгебра $G(M)=\Sigma r(M)^n/rM^{n+1}$ изоморфна алгебре многочленов. Из последнего утверждения легко следует, что регулярное локальное кольцо является целозамкнутой областью целостности.

Место M над полем K называется чистым, если оно имеет вид $A\mathfrak{P}$, где A — алгебра многочленов над полем K. Доказывается, что любой максимальный идеал кольца многочленов от n неизвестных порождается n элементами, и отсюда выводится, что любое чистое место просто, т. е. является регулярным локальным кольцом (геометрически это утверждение означает, что аффинное пространство не имеет кратных точек).

Далее автор рассматривает дифференцирование $D: M\to L$, где M — локальное кольцо, а $L=M/r(M)$. Каждое такое дифференцирование, очевидно, определяет некоторую линейную форму на векторном пространстве $G_1(M)=r(M)/(M)^2$. Оказывается, что если M содержит поле K, сепарабельным расширением которого является поле L, то любая L-линейная форма на L индуцируется некоторым K-дифференцированием $M\to L$. Отсюда вытекает, что если локальное кольцо M регулярно и равнохарактеристично, то его фактор-кольцо $M/\mathfrak{p}$ по простому идеалу $\mathfrak{p}$ тогда и только тогда регулярно, когда существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_s\in M/\mathfrak{p}$, где $s=h(M)-h(M/\mathfrak{p})$, и такие дифференцирования $D_1, \ldots, D_s$: $M\to L$, что $\det[D_i x_j]\neq 0$. Если, кроме того, L сепарабельно над некоторым подполем K кольца M, то дифференцирования D_i можно считать K-дифференцированиями. В заключение доказывается (и сопровождается геометрической интерпретацией) следующая теорема Зарисского: Место $A_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{M}}$, где A — алгебра многочленов над полем K, а $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{M}$ — ее простые идеалы, причем $\mathfrak{M}>\mathfrak{p}$ тогда и только тогда просто, когда существуют следующие элементы $f_1, \ldots, f_s\in\mathfrak{p}$, $s=h(A\mathfrak{p})$, и такие дифференцирования $D_1, \ldots, D_s: A\to A$, что $\det[D_i f_j]\notin\mathfrak{M}$. Если поле $A_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}$ сепарабельно над K, то дифференцирования D_i можно считать K-дифференцированиями. М. М. Постников

7537. $\mathfrak{M}$-адические топологии. Годман (Topologies m-adiques. Godement R.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm., supér. 1955—1956, 8, № 18, 1—12 (франц.)

Восемнадцатое сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523—7536). Для модулей E конечного типа над нетеровым кольцом A, в котором отмечен идеал $\mathfrak{M}\subset r(A)$ (такие кольца автор называет кольцами Зарисского) доказывается ряд элементарных свойств определенной в них $\mathfrak{M}$-адической топологии (т. е. топологии, в которой окрестностями нуля служат подмодули вида $\mathfrak{M}^n E$). Например, доказывается, что эта топология обладает свойством отделимости, любой подмодуль модуля E является относительно нее

замкнутым множеством, любой гомоморфизм (модулей конечного типа) — непрерывным отображением и т. п. Кольцо Зарисского обладающее лишь конечным числом максимальных идеалов, называется полулокальным кольцом, если существует такое k, что $r(A)^k \subset \mathfrak{M}$. Нетерово кольцо A с отмеченным в нем идеалом $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда полулокально, когда все его простые идеалы, содержащие идеал $\mathfrak{M}$, максимальны. Доказывается, что любое полное (в $\mathfrak{M}$-адической топологии) полулокальное кольцо является прямым произведением полных локальных колец. В заключение доказывается известная теорема Коэна о том, что любое полное равнохарактеристическое локальное кольцо M содержит поле, изоморфное фактор-кольцу $M/r(M)$. Случай конечной характеристики разбирается по Нарита существенно более простым методом, чем в первоначальной работе Коэна. Случай характеристики 0 рассматривается обычным образом с помощью леммы Гензеля. В дополнении теорема Коэна применяется к задаче продолжения дифференцирований (реф. 7533). М. М. Постников

7538. Аналитические свойства мест. Годман (Propriétés analytiques des localités. Godement R.), Sémin. H. Cartan et C. Chevalley. Ecole norm. supér., 1955—1956, **8**, № 19, 1—9 (франц.)

Девятнадцатое (заключительное) сообщение на семинаре Картана и Шевалле (реф. 7523—7537). На основе результатов предыдущего сообщения доказывается ряд известных теорем о полных локальных кольцах. В частности, доказывается следующая теорема Шевалле об аналитическом неразветвлении: пополнение $\hat{M}$ любого места M не имеет нильпотентных элементов и для любого простого идеала $\mathfrak{P} \subset \hat{M}$ высота локального кольца $M/\mathfrak{P}$ совпадает с высотой места M.

М. М. Постников

7539. Признаки нильпотентности. Хёнке (Nilpotenzkriterien. Hoehnke Hans-Jürgen), Math. Ann., 1957, **132**, № 5, 404—411 (нем.)

Доказывается, что идеал A кольца R будет ниль-кольцом тогда и только тогда, когда из $bc = b$; b, $c \in A$ следует $b = 0$ и для любого элемента a из A цепочка главных правых идеалов, порожденных степенями a: $(a, aR \supset \supset (a^3, a^3R \supset \ldots$ обрывается на конечном месте. Отсюда следует, что подкольцо A радикала Джекобсона произвольного кольца R является ниль-кольцом в том и только в том случае, если цепочка правых идеалов $(a, aR \supset \supset (a^3, a^3R) \supset \ldots$ обрывается на конечном месте. Кольцо $J \neq (0)$ является нильпотентным кольцом индекса n тогда и только тогда, когда $(0) \subset (0)j^{-1} \subset \ldots \supset (0)j^{-n+1} = j$.

Идеал A кольца R тогда и только тогда будет нильпотентным кольцом индекса n, когда: из $bc = e$; b, $c \in A$ следует $b = 0$; для любых элементов a_1, a_2, a_3, ... из A цепочка правых идеалов $(a_1, a_1R) \supset a_1(a_2, a_2R) \supset a_1a_2(a_3, a_3R) \supset \ldots$ обрывается на конечном месте и $A^n = A^{n+1}$. Пусть $N(L)$ — локально-нильпотентный радикал Левицкого. Доказывается, что всякий ниль-идеал кольца R является нильпотентным тогда и только тогда, если: 1) для каждого правого ниль-идеала G фактор-кольца $R/N^{(L)}$ существует такое натуральное число k, что $C^k = C^{k+1}$; 2) для элементов каждого правого ниль-идеала A из $R/N(L)$ выполнено условие обрыва цепей для главных двусторонних идеалов $(a_1, a_1R, Ra_1, Ra_1R \supset \supset (a_1a_2, a_1a_2R, Ra_1a_2, Ra_1a_2R) \supset \ldots$, где $a_1, a_2, \ldots \in A$; 3) существует такое натуральное число t, что $[N^{(L)}]^t = [N^{(L)}]^{t+1}$; 4) в кольце R для элементов радикала $N(L)$ выполнено условие обрыва цепей для вышеуказанных главных двухсторонних идеалов.

Примечание референта. При установлении признаков нильпотентности автор часто пользуется условием, что из $bc = b$ следует $b = 0$; это означает, что рассматриваемое кольцо является полурадикальным (Андрунакиевич В. А., Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948, **12**, № 2, 129—178). В. А. Андрунакиевич

7540. Матричный ранг и его применение в теории I-колец. Левицкий (The matricial rank and its application in the theory of I-rings. Levitzki J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A3**, № 2, 203—237 (англ.)

Множество n^2 ненулевых элементов e_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, n$ ассоциативного кольца S называется полной системой единиц порядка n, если выполнены известные условия $e_{ik}e_{k'j} = \delta_{kk'}e_{ij}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Если кольцо S обладает полной системой единиц порядка n, но не содержит такой системы высшего порядка, то число n называется матричным рангом кольца S и обозначается через $|S|$. Если N (S) — радикал Джекобсона кольца S, то $|S| = |S/N(S)|$. Пусть S — произвольное кольцо и $a \in S$; тогда $|aS| \leqslant |Sa|$. Матричный ранг $|a|$ элемента a определяется равенствами $|a| = |aS| = |Sa|$. В случае, когда S есть полное матричное кольцо над некоторым полем, матричный ранг $|a|$ совпадает с обычным рангом матрицы. Для произвольного кольца S и $a, b \in S$ имеем: $|ab| \leqslant |a|$, $|ab| \leqslant |b|$. Если R, R_1, R_2 — правые идеалы кольца S и $a \in S$, то $|R_1| \geqslant |R_1R_2|$, $|a| \geqslant |aR|$, $|R| \geqslant |aR|$. Кольцо S называется I-кольцом или кольцом Цорна, если всякий идеал, не являющийся ниль-идеалом, содержит ненулевой идемпотент. Говорят, что кольцо S имеет индекс m (в обозначениях $i(S)$), если S содержит нильпотентные элементы a индекса m (т. е. $a^m = 0$, $a^{m-1} \neq 0$), но не содержит элементов высшего индекса. Если S есть I-кольцо, то $|S| = i(S/N(S))$. Доказывается, что в любом I-кольце для всяких двух правых идеалов R_1 и R_2 справедливо неравенство $|R_1 + R_2| \leqslant |R_1| + |R_2|$. Отсюда следует, что для любых двух элементов a и b из I-кольца S имеет место неравенство $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Говорят, что кольцо S имеет собственный индекс n (в обозначениях $i^*(S)$) (если S содержит нильпотентные подкольца T индекса n (т. е. $T^n = 0$, $T^{n-1} \neq 0$), но не содержит подколец высшего индекса. Доказывается, что в полупростом смысле Джекобсона I-кольца S для любого конечного множества правых идеалов $R_1, R_2, \ldots, R_n$ справедливо неравенство

$$i^*\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} i^*(R_j) + 1;$$

более того, если $i^*(R_j) < \infty$ для каждого j, то любое ниль-подкольцо из $\sum_{j=1}^{n} R_j$ будет нильпотентным. Кольцо S называется FI-кольцом, если любой его гомоморфный образ есть I-кольцо. Если S есть FI-кольцо и S' — любой его гомоморфный образ, то $|S'| \geqslant |S|$. Далее показывается, что I-кольца, имеющие конечный матричный ранг, могут быть использованы для построения новых радикалов, где термин "радикал" понимается в аксиоматическом смысле, т. е. в смысле Куроша — Амицура. В. А. Андрунакиевич

7541. Некоторые теоремы относительно условий цепей. Се Бан-цзе, (Hsieh Pang Chieh), Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 67—81 (кит.; рез. англ.)

Доказываются следующие утверждения: 1. Если N — двусторонний идеал в кольце Ω, то условие максимальности (или минимальности) для правых идеалов кольца Ω выполнено тогда и только тогда, когда это условие выполнено для правых идеалов фактор-кольца Ω/N и для правых идеалов кольца Ω, содержащихся в N.

2. В кольце Ω выполнено условие максимальности (или минимальности) для правых идеалов в том и только в том случае, если существуют такие двусторонние идеалы M и N кольца Ω, что фактор-кольца Ω/M и Ω/N удовлетворяют условию максимальности (или минимальности) для правых идеалов и $M \cap N = \{0\}$.

3. Кольцо Ω удовлетворяет условию максимальности (или минимальности) для правых идеалов тогда и толь-

ко тогда, если в Ω существуют такие двусторонние идеалы $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (где $n \geqslant 1$); что; а) Ω/M_i суть кольца с условием максимальности (или минимальности) для правых идеалов $i=1, 2, \ldots, n$; б) условие максимальности (или минимальности) выполнено для правых идеалов кольца Ω, содержащихся в двустороннем идеале $M=M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$. Говорят, что в кольце Ω выполнено ограниченное условие максимальности (или минимальности) для правых идеалов, если для всякого ненулевого двустороннего идеала N из Ω, фактор-кольцо Ω/N удовлетворяет условию максимальности (или минимальности) для правых идеалов. Доказывается, что если левые и правые аннуляторы кольца Ω суть нулевые идеалы, то ограниченное условие максимальности (или минимальности) выполнено для правых идеалов полного матричного кольца Ω, тогда и только тогда, когда оно выполняется для правых идеалов кольца Ω. В конце статьи доказывается известный факт, что в нильпотентном кольце условие максимальности (или минимальности) для двухсторонних идеалов равносильно соответствующему условию для подколец.

В. А. Андрунакиевич

7542. Об алгебре А. Картана полиномиального идеала. Розенкноп И. З. Докл. АНСССР, 1957, **113**, № 6, 1218—1221

Пусть Λ — внешняя алгебра с образующими $z_1, \ldots, z_n$. Алгеброй Картана идеала $I=I(F_1, \ldots, F_n)$ в кольце полиномов $R=R(x_1, \ldots, x_m)$ над некоторым полем называется дифференциальная градуированная алгебра $C=C(F_1, \ldots, F_n)=R \otimes \Lambda$ с дифференциалом Δ:

$$\Delta(r \otimes z_{i_1} \ldots z_{i_k}) = \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant k} (-1)^{\alpha} r F_{i\alpha} \otimes z_{i_1} \ldots z_{i_{\alpha-1}} z_{i_{\alpha+1}} \ldots z_{i_k}.$$

$\Delta(r \otimes 1)=0$, $r \in R(x_1, \ldots, x_m)$, и градуировкой, определяемой зданием $\deg x_i = l_i$, $\deg z_j = k_j$. Требуется при этом, чтобы $F_1, \ldots, F_n$ были однородными полиномами степеней $k_1, \ldots, k_n$. Каждой градуированной алгебре $A=\sum_q A^{(q)}$ над данным полем можно сопоставить функцию $A(t)=\sum_q a_q t^q$, где a_q — размерность векторного подпространства $A^{(q)}$ в A.

Алгебра гомологий

$$H = \ker \Delta / \operatorname{Im} \Delta = H(C) = H(F_1, \ldots, F_n),$$

порождаемая дифференциалом Δ, разлагается в сумму $H=\sum_q H^{(q)}$, где $H^{(q)}=H(C^{(q)})$, $C^{(q)}=R \otimes \Lambda^{(q)}$.

Следовательно, $H(t)=\sum_{0 \leqslant q \leqslant n} H^{(q)}(t)$. Целью автора является изучение функции $H(t)$, в частности, выяснение связи между отдельными слагаемыми $H^{(q)}(t)$.

Для произвольной алгебры Картана $C(F_1, \ldots, F_n)$ найдена формула

$$\sum_q (-1)^q H^{(q)}(t) = \frac{(1-t^{k_1}) \ldots (1-t^{k_n})}{(1-t^{l_1}) \ldots (1-t^{l_m})}.$$

Если, далее, $m=n$, $F_1, \ldots, F_n$ вполне независимы (в том смысле, что полиномы P_i в любом соотношении $P_1 F_1 + \ldots + P_n F_n = 0$ имеют вид $P_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} F_j$, $P_{ij} = -P_{ji}$) и образующие идеала $I(\widetilde{F}, \ldots, \widetilde{F}_n)$ получаются из $F_1, \ldots, F_n$ при значениях $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{n-s+1} = 0$, то $H^{s-q}(t) = t^M H^{(q)}\left(\frac{1}{t}\right)$, где $M = k_1 + \ldots + k_n - l_1 - \ldots - l_m$.

В некоторых случаях эти формулы позволяют выразить $H(t)$ через $H^{(0)}(t)$. Детали доказательств опущены.

А.И. Кострикин

7543. Радикалы в функциональных кольцах. Пирс (Radicals in fuction rings. Pierce R. S.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 2, 253—261 (англ.)

Структурно-упорядоченное кольцо, или l-кольцо — это ассоциативное кольцо, которое так структурно упорядочено, что отображения $x \to x+a$ есть структурный автоморфизм для всех a и при $a \geqslant 0$ отображения $x \to ux$, $x \to xa$ являются упорядоченными эндоморфизмами. Если, кроме того, из $a \wedge b=0$, $x \geqslant 0$, следует $xa \wedge b = ax \wedge b = 0$; то l-кольцо называется функциональным кольцом, или f-кольцом. Если l-кольцо просто упорядочено, то оно называется упорядоченным кольцом. Всякое упорядоченное кольцо является f-кольцом. Некоторая категория C из f-колец и их гомоморфизмов называется f-категорией, если она содержит все упорядоченные кольца и, если для всякого кольца R из C, любой гомоморфизм кольца R на f-кольцо принадлежит C. Функция ρ, заданная на объектах некоторой f-категории C, называется радикалом на C, если она ставит каждому кольцу R из C в соответствие такой l-идеал $\rho(R)$ из R, что $\rho(R/\rho(R))=0$ для любого R из C и для всякого R из C $\rho(R)=\bigcap h^{-1}(\rho(hR))$, где h пробегает все гомоморфизмы кольца R на некоторое упорядоченное кольцо.

Доказывается, что если ρ — радикал на f-категории C, то кольцо R из C является подпрямым объединением упорядоченных колец с нулевым ρ-радикалом тогда и только тогда, когда $\rho(R)=0$. Пусть для всякого кольца R из некоторой f-категории C и любого элемента a из R, определено такое непустое множество $\mathfrak{N}(R, a)$ подмножеств из R, что 1. Если h — гомоморфизм кольца R из C на упорядоченное кольцо R' и $a \in R$ то; а) для всякого $N' \in \mathfrak{N}(R', ha)$ существует такое $N \in \mathfrak{N}(R, a)$, что $hN \subseteq N'$; в) для всякого $N' \in \mathfrak{N}(R, a)$ существует такое $N \in \mathfrak{N}(R', ha)$, что $N' \subset h N$. II. Если $N \in \mathfrak{N}(R, a)$, то N замкнуто относительно пересечений, т. е. из b, $C \in N$ следует $b \wedge C \in N$. Система $\mathfrak{N}$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, называется базой на C. Пусть $\mathfrak{N}$ — база на f-категорий C. Для каждого $R \in C$ определяется множество $\nu(R)=\{a \in R \mid 0 \in N$ для всех $N \in \mathfrak{N}(R, a)\}$. Если ν является радикалом на C, то $\mathfrak{N}$ называется радикальной базой с ассоциированным радикалом ν. Доказывается, что если ρ любой радикал на f-категории C, то всегда существует радикальная база $\mathfrak{N}$ на C с ассоциированным радикалом ρ. Всякое f-кольцо изоморфно подпрямому объединению упорядоченных колец. Необходимым и достаточным условием изоморфизма f-кольца подпрямому объединению упорядоченных колец без делителей нуля является отсутствие нильпотентных элементов. Выводятся также необходимые и достаточные условия для того, чтобы ненулевое f-кольцо было подпрямым объединением архимедово упорядоченных колец. В. А. Андрунакиевич

7544. О кольцах с тождественными соотношениями. Ширшов А. И., Матем. сб., 1957, **43**, № 2, 277—283

Сначала рассматриваются ассоциативные алгебры, в которых выполняются некоторые тождественные соотношения. Пусть $\mathfrak{A}=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечное множество символов. Если слово s относительно $\mathfrak{A}$ допускает запись $s = v_{i_1}^{m_1} v_{i_2}^{m_2} \ldots v_{i_k}^{m_k}$, где $v_{i_r} \neq v_{i_{r+1}}$, то k называется высотой слова. Скажем, что слова s и t имеют одинаковый состав, если для каждого i число элементов a_i, входящих в запись этих слов, одно и то же. Будем говорить, что алгебра A с системой образующих $\mathfrak{A}$ имеет ограниченную высоту, если в A существует такое множество элементов $f=\{t_1, \ldots, t_n\}$, однородных по каждому a_i, что каждое слово относительно $\mathfrak{A}$ равно в алгебре A некоторой линейной комбинации слов относительно f, имеющих одинаковый состав со словом

s и имеющих высоту относительно f, не превосходящую данного числа q. Во всякой ассоциативной алгебре, с тождественным соотношением степени n каждое конечное подмножество порождает подалгебру ограниченной высоты. Этот результат переносится затем на $\sum$-операторные ассоциативные кольца, в которых выполнено такое тождественное соотношение, что после приведения подобных членов хотя бы один из коэффициентов при членах высшей степени равен единице. Из этих результатов выводятся следствия: 1. Если в $\sum$-операторном ассоциативном кольце с тождественным соотношением степени n указанного выше типа нильпотентны все произведения образующих, содержащие менее n множителей, то это кольцо локально нильпотентно; 2. Если все произведения степени $\leqslant n$ от образующих ассоциативной алгебры A ранга n нильпотентны, то алгебра A нильпотентна; 3. Если в ассоциативном кольце A с конечным числом образующих и тождественным соотношением степени n указанного выше типа все произведения менее чем по n образующих алгебраичны над некоторым подкольцом Z центра кольца A, то кольцо A конечно над Z. Далее автор изучает альтернативные и специальные J-кольца с тождественным соотношением, подчиненным дополнительному требованию, формулировка которого заняла бы слишком много места. Из основного результата этой части работы вытекает, что всякая такая алгебраическая альтернативная алгебра локально конечна. Л. А. Скорняков

7545. Заметка о некоммутативных йордановых алгебрах. Пейдж (A note on noncommutative Jordan algebras. Paige Lowell J.), Portug. math., 1957, **16**, № 1-2, 15—18 (англ.)

Пусть L — произвольная алгебра над полем F характеристики $\neq 2$, допускающая билинейную форму $f(x, y) \in F\ (x, y \in L)$ такую, что $f(x, y) = f(y, x)$ и $f(x, yz) = f(xy, z)$. Пусть A — множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix},$$

где $a, b \in L, \alpha, \beta \in F$. Определив сложение этих матриц и умножение их на элемент из F обычным способом введем умножение, определяемое правилом

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & c \\ d & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + f(a,d) & \alpha c + a\delta + \tau b d \\ \gamma c + \beta d + \sigma a c & f(b,c) + \beta\delta \end{pmatrix},$$

где σ и τ — фиксированные элементы из F. Тогда A превращается в алгебру над полем F. Если $x^2 = 0$ для всех x из L, то алгебра A оказывается некоммутативной йордановой алгеброй (РЖМат, 1956, 8662). Невырожденность формы f (форма f называется невырожденной, если для всякого $a \neq 0$ из L существует такое $b \in L$, что $f(a, b) \neq 0$) оказывается необходимым и достаточным условием для простоты алгебры A.

Л. А. Скорняков

7546. Заметка об усеченной алгебре над лупой. Дженер (A note on truncated loop algebras. Jenner W. E.), Portug. math., 1957, **126**, № 1-2, 1—2 (англ.)

Рассматривается следующая алгебра $\mathfrak{A}$ над полем K, названная автором усеченной алгеброй над лупой. Пусть L — лупа $\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ с единицей u_0. Базисом алгебры $\mathfrak{A}$ служит множество $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где $e_i \longleftrightarrow u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Умножение определяется следующим образом:

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, \text{ если } u_i u_j = u_0 \\ h_{ij} e_k, \text{ если } u_i u_j = u_k \neq u_0, \end{cases}$$

где h_{ij} — некоторые элементы поля K.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется изотопно простой, если любой ее изотоп является простой алгеброй.

Отвечая на вопрос, поставленный Бруком (Bruck R. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 141—199), автор строит пример не изотопно простой усеченной алгебры над лупой. В. Д. Белоусов

7547. Дистрибутивно порожденные почти кольца. I. Теория идеалов. II. Теория представлений. Фрёлих (Distributively generated near-rings. I. Ideal theory. II. Representation theory. Fröhlich A.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 29, 76-108 (англ.)

Пусть Ω — аддитивно записываемая, не обязательно коммутативная группа. Если в совокупности R всех отображений Ω в себя определить умножение обычным образом как последовательное применение, а сложение двух отображений $x, y \in R$ формулой $(x+y)(\omega) = x(\omega) + y(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, то относительно указанных операций совокупность R образует почти кольцо (по сложению совокупность R является группой, которая обозначается через R^+, а по умножению — полугруппой; имеет место правый дистрибутивный закон; левый дистрибутивный закон в почти кольце, вообще говоря, не выполняется). В работе изучаются свойства некоторого обширного класса абстрактных почти колец и реализация таких почти колец в виде почти колец отображений некоторой группы Ω в себя.

Пусть R — абстрактное почти кольцо. Элемент $C \in R$ называется дистрибутивным, если $c(x+y) = cx + cy$ для всех x, y из R. Если R — почти кольцо отображений Ω в себя, то дистрибутивными элементами являются эндоморфизмы группы Ω. Особый интерес представляет изучение почти кольца, порожденного в почти кольце всех отображений Ω в себя эндоморфизмами группы Ω. Абстрактное почти кольцо называется дистрибутивно порожденным (д. п.), если его аддитивная группа R^+, порождается дистрибутивными элементами. В дальнейшем под R всюду понимается д. п. почти кольцо. Основной пример д. п. почти кольца следующий: пусть Ω — группа и S — некоторая полугруппа эндоморфизмов группы Ω, тогда совокупность всех отображений Ω в себя, являющихся суммами элементов из S, образует д. п. почти кольцо.

Подгруппа $\mathfrak{A}$ R^+, допускающая умножение слева (справа) на элементы из R, называется левым (правым) R-модулем в R, если, кроме того, $\mathfrak{A}$ — нормальный делитель в R, то $\mathfrak{A}$ называется левым (правым) идеалом в R. Двусторонние модули и идеалы называются просто модулями и идеалами. Изучается структура односторонних и двусторонних модулей и идеалов почти кольца R. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ — два подмножества в R. Под $\mathfrak{A}$ понимается подгруппа R^+, порожденная всеми произведениями $a \cdot b$ для $a \in \mathfrak{A}$, $b \mathfrak{A}$ $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{A}o\mathfrak{b}$ — нормальный делитель в R^+, порожденный элементами $a \cdot b$. На основании этих определений вводятся произведения и степени модулей и идеалов, которые сами оказываются модулями и идеалами. Аналогично тому, как это делается в кольцах, вводится также понятие частного идеалов и модулей. Исследуются свойства этих операций.

Коммутатор (a, b) двух элементов a, b определяется, как обычно: $(a, b) = -a-b+q+b$. Вводится также понятие дистрибутора $[x/a, b]$ трех элементов $[x/a, b] = x(a+b) - xa - xb$. Для двух подмножеств $\mathfrak{A}$ почти кольца R определяется коммутант $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ как подгруппа в R^+, порожденная всеми (a, b), $a \in \mathfrak{A}$ $в \in \mathfrak{b}$, соответственно дистрибутант $[\mathfrak{n}|\mathfrak{A},\mathfrak{b}]$ трех подмножеств $\mathfrak{n}, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}$ — это подгруппа, порожденная всеми дистрибуторами $[n/a, b]$, $n \in \mathfrak{n}$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in$. Изучаются коммутанты и дистрибутанты для случая, когда $\mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}$ являются модулями или идеалами. Естественным образом определяются также возрастающие и убывающие ряды коммутантов и дистрибутантов. С помощью этих понятий выясняется связь между отклонениями R^+ от коммутативности и отклонением почти кольца R от дистрибутивности.

Во второй части работы изучаются гомоморфизмы д. п.

почти колец в почти кольца отображений некоторой группы Ω в себя. Такие гомоморфизмы называются представлениями почти колец R. В теории представлений выясняются пока что только самые простые и элементарные свойства. Проблема обозрения и классификаций представлений пока не затрагивается. Указывается, что работа будет продолжена. Л. А. Калужнин

7548. Метаматематические замечания о линейно упорядоченных множествах. Бет (Observations métamathématiques sur les structures simplement ordonnées. Beth E. W.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, **A5**, 29—35 (франц.)

Простейшие теоремы о линейно упорядоченных множествах (цепях). Сравниваются различные способы аксиоматизации этого понятия. Ю. А. Шиханович

7549. К одному вопросу, предложеному Биркгофом. Курцио (Su di una questione proposta da G. Birkhoff. Curzio Mario), Ricerche mat., 1957, **6**, № 1, 27—33 (итал.)

Рассматривается 9-я проблема Биркгофа (Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952): для заданного N найти наименьшее число $\psi(N)$ такое, что всякая структура, состоящая более чем из $\psi(N)$ элементов, содержала бы подструктуру из N элементов. Ю. И. Сорокин

7550. Исправление к моей статье «Обобщение теоремы Биркгофа...». Сас (Correction to my paper «Generalization of a theorem of Birkhoff...». Szasz G.), Acta scient. math., 1955, **16**, № 3-4, 270 (англ.)

Приводится исправленное доказательство теоремы 3, указанной в заглавии работы автора (РЖМат, 1957, 1206). А. Х. Лившиц

7551. Вполне свободные структуры, порожденные частично упорядоченными множествами. Дин (Completely free lattices generated by partially ordered sets. Dean R. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **83**, № 1, 238—249 (англ.)

Известно (РЖМат, 1955, 2139), что частично упорядоченное множество можно превратить в структуроид различными способами. Множество всех структуроидозаций частично упорядоченного множества P составляет полную структуру с единицей I и нулем 0. Каждой структуроидозации частично упорядоченного множества P соответствует некоторое его свободное расширение. Ранее подробно изучались свободные расширения, соответствующие структуроидозации 0 (обозначается $FL(P)$). В работе рассматриваются свободные расширения, соответствующие структуроидозации I, называемые вполне свободными структурами, порожденными P, и обозначаемые через $CF(P)$.

Показано, что часть результатов Уитмена (Whitman, Ann. Math., 1941, (2), **42**, 325—330; 1942, **43**, 104—105) для $FL(P)$ переносится на $CF(P)$, в частности существование канонической формы для слов и, следовательно, решение проблемы тождества слов для $CF(P)$. Далее доказана теорема 4, дающая необходимые и достаточные условия идентичности $FL(P)$ и $CF(P)$. Эта теорема усиливает результат референта (Матем. сб., 1952, **30**, № 3, 677—694) о том, что для совпадения $FL(P)$ и $CF(P)$ при конечном P необходимо и достаточно, чтобы P было теоретико-множественным объединением дизъюнктных цепей.

Две последние теоремы (6 и 7) дают достаточные условия для того, чтобы подмножество S в $CF(P)$ порождало соответственно $CF(S)$ и $FL(S)$. Эти результаты позволили автору более простым путем получить результаты референта (Матем., сб., 1952, **30**, № 3, 677—694) о бесконечности свободного объединения двух двухэлементных цепей и свободного объединения одноэлементной структуры с четырехэлементной цепью.

Ю. И. Сорокин

7552. Двоякодистрибутивная m-структура. Чаудхури (The doubly distributive m-lattice. Choudhury A. C.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 2, 71—74 (англ.)

Рассматриваются структуры (относительно операций $a+b$ и $a\times b$) с умножением (ab), удовлетворяющие законам:

1) $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$;
2) $a(b\times c)=ab\times ac$, $(b\times c)a=ba\times ca$;
3) $(a+b)(a\times b)=ab$.

Такие структуры названы двоякодистрибутивными m-структурами. Показано, что если (второе) умножение ab коммутативно, ассоциативно и удовлетворяет закону сокращения, то из любых двух законов 1)—3) следует третий. Показано, что двоякодистрибутивная m-структура является дистрибутивной структурой, если (второе) умножение (ab) удовлетворяет закону сокращения. В доказательстве допущена досадная опечатка: в 5-й строке снизу на стр. 73 вместо $[(a\times c)+(a\times b)c]$ должно быть $[(a\times c)(a+c)+(a+b)c]$.

Работа может рассматриваться как частный ответ на 92-ю проблему Биркгофа (Теория структур, М., Изд-во Ин. лит., 1952, стр. 288). Ю. И. Сорокин

7553. О B-покрытиях и понятии независимости в структурах. Мацусима (On B-covers and the notion of independence in lattices. Matsushima Yataro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 8, 462—467 (англ.)

Продолжая свои прежние исследования (РЖМат, 1958, 7715,), автор изучает связь между B-покрытиями $B(a,b)$, относительной модулярностью и независимостью элементов. Пара элементов (a,b) называется [относительно] модулярной (в обозначениях $(a,b)\,M\,[ab\leqslant x\leqslant b]$), если для всякого $x\leqslant b$ $(ab\leqslant x\leqslant b)$ имеет место равенство $(x+a)b=x+ab$. Если S и T — подмножества множества $\{1,2,\ldots,n\}$, то будем писать $S<T$, если $i<j$ для любых $i\in S$ и $j\in T$. Система элементов $a_1,\ldots,a_n$ называется независимой (в обозначениях: $(a_1,\ldots,a_n)\perp$), если из $S<T$ вытекает, что $(\Sigma_{i\in S}a_i)(\Sigma_{j\in P}a_j)=0$ и $(\Sigma_{i\in S}a_i,\ \Sigma_{j\in S}a_j)M$. Наряду с множеством $B(a,b)$ рассматриваются множества $J(a,b)=\{x;\,ax+bx=x\}$ и $CJ(a,b)=\{x;\,(a+x)(b+x)=x\}$. Доказывается эквивалентность следующих условий: а) для всякого $b'\leqslant b$ имеет место $b'+ab\in CJ(a,b)$; б) для всякого $b'\leqslant b$ имеет место $(b'+a)\in J(a,b')$; в) $(a,b)\,M$. $(a,b)\,M^*$; г) из $ab\leqslant b'\leqslant b$ вытекает $b'\in CJ(a,b)$. Из других результатов отметим следующие: 1. Если $(a_1,\ldots,a_n)\perp$, то $a_{k_1}+\ldots+a_{k_t}\in B\ a_i, a_{i+1}+\ldots+a_n)$, где $i\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_t\leqslant n$, $i=1,2,\ldots,n-1$; 2. Если $CJ(a_i,a_{i+1}+\ldots+a_n)=L$ для каждого $i=1,\ldots,n-1$, то $(a_1,\ldots,a_n)\perp$; 3. Одновременное выполнение соотношений $(a_1J(a_2,a_3))\perp$ и $(a_2J(a_3,0))\perp$ равносильно выполнению соотношения $(a_1,a_2,a_3)\perp$.

Л. А. Скорняков

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

7554. Синтез смешанных релейных схем класса π. Рогинский В. Н., Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 12, 1120—1131 (рез. англ.)

Рассматривается метод преобразования релейно-контактных цепей, но и от соотношений параметров реле сопротивления и обмотки реле, причем сопротивления и обмотки реле относительно друг друга могут быть включены как последовательно, так и параллельно. В таких схемах, называемых смешанными схемами, работа отдельных реле зависит не только от состояния контактных схем, содержащих, кроме контактов, также и сопротивлений (проводимостей), способа их соединения и величины приложенного напряжения. В отличие от контактов сопротивления и обмотки реле названы элементами конечной проводимости. Вводится понятие «порядка проводимости», которое характеризует

действие элемента конечной проводимости на реле. Если проводимость G не влияет на работу реле A ни при последовательном, ни при параллельном соединении с реле A, проводимость G считается одного порядка с проводимостью реле A и обозначается через $G_{=A}$.

Если проводимость G не влияет на работу реле A при последовательном соединении ее с реле A, а при параллельном соединении нарушает работу реле A, то проводимость G считается имеющей больший порядок, чем проводимость реле A, и обозначается через $G_{>A}$.

Если же проводимость G не влияет на работу реле A при параллельном соединении ее с реле A, а при последовательном соединении нарушает работу реле A, то проводимость G считается имеющей меньший порядок, чем проводимость реле A, и обозначается через $G_{>A}$

При наличии в схеме нескольких реле накладывается ряд ограничений.

Приведены способы преобразования смешанных релейных схем с элементами конечной проводимости. При этом дается трактовка применения основных законов алгебры логики для схем с элементами конечной проводимости. В заключение приводятся два примера преобразования релейных схем, иллюстрирующих предложенную методику. Библ. 10 назв. См. также РЖМат, 1956, 4125. В. Г. Лазарев

7555. Применение импликации в теории релейных схем. Майстрова Т. Л., Сб. статей Всес. заочн. политехн. ин-та, 1957, вып. 16, 47—50

Рассматриваются условия прохождения тока через схему, содержащую контакты и одну обмотку реле X. Когда контактная цепь f соединена последовательно с X, то используется импликация и правило вывода: «если f — замкнутая цепь, а $f \to X$ —последовательное соединение цепи f с X, то через обмотку X идет ток». Из соотношения импликации и связки «ИЛИ» получено правило вывода для заключения о прохождении тока через X в случае параллельного соединения f и X. Так как $f \to X = \bar{f} \vee X$, то в случае параллельного соединения f и X ток проходит через обмотку X, когда цепь f разомкнута. Приводятся примеры доказательства эквивалентности действия схем класса П, содержащих одну обмотку. Автореферат

7556. Графический синтез симметрических контактных схем. Поваров Г. Н., Приборостроение, 1956, № 12, 7—9

Излагается новый графический метод составления (синтеза) симметрических контактных схем, дающий лучшие результаты, чем методы, изложенные в предыдущих двух работах автора. Симметрическими являются многие вычислительные и защитные контактные схемы, как, например, контактный двухполюсник с 4 приемными элементами (реле, лампы и др.), замыкающийся при срабатывании любых 2, 3 или даже всех 4 приемных элементов. Рассматриваются симметрические контактные схемы с одним входом и несколькими выходами. Ко входу присоединяется источник напряжений, а к выходам — обмотки реле, нити ламп и другие исполнительные элементы. Приводятся 2 примера построения по предлагаемому методу: схемы защиты от помех и схемы разрядной ячейки двоичного сумматора с реле переноса. Т. И. Л.

7557. К синтезу симметрических контактных схем. Поваров Г. Н., Сб. работ по автоматике и телемеханике, АН СССР, 1956, 268—277

Излагается метод синтеза симметрических контактных $(1, k)$-полюсников, основанный на соединении k контактных решеток, реализующих k элементарных симметрических функций $n—m$ переменных, с универсальным контактным многополюсником симметрических функций m переменных. Излагаемый в работе метод синтеза является видоизменением метода универсальных многополюсников, предложенного Шенноном (Shannon C. E., Bell. System Techn. J., 1949, **28**, № 1, 59) для синтеза двухполюсных контактных схем и примененного затем Гильбертом (Gilbert E. N., Bell System Techn. J., 1951, **30**, № 3, 668) для синтеза контактных многополюсников.

Вводится ряд определений, в терминах которых формулируются доказываемые в работе теоремы, лежащие в основе излагаемого метода синтеза. Доказано, что число контактов в симметрическом $(1, k)$-полюснике, построенном по описанному методу, не превосходит

$$\psi(m) = k(n-m)^2 + k(n-m) + 2^{m+3} - 6m - 8,$$

и даны некоторые оценки наименьшего натурального числа M, для которого

$$\Delta\psi(M) \equiv \psi(M+1) - \psi(M) > 0.$$

Для иллюстрации изложенного метода синтеза рассмотрен пример. Схема, реализующая функцию $S_{1,3,4}(x_1, \ldots, x_6)$ по методу универсальных многополюсников, содержит 31 контакт, а схема, полученная для той же функции по методу симметрических решеток, имеет 35 контактов. Схемы, реализующие функции одного типа с симметрическими функциями, получаются из схем, реализующих соответствующие симметрические функции, заменой замыкающих контактов некоторых приемных элементов на размыкающие, а размыкающих контактов — на замыкающие. См. также РЖМат, 1955, 458, 4012. Библ. 9 назв. В. И. Шестаков

7558. Синтез схем с шаговыми переключателями. Остиану В. М., Сб. работ по автоматике и телемеханике. М., АН СССР, 1956, 253—267

Кратко излагается алгебра контактных схем с шаговыми переключателями, названная автором предикативной и представляющая собой обобщение булевой алгебры. В применении к шаговым переключателям она удобнее многозначных логических исчислений.

Вводятся определения: 1) квазиразделительного (p, q)-полюсника как ориентированного многополюсника, у которого любой путь из выхода i в выход j $(i \neq j)$ проходит хотя бы через один вход; 2) пучка из q $(1, k)$-полюсников как $(1, xq)$-полюсника, образованного из q $(1, k)$-полюсников путем соединения их входов; 3) транзитивной (p, q)-матрицы $\|f_{ij}\|$ предикативных функций как матрицы, обладающей тем свойством, что из $f_{ij} = f_{jk} = 1$ следует $f_{ik} = 1$ (при любых i, j, k).

Излагается метод построения квазиразделительных универсальных многополюсников.

Доказывается теорема, что любую транзитивную (p, q)-матрицу $\|f_{ij}\|$ предикативных функций можно реализовать при любом m, $0 \leqslant m \leqslant n$, соединением p пучков по q деревьев $n—m$ многозначных переменных и q квазиразделительных универсальных многополюсников остальных m переменных. Выводятся оценки сверху числа контактов в схемах (p, q)- и $(1, k)$-полюсников, построенных методами квазиразделительных и нормальных универсальных многополюсников.

Излагается метод построения симметрических двухполюсников и (p, q)-полюсников с шаговыми переключателями, представляющий собой обобщение аналогичного метода для построения симметрических схем с двухпозиционными элементами. Описывается метод построения симметрических квазиразделительных универсальных многополюсников. Вычисляются оценки сверху числа контактов в симметрических двухполюсниках и (p, q)-полюсниках. Автореферат

7559. О некоторых матричных методах анализа релейно-контактных схем. Поваров Г. Н., Сб. работ по автоматике и телемеханике. М., АН СССР, 1956, 278—285

Излагается новый метод алгебраизации процесса разыскания путей тока в контактно-вентильных схе-

мах. Для формулировки метода вводятся понятия нумероида и квазиминора.

Нумероидом называется множество A, для элементов которого определены две ассоциативные и коммутативные операции $x+y$ и $x \cdot y$, из которых вторая дистрибутивна относительно первой, причем в A существуют такие единственные элементы 0 и 1, что $x+0=0+x=x$ и $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

Квазиминором $|a_{ij}\nearrow_{lk}|_{kl}$ квадратной матрицы $||a_{ij}||$ над нумероидом называется при $k \neq l$ сумма $\Sigma_{i_1, i_2, \ldots, i_r} a_{ki_1}, a_{i_1}, \ldots a_{i_r l}$ (где суммирование производится по всем размещениям, которые можно образовать из рядов матрицы $||a_{ij}\nearrow_{kk}\nearrow_{ll}||$, а при $k=l$ так называется элемент a_{kk}; символ $||a_{ij}\nearrow_{kl}||$ означает матрицу, получаемую из матрицы $||a_{ij}||$ вычеркиванием k-й строки и l-го столбца.

Доказаны три теоремы:

1) Если $k \neq l$, то $|a_{ij}\nearrow_{lk}|_{kl} = \sum_{m \neq k} a_{km} A^{(l)}_{km}$, где $A^{(l)}_{km} = 1$ при $m=l$ и $A^{(l)}_{km} = |a_{ij}\nearrow_{lk}\nearrow_{km}|_{ml}$ при $m \neq l$.

2) Число всех путей из узла k в узел l, где $k \neq l$, равно $|a_{ij}\nearrow_{lk}|_{kl}$, где a_{ij} — число непосредственных путей из узла i в узел j.

3) Полная контактная проводимость между узлами k и l равна $|f_{ij}\nearrow_{lk}|_{kl}$, где f_{ij} — непосредственная контактная проводимость между узлами i и j.

Теорема 3 дает метод анализа контактно-вентильных схем, близкий к методу анализа этих схем посредством вычисления булевых миноров, описанному Б. И. Арановичем (Автоматика и телемеханика, 1949, №6) и А. Г. Лунцем (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, 16, №5).

Для анализа схем по условиям несрабатывания используются квазиминоры второго рода, двойственные ранее введенным квазиминорам и совпадающие с булевыми минорами, введенными в ранее опубликованной работе автора (РЖМат, 1955, 4011). Библ. 7 назв. В. И. Шестаков

7560. Об одном применении математической логики. Остиану В. М., Томфельд Ю. Л., Уч. зап. Кишеневск. ун-та, 1957, 29, 227—234

Описывается применение математической логики к структурному анализу схем с многопозиционными элементами типа шаговых переключателей на l положений. Если j-й ламели переключателя приписать переменную x^j ($j=0,1,\ldots,l-1$) и считать, что $x^j=1$, когда щетка переключателя находится на j-й ламели, и $x^j=0$ при других положениях щетки, то для схем с такими контактами справедливы почти все соотношения алгебры логики, за исключением тождеств $x\bar{x}=0$ и $x+\bar{x}=1$, которые заменяются соотношениями: 1) $x^i x^j = 0$ при всех $i \neq j$; 2) $x^0 + x^1 + \ldots + x^{l-1} = 1$. Приводится формула разложения

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} f(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}.$$

Предложенная алгебра схем с многопозиционными элементами названа предикативной. Приведено несколько примеров применения изложенного аппарата к схемам с контролерами. В. Н. Рогинский

7561. Синтез релейно-контактных схем при данных условиях срабатывания исполнительных элементов. Моисил Гр. К., Иоанин Г., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, 1, № 2, 205—236

Излагается чисто алгебраический метод синтеза контактных схем. Рассматривается рекуррентное уравнение вида $P_{N+1} = F(a_N, \ldots, c_N, P_N)$, где P — элемент совокупности, состоящей из n положений релейных контактов; P_N — значение P в N-м промежутке времени; $a, \ldots, c$ — переменные с двумя значениями, соответствующие состояниям кнопок управления. Исходя из этого уравнения, определяют минимальное число реле, с помощью которых может быть реализована заданная последовательность работы исполнительных элементов. Метод иллюстрирован 6 примерами синтеза контактных схем. Библ. 5 назв. А. А. Архангельская

7562. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах. Канторович Л. В., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 4, 738—741

Использование цифровых вычислительных машин не только для численных вычислений, но и для выполнения самых разнообразных работ логического характера выдвигает задачу разработки практически удобных и универсальных методов введения заданий в машину и единых методов их выполнения. Здесь существенны три вопроса: 1) создание единообразной универсальной символики, достаточно компактной и удобной для обращения с ней на машине; 2) разработка удобных форм описания расположения материала в машине; 3) разработка единых методов обработки задания, безотносительно к его конкретному содержанию («машинная алгебра»). В качестве основной формы описания математических заданий предлагается абстрактная схема, определяющая отношения и связи между различными объектами, которые обозначаются целочисленными номерами. Схема представляет собой ряд строк вида

$$k_1 = (k'_1, k''_1, k'''_1), \quad k_2 = (k'_2, k''_2, k'''_2), \ldots$$

Здесь $k_1, k_1', \ldots$ —номера, и каждая строка говорит о том, что некоторый объект определяется объектами, записанными справа. Сами операторы также включаются в число объектов. Например, запись $d=(+, a, b)$ означает $d=a+b$. Мы имеем решение схемы, если при подстановке в уравнения схемы вместо номеров соответствующих объектов равенства удовлетворяются.

Вводится понятие явных схем, опорных и результативных элементов, подсхем. Рассматривается вопрос об упрощениях и преобразованиях схем и применении их к аналитическим преобразованиям на машине. Н. П. Трифонов

7563. Арифметический анализ схем цифровых вычислительных машин. Джефри (Aritmetical analysis of digital computing nets. Jeffrey Richard C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 360—375 (англ.)

Рассматривается задача проверки схем цифровых машин с помощью математической логики.

Арифметическая схема устройства определяется как логическая схема этого устройства вместе со способом представления чисел в устройстве. Логическая схема устройства описывается с помощью булевой алгебры и операторов: задержки D, сдвига S и циклического сдвига C_m. Рассматриваются три способа представления чисел: в виде целого положительного числа $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{i-1}$; в виде положительной дроби $b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$; в виде дроби со знаком $\beta_m(x) = \sum_{i=1}^{m} (x_{m-1} - x_m) 2^{-i}$. Здесь $(x_n, \ldots, x_2 x_1)$ есть код числа, заданного в машине временной последовательностью или позиционным расположением. Оператор сдвига определяется условием $(Sx)_i = x_{i-1}$ $(i=2, \ldots, n)$, $(Sx)_1 = 0$; оператор задержки — условием $(Dx)_i = x_{i-1}$ $(i=2, \ldots, n)$, $(Dx)_1 = 0$, оператор циклического сдвига — условием $(C_m x)_i = x_{i-1}$ $(i=2, \ldots, m)$ $(C_m x)_1 = 0$ $(C_m x)_i = x_i$, $i = m+1, m+2, \ldots, n$. При-

водятся формулы, выражающие логические функции от чисел через поразрядные действия над числами:

$$B(x \vee y) = B(x) + B(y) - B(x \,\&\, y),$$

$$B(x \otimes y) = B(x) + B(y) - 2B(x \,\&\, y),$$

$$B(x \vee y \vee z) = B(x) + B(y) + B(z) - B(x \,\&\, y) - B(y \,\&\, z) - B(z \,\&\, x) + B(x \,\&\, y \,\&\, z),$$

$$B(x \otimes y \otimes z) = B(x) + B(y) + B(z) - 2B(x \,\&\, y) - 2B(y \,\&\, z) - 2B(z \,\&\, x) + 4B(x \,\&\, y \,\&\, z),$$

$$B(x \,\&\, y) = B(x) - B(x \,\&\, y),$$

$$B(x \,\&\, y) \leqslant B(y),$$

$$B_n(\bar{x}) = 2^n - 1 - B_n(x),$$

$$B_{n+1}(D\,x) = 2\,B_n(x),$$

$$B_{n+1}(S\,x) = 2\,B_n(x).$$

$$B_n(C_m\,x) = 2\,B_n(x) - 2^n x_n + x_m \quad \text{при } n \leqslant m.$$

$$B_m(x) = 2^{m-1}\,\beta_m(x) + x_m(2^m - 1).$$

Эти выражения позволяют анализировать правильность составления схем сумматоров и счетчиков, как последовательных, так и параллельных, но неприменимы непосредственно к анализу схем умножения и деления. Автор предлагает использовать полученные результаты для анализа схем умножения и деления, применяя их к итерационным формулам, которыми описывается процесс получения произведения или частного в машине. Автор считает, что методы арифметического анализа применимы не только к схемам с представлением чисел двоичным кодом, но и двоично-десятичным. Библ. 4 назв.

Э. С. Касимов

7564. Минимизация схем. Процесс суммирования к единице для неупростимых сумм. Самсон, Мюллер (Circuit minimization: sum to one process for irredundant sums. Samson Edward W., Mueller Rolf K. Techn. Rept. Commun. Lab., Electronics Res. Direct., Air Force Cambridge Res. Center, Cambridge, Mass, 1955, № 55—118, vii, 16 pp.) (англ.)

Задача упрощения переключательных схем, будучи тесно связана с задачей упрощения функций истинности, вызвала исследования булевых функций и булевых матриц. Авторы, исходя из анализа, данного Куайном (Quine W. V., Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 521—531), разработали алгорифм для проверки равенства булевой функции единице. Этот процесс «суммирования к единице» основан на следующей теореме: Если a_j, b_k, c_l и R суть булевы функции, не содержащие булеву переменную s явно, то

$$s\sum_j a_j + \bar{s}\sum_k b_k + \sum_l c_l \geqslant R$$

тогда и только тогда, когда $\sum_{j,k} a_j b_k + \sum_l c_l \geqslant R$.

Этот алгорифм суммирования к единице затем применяется к нахождению всех минимальных и неупростимых булевых сумм, эквивалентных данной булевой функции. Референт полагает, что метод применения основного рассматриваемого алгорифма к главной задаче можно значительно прояснить, попытавшись, например, запрограммировать его для какой-либо автоматической вычислительной машины. S. Gorn

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 673

7565. Некоторые замечания относительно логических схем двоичных счетчиков. Браун (Some notes on logical binary counters. Brown R. M.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, EC-4, № 2, 67—69 (англ.)

Рассматриваются возможные логические схемы включения каскадов двоичных счетчиков, использующих вторую последовательность триггеров для хранения переносов. Взаимное управление при установке этих триггеров и осуществление переноса выполняются с помощью логических схем от триггера более младшего разряда. Первоначально этот метод предложил Уэр (Реф.) Двоичный реверсивный счетчик, построенный на таком принципе, может быть применен для определения положения вала. Для этого используется диск с двумя рядами перекрывающихся щелей и два фотоэлемента. Такое устройство не имеет неопределенности при фиксировании положения вала. Точность его работы определяется размерами щели и оптикой. А. Б. Залкинд

7566. Анализ логических действий триггерных схем с помощью таблиц временных последовательностей. Арант (A time-sequential tabular analysis of flip-flop logical operation. Arant Gene W.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 2, 72—74, 124 (англ.)

Отмечается, что основной задачей анализа триггерных схем является определение входных сигналов, необходимых для получения нужных импульсов на выходе. Рассматривается метод анализа с помощью уравнений и табличный метод. В качестве примера разобраны триггерные схемы с одним и двумя устойчивыми состояниями.

Уравнения служат для буквенной записи элементов информации, запасаемых отдельной триггерной схемой в зависимости от приходящих извне сигналов и от информации, которая была запасена ранее. В таблицах в виде нулей и единиц записываются те же данные. Как на основе уравнений, так и на основе таблиц можно решить вопрос о входных воздействиях, необходимых для получения требуемого выхода. Табличный метод имеет преимущества, когда нужно анализировать не все возможные информационные условия. Ю. Л. Томфельд

7567. Теория сетей. Хон, Сешу, Ауфенкемп (The theory of nets. Hohn F. E., Seshu S., Aufenkamp D. D.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 3, 154—161 (англ.)

Пусть дано конечное множество каких-либо объектов $v_1, v_2, \ldots, v_m$, называемых вершинами, и их упорядоченных пар $b_k = (v_i, v_j)$, называемых ребрами, причем каждой вершине однозначно сопоставляется ее вес w_i, являющийся элементом некоторого конечного или бесконечного, дискретного или непрерывного множества; каждому ребру аналогично сопоставляется его вес x_k (вообще говоря, из другого множества). Такая совокупность вершин и ребер называется сетью. В качестве частных случаев это понятие включает ориентированные и неориентированные графы, релейно-контактные схемы, электрические схемы с сопротивлениями и источниками электродвижущей силы. Конкретной интерпретацией общего случая являются диаграммы переходов для последовательностных машин, которые Муром были абстрактно определены как системы, состоящие из конечного множества состояний $s_1, s_2, \ldots, s_n$, входов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и выходов $y_1, y_2, \ldots, y_q$, причем задание входа и состояния в настоящий момент однозначно определяет состояние и выход в следующий момент (сб. „Автоматы", М., Изд-во Ин. лит., 1956, стр. 179—210). Вершина сети здесь истолковывается как состояние машины; ее вес — как выход машины в данном состоянии; ребро — как переход, совершаемый машиной; его вес — как вход, при наличии которого этот переход осуществляется.

Вводятся матрицы, описывающие данную сеть, и доказывается несколько теорем о путях в сети. Ориентированным путем длины r называется множество ребер вида $(v_i, v_{k_1}), (v_{k_1}, v_{k_2}), \ldots, (v_{k_{r-1}}, v_j)$. Путь называется собственным, если все эти вершины различны,

и циклом, если $i = j$. Собственный цикл, содержащий все вершины, называется ориентированной гамильтоновой линией сети. Теорема 4 утверждает, что элементы матрицы $C_q = \sum_{k=1}^{q} C^k$ содержат в качестве слагаемых все собственные пути, длина которых не превосходит q, если $C = C^1$, называемая матрицей соединений, определяется равенствами $c_{ij} = \sum^{1} x_k$, где сумма распространяется на все ребра, идущие от вершины i к вершине j, а x_k означает вес такого ребра (степень здесь формально понимается в смысле обычного матричного произведения, а смысл сложения и умножения зависит от конкретной интерпретации). При составлении матриц C^k предпринимаются некоторые стандартные упрощения с целью избежать появления несобственных путей. Следствие теоремы: все ориентированные гамильтоновы линии сети могут быть найдены как те слагаемые диагональных элементов матрицы C_n, которые содержат n множителей. Предполагается в дальнейшем продолжить исследование последовательностных машин матричным методом для формализации и обобщения результатов Мура. В заключение дается алгорифм нахождения всех собственных путей между двумя вершинами, исключая остальные вершины по способу Хона и Шисслера (РЖМат, 1958, 1898), заимствованному у Лунца (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, **16** 405—426). Библ. 28 назв. В. К. Детлов

7568. Проблемы теории устройств релейного действия. (Всес. совещание в Москве). Остиану В. М., Вестн. АН СССР, 1958, № 1, 131—132

Краткий обзор докладов на совещании, проведенном 3—9 октября 1957 г. Институтом автоматики и телемеханики АН СССР.

7569. Применение теории релейно-контакторных схем к разработке систем электрического управления станочными линиями. Габрилов М. А. В сб.: Автоматизация технол. процессов в машиностр. Привод и управление машинами. М., АН СССР, 1956, 99—120

См. также: 7658, 7669, 7734; 8070; 8206

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров*, *А. С. Шварц*

7570. Накрывающие пространства. Фундаментальная группа. Серр (Revêtements. Groupe fondamental. Serre-Jan-Pierre), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1958, **37**, № 188, 109—120 (франц.)

Дается определение накрывающего пространства и фундаментальной группы и указывается связь между этими понятиями. Приводятся примеры. А. С. Шварц

7571. Работа и влияние профессора Лефщеца в алгебраической топологии. Стинрод (The work and influence of professor S. Lefschetz in algebraic topology. Steenrod Norman E.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 24—43 (англ.)

7572. Ориентация круга. Уайберн (Sense and orientation on the disk. Whyburn G. T.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 2, 103—106 (англ.)

Элементарное определение ориентации простой замкнутой кривой и круга. А. С. Шварц

7573. О теореме Жордана. Альбрехт (Despre teorema lui Jordan. Albrecht F.), Gaz. mat. si fiz., 1958, **10**, № 1, 1—15 (рум.; рез. франц., русск.)

Приводится элементарное доказательство теоремы Жордана для плоской кривой и некоторых связанных с этой теоремой предложений. А. С. Шварц

7574. О диаграммах Хегора рода два с конечными фундаментальными группами. Меннике (Über Heegaarddiagramme vom Geschlecht zwei mit endlicher Fundamentalgruppe. Mennicke J.), Arch. Math., 1957, **8**, № 3, 192—198 (нем.)

На поверхности рода 2 указываются некоторые диаграммы Хегора, имеющие конечные фундаментальные группы. Вопрос о гомеоморфности соответствующих многообразий, так же как и вопрос о существовании иных диаграмм Хегора с конечными фундаментальными группами не рассматривается. М. М. Постников

7575. Одно свойство неразложимых связных множеств. Рудин (A property of indecomposable connected sets. Rudin Mary Ellen), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1152—1157 (англ.)

Связное множество I называется неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух связных множеств, ни одно из которых не является плотным в I.

Доказывается теорема: Пусть I — неразложимое связное подмножество плоскости и p — предельная точка множества I. Тогда множество IUp также является связным неразложимым множеством. А. С. Пархоменко

7576. Тип $(n\ k)$-сцепления и неразложимость. Хантер (Type of (n, k) adherence and indecomposability. Hunter R. P.), Portugaliae, math., 1956, **15**, № 3-4, 115—122 (англ.)

Пусть M — связное топологическое пространство. Автор говорит, что множества $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ образуют (n,k)-сцепленную последовательность пространства M, если существуют такие множества $M_0 = M, M_1, M_2, \ldots, M_n, V$, что M_i — собственное связное замкнутое подмножество M_{i-1}, V — открытое подмножество M_k, $P_i \cap M_{i-1} \neq 0$ и $M \setminus P_1 \supset M_1 \setminus P_2 \supset M_2 \setminus P_3 \supset \ldots \supset M_{n-1} \setminus P_n \supset M_n \supset V \supset P_{n+1}$. В работе устанавливается связь понятия (n,k)-сцепленной последовательности с понятиями неразложимости, наследственной неразложимости, n-неразложимости и т. д. Доказывается ряд теорем относительно этих понятий. А. С. Пархоменко

7577. Об открытых отображениях. Ханаи (On open mappings. Hanai Sitiro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 4, 177—180 (англ.)

Рассматриваются открытые отображения топологического пространства X на топологическое пространство Y. Доказываются теоремы:

1. Если f — замкнуто и X семибикомпактно (периферически бикомпактно), то тем же свойством обладает и Y.

2. Если Y удовлетворяет первой аксиоме счетности и прообразы $f^{-1}\,y$ связаны для всех $y \in Y$, а их границы — бикомпактны, то снова из периферической бикомпактности X следует периферическая бикомпактность Y. При этом f оказывается автоматически замкнутым отображением. П. С. Александров

7578. Компактные отображения. Халфар (Compact mappings. Halfar Edwin), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 828—830 (англ.)

Из нескольких доказанных в работе теорем приведем в качестве примера следующую: Для того чтобы непрерывное отображение f T-пространства X на локально бикомпактное пространство Y было бикомпактным (в том смысле, что прообраз $f^{-1}\,K$ всякого бикомпактного множества $K \subseteq Y$ бикомпактен), необходимо и достаточно, чтобы f было замкнуто и чтобы прообразы точек f^{-1} были бикомпактны. П. С. Александров

7579. О проблеме Монтгомери. Ян Чжун-дао (On a problem of Montgomery. Yang Chung-Tao). Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 255—257 (англ.)

Пусть в топологическом пространстве E действует группа G. Через G_p обозначается стационарная подгруппа точки $p \in E$ (т. е. совокупность преобразований группы G, оставляющих точку p на месте). Говорят, что орбита группы G, проходящая через точку p, эквивалентна орбите, проходящей через точку q, если подгруппы G_p и G_q сопряжены.

В работе доказывается следующая гипотеза Монтгомери: орбиты компактной группы Ли G, дифференцируемо действующей на гладком замкнутом многообразии M, распадаются на конечное число классов эквивалентности.

Приводится построенный Монтгомери пример, показывающий, что в только что сформулированной теореме нельзя отказаться от требования замкнутости многообразия M. А. С. Шварц

7580. Эквивариантные вложения в евклидово пространство. Мостов (Equivariant embeddings in Euclidean space. Mostow G. D.), Ann. Math., 1957, **65**, № 3, 432—446 (англ.)

Основной результат: Пусть в сепарабельном метрическом конечномерном пространстве X эффективно действует компактная группа Ли G. Предположим, что группа G имеет конечное число неэквивалентных орбит в X (реф. 7579). Тогда существует такое гомоморфное отображение φ пространства X в евклидово пространство E^n и такое изоморфное отображение θ группы G в группу n-мерных ортогональных матриц, что отображение φ эквивариантно по отношению к θ, т. е. $\varphi(g(p)) = \theta(g)(\varphi(p))$ для всех $p \in X$, $g \in G$. Если группа G действует в X без неподвижных точек, то отображения φ и θ можно выбрать так, чтобы для любого $g \ni G$ начало координат было единственной точкой пространства E^n, неподвижной при преобразовании $\theta(g)$.

Из основного результата выводится ряд интересных теорем. Доказывается

Теорема. В компактной группе Ли всякое множество (связных) аналитических подгрупп, нормализаторы которых попарно не сопряжены между собой, конечно. Всякое множество полупростых аналитических подгрупп, попарно не сопряженных между собой, конечно. С. В. Фомин

7581. Орбиты торов, действующих на многообразиях. Флойд (Orbits of torus groups operating on manifolds. Floyd E. E.), Ann. Math., 1957, **65**, № 3, 505—512 (англ.)

Пусть на замкнутом ориентируемом многообразии M (не обязательно дифференцируемом) действует компактная связная коммутативная группа G. Доказывается, что среди орбит группы G имеется лишь конечное число неэквивалентных (реф. 7580), т. е. что среди стационарных подгрупп G $(p \in M)$ имеется лишь конечное число различных. А. Л. Онищик

7582. О гипотезе Монтгомери. Мостов (On a conjecture of Montgomery. Mostow G. D.), Ann. Math., 1957, **65**, № 3, 513—516 (англ.)

Автор доказывает, что компактная группа Ли G, действующая на замкнутом многообразии M, имеет конечное число неэквивалентных орбит (реф. 7580). В случае, когда G — связная коммутативная группа, этот результат был получен Флойдом (реф. 7581) в случае, когда M—гладкое многообразие и преобразования группы G дифференцируемы, этот результат получил Ян Чжун-дао (реф. 7579). В доказательстве автора используется результат Флойда. А. С. Шварц

7583. Инволюции на сферах. Уайтхед (On involutions of spheres. Whitehead J. H. C.), Ann. Math., 1957, **66**, № 1, 27—29 (англ.)

Для натуральных чисел n и q, удовлетворяющих условиям $q \geqslant 4$, $n \geqslant 2q+6$, строится симплициальная инволюция комбинаторной сферы S^n (т. е. полиэдра, комбинаторно эквивалентного границе $(n+1)$-мерного симплекса), множество неподвижных точек которой является q-мерным многообразием с нетривиальной фундаментальной группой. Показывается, что для некоторого n существует симплициальная инволюция комбинаторной сферы S^n, множество неподвижных точек которой есть $(n-1)$-мерное многообразие, не являющееся комбинаторной сферой. Для некоторого n существует симплициальная инволюция полиэдра, гомеоморфного n-мерной сфере, множество неподвижных точек которой есть $(n-1)$-мерное многообразие, не гомеоморфное $(n-1)$-мерной сфере. А. С. Шварц

7584. Об отображениях трехмерной сферы в плоскость. Ливси (On maps of the three-sphere into the plane. Livesay G. R.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 157—159 (англ.)

В частном случае (при $n=2$) доказывается основная теорема предыдущего реферата (реф. 7583). И. И. Гордон

7585. Об отображениях сфер в евклидовы пространства. Ян Чжун-дао (On maps from spheres to Euclidean spaces. Yang Chung-Tao), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 725—732 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть f — непрерывное отображение сферы S^{n+1} в евклидово пространство E^n; x_1, x_2, x_3 — точки сферы S^{n+1}, попарные расстояния между которыми равны. Тогда существует такое вращение r сферы S^{n+1}, что $f(r(x_1)) = f(r(x_2)) = f(r(x_3))$. При доказательстве используется теория специальных гомологий Смита.

Указывается обобщение этой теоремы на отображения $(n+1)$-мерного риманова многообразия в E^n. И. И. Гордон

7586. О гомотопически устойчивых точках и произведении пространств. Кодама (On homotopically stable points and product spaces. Kodama Yukihiro), Fundam. math., 1957, **44**, № 2, 171—185 (англ.)

Автор называет точку x топологического пространства X гомотопически неустойчивой в размерности n, если для любой окрестности U точки $x \in X$ найдется такая окрестность $V \subset U$ точки x, что любое непрерывное отображение сферы S^n в множество $V \setminus x$ может быть продолжено в отображение ограниченного сферой S^n $(n+1)$-мерного шара E^{1+n} в множество $U \setminus x$. Если X—m-мерный абсолютный окрестностный ретракт для метрических пространств (РЖМат, 1955, 5663), то точка $x \in X$ тогда и только тогда будет гомотопически неустойчивой (РЖМат, 1954, 5077), когда она гомотопически неустойчива в размерностях $0, 1, \ldots, m-1$.

Обозначим через $H_n(x, X; Y)$ локальную группу гомологий в смысле Чеха в точке x локально компактного пространства X (Y — группа коэффициентов). Если точка x гомотопически неустойчива, то, очевидно, $H_n(x, X; Y) = 0$ при любом n.

Будем считать в дальнейшем, что X и Y — конечномерные локально компактные абсолютные окрестностные ретракты для метрических пространств.

Теорема 7. Точка $x \in X$ гомотопически неустойчива тогда и только тогда, когда она гомотопически неустойчива в размерностях 0 и 1 и $H_n(x_0, X; Z) = 0$ при любом n.

Теорема 6. Пусть X и Y — линейно связные пространства, состоящие более чем из одной точки. Точка $z \in X \times Y$ гомотопически неустойчива тогда и только тогда, когда $H_n(z, X \times Y; Z) = 0$ для любого n. (Через Z обозначена группа целых чисел).

В конце работы указываются некоторые достаточ-

ные условия для выполнения равенства $\dim(M\times N)=\dim M+\dim N$. А. И. Матузявичус

7587. О гомологиях комплексов $K(\pi, n)$. Мур (On the homology of $K(\pi, n)$. Moore John C.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1957, **43**, № 5, 409—411 (англ.)

В явном виде описываются некоторые конструкции (в смысле Картана; РЖМат, 1957, 5223) для случая, когда за область коэффициентов принято кольцо целых p-адических чисел. Утверждается, что p-я степень образующей группы $H^{n+1}(Z_p n; Z)$ является примитивным элементом группы $H^{p(n+1)}(Z_p n; Z)$. М. М. Постников

7588. Точность гомотопической последовательности для P-ад. Иноуэ (On exactness of the homotopy sequence of a P-AD. Inoue Yoshiro), Math. japon., 1955, 3, № 3, 97—102 (англ.)

Излагается простое доказательство точности гомотопической последовательности для p-ад, использующее теорему о точности гомотопической последовательности расслоенного пространства. По ходу дела известные свойства гомотопических групп пространства топологических групп переносятся на некоторый весьма широкий класс пространств с умножением. М. М. Постников

7589. О натуральных системах некоторых пространств. Аоки, Хомма, Канэко (On natural systems of some spaces. Aoki Kiyoshi, Honma Eiitiro Kaneko Tetuo), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 8, 564—567 (англ.)

Изучаются связи между натуральными системами пространства и его пространства петель. Доказательств нет. Теорема 5 (которую референт воспринимает как основную) явно ошибочна, ибо из нее следует, что любое гомотопически простое пространство имеет гомотопический тип некоторого пространства петель. М. М. Постников

7590. Минимальные комплексы и отображения. Лира (Minimal complexes and maps. Lyra C. B. de), Bol. Soc. mat. São Paulo, 1952(1954), **7**, № 1-2, 85—98 (англ.)

Доказывается следующее очевидное утверждение: Если $\pi_k(Y)=0$ для всех $k>n$ и если существует такое непрерывное отображение $f: X\to Y$, что $f_x: \pi_k(X)\approx \pi_k(Y)$ для всех $k\leqslant n$, то минимальный комплекс пространства Y получается из минимального комплекса пространства X отождествлением всех кубов (имеется в виду „кубический" вариант теории) размерности $>n$, имеющих одинаковые n-мерные грани. М. М. Постников

7591. Об образующих группы $\pi_7(SO(n))$. Тода Сайто, Йокота (Note on the generator of $\pi_7(SO(n))$. Toda Hirosi, Saito Yoshihiro, Yokota Ichiro), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1957, **A30**, № 3, 227—230 (англ.)

На основе весьма простых и изящных соображений в явном виде указываются образующие групп $\pi_7(SO(n))$. М. М. Постников

7592. Коммутативные произведения на сферах. Джеймс (Commutative products on spheres. James I. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 63—68 (англ.)

Коммутативным произведением на сфере S^n автор называет непрерывное отображение $f: S^n\times S^n\to S^n$, удовлетворяющее условию $f(x,y)=f(y,x)$. Типом произведения f называется степень отображения $g: S^n\to S^n$, определяемого формулой $g(x)=f(x,e)$ (e — фиксированная точка сферы S^n). Доказываются следующие утверждения: 1) коммутативное произведение на четномерной сфере S^n имеет тип 0; 2) если n нечетно, то существует такое число $r=r(n)$, что на сфере S^n тогда и только тогда существует коммутативное произведение типа q, когда число q делится на 2^r; 3) $r(3)=2$; $r(n)\geqslant 3$ при $n\geqslant 5$; $r(n)\leqslant n-1$; $r(n+2m)\leqslant r(n)+2m$; $r(n)\leqslant r(n+2m)+1$. А. С. Шварц

7593. К теории когомотопических групп Борсука. Гранас А., Fundam. math., 1957, **44**, № 2, 159—164

Доказаны два соотношения для рангов когомотопических групп, составляющие часть утверждения о точности когомотопических последовательностей соответственно пары и триады. В качестве приложения выведена известная теорема Фрагмена—Брауэра о разбиении евклидовых пространств. М. М. Постников

7594. Функциональные когомологические операции. Питерсон (Functional cohomology operations. Peterson Franklin P.), Trans Amer. Math. Soc., 1957, **86**, № 1, 197—211 (англ.)

Строится теория простых и функциональных когомологических операций высшего порядка (для стационарного случая). Эти операции применяются к задаче о нетривиальности составного отображения. М. М. Постников

7595. О гомотопическом типе и гомотопических группах полиэдров. I. Чжан Су-чэн (On homotopy types and homotopy groups of polyhedra. I. Chang Su-chang), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, **1**, № 4, 205—208 (англ.)

Формулируется в исправленном виде теорема Сираивы о гомотопической классификации A_n^3-полиэдров (РЖМат, 1956, 293). М. М. Постников

7596. О гомотопическом типе и гомотопических группах полиэдров. II. Чжан Су-чэн (On homotopy types and homotopy groups of polyhedra. II. Chang Su-chang), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, **1**, № 4, 209—215 (англ.)

Строятся некоторые простые A_n^3-полиэдры ($n>3$) и утверждается, что любой A_n^3-полиэдр является (с точностью до гомотопического типа) букетом построенных элементарных полиэдров. Число различных типов элементарных полиэдров — сто восемьдесят два. М. М. Постников

7597. Двойственность в топологии. Уайтхед (Duality in topology. Whitehead J. H. C.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 134—148 (англ.)

Обзор различных проявлений феномена двойственности, таких как понтрягинская двойственность в теории топологических абелевых групп, двойственность между группами гомологий и когомологий, двойственность в определениях сингулярных и спектральных групп гомологий, двойственность Пуанкаре в многообразиях, двойственность между группами множества и его дополнения, двойственность между гомотопическими и когомотопическими группами (и более общая двойственность, появляющаяся в S-теории). В заключительном пункте работы приведено несколько замечаний, связанных с понятием косвязности (пространство X называется $(n+1)$-косвязным, если для любого $q>n$ все отображения $X\to S^q$ несущественны). М. М. Постников

7598. Классы Понтрягина и гомотопический тип многообразий. Тамура (On Pontrjagin classes and homotopy types of manifolds. Tamura Itiro), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 2, 250—262 (англ.)

Показывается, что характеристические классы Понтрягина гладкого многообразия не являются гомотопическими инвариантами. Этот факт был замечен ранее (РЖМат, 1958, 2808), но подробное доказательство его не было опубликовано. Автор указывает также, что не является гомотопическим инвариантом четырехмерный класс Понтрягина, приведенный по любому простому модулю, отличному от 2 или 3. А. С. Шварц

7599. Дифференцируемые структуры на пятнадцатимерной сфере и классы Понтрягина некоторых многообразий. Симада (Differentiable structures on the 15-sphere and Pontrjagin classes of certain manifolds.

Shimada Nobuo), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 59—69 (англ.)

Автор указывает примеры гладких многообразий, гомеоморфных, но не гладко гомеоморфных пятнадцатимерной сфере. Построения автора аналогичны построениям Милнора (РЖМат, 1957, 6939) и отличаются лишь использованием чисел Кэли вместо кватернионов. Приводятся также примеры гомотопически эквивалентных гладких многообразий, имеющих различные классы Понтрягина (реф. 7598).

Автор говорит, что 2 n-мерное топологическое многообразие X удовлетворяет условию (*), если $H_i(X, Z)=Z$ при $i=0,\ n,\ 2n$, $H_i(X, Z)=0$ при $i\neq 0$ n, $2n$. Утверждается, что при $n=4$ и $n=8$ существуют топологические многообразия, удовлетворяющие условию (*) и гомотопически не эквивалетные друг другу. Этот результат ошибочен, так как при любом n два $2n$-мерных топологических многообразия удовлетворяющие условиях (*) гомотопически эквивалентны друг другу. А. С. Шварц

7600. Характеристические классы косого произведения. Адлер (A characteristic relation in fibre bundles. Adler Alfred), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 713—724 (англ.)

Пусть (M, X, F, G, p) — косое произведение, пространство которого M и база X являются римановыми многообразиями. Автор вычисляет характеристические классы Понтрягина по полю действительных чисел гладкого многообразия M в случае, когда структурная группа G является компактной группой Ли и действует транзитивно на слое F, т. е. $F=G/K$, а стационарная подгруппа $K\subset G$ связна. Точнее говоря, указываются внешние дифференциальные формы, определяющие классы Понтрягина многообразия M. А. С. Шварц

7601. О регулярном отображении n-мерного многообразия в $(n+1)$-мерное евклидово пространство. Милнор (On the immersion of n-manifolds in $(n+1)$-space. Milnor John), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 4, 275—284 (англ.)

Пусть $f: M^n\to E^{n+1}$ — регулярное отображение замкнутого ориентируемого гладкого n-мерного многообразия M^n в евклидово пространство E^{n+1}. Ставя в соответствие каждой точке x многообразия M^n исходящий из начала координат единичный вектор, параллельный (ориентированной) нормали к $f(M^n)$ в точке $f(x)$, получаем отображение $M^n\to S^n$ многообразия M^n в сферу S^n. Степень этого отображения $d(f)$ называется интегральной кривизной регулярного отображения f.

Хопф показал, что в случае, когда число n четно, для любого регулярного отображения $f: M^n\to E^{n+1}$ интегральная кривизна $d(f)=\frac{1}{2}\chi(M^n)$ ($\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n). При нечетном n оказывается, что в случае, когда многообразие M^n может быть регулярно отображено в E^{n+1} с какой-либо нечетной (какой-либо четной) интегральной кривизной, то оно может быть регулярно отображено в E^{n+1} с любой нечетной (любой четной) интегральной кривизной. (Автор указывает, что этот результат был получен Хопфом в неопубликованной работе). В работе показывается, что непараллелизуемое многообразие M^n может быть регулярно отображено в E^{n+1} только с нечетной интегральной кривизной. Даются необходимые условия для того, чтобы многообразие могло быть отображено в E^{n+1} только с четной интегральной кривизной. Исследуются также значения, которые может принимать интегральная кривизна $d(f)$ вложения $f: M^n\to E^{n+1}$. Показывается, в частности, что в этом случае $d(f)\equiv\frac{1}{2}\sum(M^n)\pmod 2$, $|d(f)|\leqslant\frac{1}{2}\sum(M^n)$ (через $\sum(M^n)$ обозначена сумма чисел Бетти многообразия M^n по какому-либо полю). Наконец, строится регулярное отображение трехмерного проективного пространства P^3 в E^4. Из существования этого регулярного отображения выводится, что любое трехмерное многообразие M^3, которое может быть регулярно отображено в E^4, можно отобразить в E^4 с любой интегральной кривизной. А. С. Шварц

7602. Цепная гомотопия и теория Де-Рама. Гуген-хейм, Спенсер (Chain homotopy and the de Rham theory. Gugenheim V. K. A. M., Spencer D. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 144—152 (англ.)

Излагается способ построения операторов цепной гомотопии в когомологической теории многообразия, основанной на рассмотрении дифференциальных форм. (Будем предполагать дифференцируемость класса C^∞). Рассмотрим произведение $U\times V$ двух многообразий U и V. Для $(r+s)$-мерной дифференциальной формы φ на $U\times V$ и r-мерной сингулярной цепи c на U определяется s-мерная форма φ/c на V следующим образом. Пусть v — поле s-векторов на V. Значение φ/c на этом поле есть функция от точки $y\in V$, имеющая вид:

$$(\varphi/c)(v)(y)=(-1)^{rs}\int_c[j_y^*(v\llcorner\varphi)],$$

где j_y — отображение $U\to U\times V$, переводящее x в (xy), $*$ употребляется для обозначения двойственного отображения, $v\llcorner\varphi$ — „свертка“ формы φ с помощью s-векторного поля v (рассматриваемого естественным образом на $U\times V$).

Далее, пусть задано отображение F многообразия $U\times V$ в некоторое многообразие W. Тогда определяется следующее отображение λ: если ψ — дифференциальная форма на W, то $\lambda\psi=(-1)^{r+1}(F^*\psi)/c$ ($\lambda\psi$ — форма на V). Устанавливается, что $(d\lambda+(-1)^{r+1}\lambda d)\psi=(F^*\psi)/\Delta c$. В частности, если в качестве c взять отображение $c(t)$ отрезка $0\leqslant t\leqslant 1$ в U и рассмотреть отображение $f_t(y)=F(c(t), y)$, то получится известная формула цепной гомотопии: $d\lambda+\lambda d=f_1^*-f_0^*$. Эта формула допускает обобщение на случай, когда V имеет структуру „почти произведения“, т. е. имеются гомоморфизмы (проекции) P и Q касательного пучка $T'(V)$ в себя, причем $T'(V)=PT'(V)+QT'(V)$ (тем самым индуцируется разложение оператора d внешнего дифференцирования).

Оператор, аналогичный λ, рассматривается для почти комплексных и комплексно-аналитических многообразий. Однако это не приводит к цепной гомотопии (относительно оператора $\bar\partial$ дифференцирования по комплексно-сопряженным координатам). Строится пример (предложенный К. Кодаирой), когда отображение, аналитически гомотопное тождественному, не порождает цепной гомотопии. И. З. Розенкноп

7603. Комплексные аналитические связности в расслоенных пространствах. Атия (Complex analytic connections in fibre bundles. Atîyah M. F.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 1, 181—207 (англ.)

Пусть P — комплексное аналитическое главное расслоенное пространство с базой X и группой G. Тогда G естественным образом действует на пространстве B касательных векторов к многообразию P. Многообразие $Q=B/G$ является аналитическим векторным расслоенным пространством с базой X. Присоединенное представление группы G в ее алгебре Ли $L(G)$ определяет векторное расслоенное пространство $L(G)$ со слоем $L(G)$ и базой X, ассоциированное с P. Проекция p пространства Q на пространство $T(X)$ касательных векторов к многообразию X порождает точную последовательность векторных расслоенных пространств $0\to L(P)\to Q\to T(X)\to 0$. Аналитическая связность в расслоенном пространстве

P — это такой гомоморфизм $h: T(X)\ Q$, что $ph=1$. Доказывается, что группа всех расширений пространства $T(X)$ при помощи $L(P)$ изоморфна группе $H^{1,1}$ $(XL(P)d'')$-когомологий дифференциальных форм типа (1,1) с коэффициентами в $L(P)$. Пространству Q отвечает некоторый элемент $a(P)$ этой группы, причем аналитическая связность в пространстве P существует тогда и только тогда, когда $a(P)=0$.

Пусть X — компактное келерово многообразие, F — многочлен на алгебре $L(G)$, инвариантный относительно внутренних автоморфизмов. Тогда для каждого $h \in H^{1,1}(X,\ L\ (P))$ естественным образом определяется элемент $F\ (h) \in H(X,C)$. Доказывается, что если G — полупростая или полная линейная группа, то элементы $F(a(P))$ для всех инвариантных многочленов F порождают в $H(X,\ C)$ характеристическую подалгебру расслоения P. В частности, если аналитическая связность существует, то характеристическая подалгебра тривиальна. В случае $= G\ L(r,\ C)$ находятся явные формулы, выражающие классы Чженя (Черна) пространства P через элемент $a(P)$. Пусть X — алгебраическая кривая, E — векторное расслоенное пространство с базой X, $E=\Sigma E_l$ — разложение E в прямую сумму неразложимых пространств. Тогда аналитическая связность в ассоциированном с E главном расслоении существует тогда и только тогда, когда двумерные классы Чженя всех пространств E_l тривиальны. Строится пример векторного расслоенного пространства над алгебраической поверхностью, имеющего нулевые классы Чженя и такого, что ассоциированное главное расслоение не имеет аналитической связности. Доказывается также, что для того чтобы в главном расслоенном пространстве P существовала аналитическая связность с нулевой кривизной, необходимо и достаточно, чтобы в качестве координатных преобразований расслоения P можно было выбрать постоянные отображения в группу.

А. Л. Онищик

См. также: 7437, 7608, 7669, 7670 К, 7682, 7824

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

7604. Об ε-энтропии некоторых классов аналитических функций. Тихомиров В. М., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 2, 191—194

Рассматриваются классы функций: $A_h^T\ (M)$ — класс функций, аналитических и ограниченных константой M в области G_h^T точек z вида $z=t+u$, $t \in \Delta_T$, $|u|<h$; здесь $\Delta_T=\{z;\ -T \leqslant z \leqslant T\}$ — отрезок вещественной оси; $F^T{}_{s,\sigma}\ (M)$ — класс целых функций, удовлетворяющих при любом t из отрезка Δ_T и любом u неравенству

$$|f(t+u)| \leqslant Me^{\sigma|u|^s},\ s \geqslant 1;$$

$B_\sigma(M)$ — класс целых функций, удовлетворяющих соотношению

$$|f(z)| \leqslant Me^{\sigma|\mathrm{Im}z|}.$$

Пусть $H_\varepsilon^T\ (F)$ есть ε-энтропия множества значений функций класса F на отрезке Δ_T.

Доказывается теорема 1:

$$\frac{2\sigma}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} \sim \frac{\lim}{T\to\infty}\ \frac{1}{2T}\ H_\varepsilon^T\ (B_\sigma(M)) \sim \frac{\lim}{T\to\infty}\ \frac{1}{2T}\ H_\varepsilon^T(B_\sigma(M)).$$

Приведены теорема 2: равномерно по $T \geqslant 0$

$$H_\varepsilon^T\ (A_h^T(M)) \asymp \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/T+1)}+1\right)\log 1/\varepsilon,$$

и теорема 3: при $s \geqslant 1$ равномерно по $T \geqslant 0$

$$H_\varepsilon^T(F_{s,\sigma}^T\ (M)) \asymp \left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log\left(\frac{\log(1/\varepsilon)^{1/s}}{T}+1\right)}+1\right)\log 1/\varepsilon\ .$$

В формулировке теоремы 3 имеется опечатка: вместо α следует читать s. Метод доказательства теорем аналогичен методу получения асимптотических оценок для других классов функций, рассмотренных в работе А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1957, 3281).

Н. С. Бахвалов

7605. Абсолютная ε-энтропия метрических пространств. Витушкин А. Г., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 5, 745—747

Пусть F — компактное метрическое пространство и Φ — его метрическое расширение. Через $N_\varepsilon{}^\Phi(F)$ в работе обозначается число элементов минимального (в смысле числа элементов) подмножества из Φ, аппроксимирующего F с точностью до ε. Через $N_\varepsilon(F)$ обозначается число множеств, участвующих в наиболее экономном покрытии пространства F (в работе вместо F ошибочно стоит Φ) его подмножествами диаметра не более чем 2ε. Автор называет $H_\varepsilon^\Phi(F)=\log N_\varepsilon^\Phi\ (F)$ относительной, а $H_\varepsilon(F)=\log N_\varepsilon(F)$ абсолютной ε-энтропией пространства F. Сформулированы теоремы:

1. Для всякого компактного метрического пространства F и всякого $\varepsilon>0$ величина $H_\varepsilon(F)$ совпадает с нижней гранью величины $H_\varepsilon^\Phi(F)$ по всевозможным метрическим расширениям Φ пространства F, т. е. $H_\varepsilon(F)=\inf_{\Phi \supset F} H_\varepsilon^\Phi(F)$.

2. Пусть f — элемент некоторого метрического пространства F, а $T(f)$ — таблица этого элемента, восстанавливающая некоторый элемент φ из метрического расширения Φ пространства F, удаленный от f не более чем на ε. Тогда $P[T(f)] \geqslant H_\varepsilon^\Phi(F)$ и существует такой способ составления таблицы $T(f)$, что $P[T(f)] \leqslant H_\varepsilon^\Phi\ (F)+1$, где $P[T(f)]$ — объем таблицы $T(f)$, т. е. общее число двоичных разрядов, необходимое для записи всех параметров таблицы.

3. Объем всякой таблицы, восстанавливающей $f \in F$ с точностью до ε, должен быть не менее $H_\varepsilon(F)$. При этом указанная оценка достижима.

Далее для некоторых классов функций F приведены оценки вида $H_\varepsilon(F)=a_F(\varepsilon)+O(b_F(\varepsilon))$, где $b_F(\varepsilon)=o(a_F(\varepsilon))$.

Более грубые оценки величин $H_\varepsilon(F)$ для этих классов были приведены в работах А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1957, 3281) и В. М. Тихомирова (реф. 7604).

Н. С. Бахвалов

7606. О дифференцировании в абстрактных пространствах функций ограниченной вариации, интегрируемых в смысле Беркилла. Паньи (Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata integrabili secondo Burkill. Pagni Mauro). Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, № 279—302 (итал.)

Семейство $\{I\}$ абстрактных множеств называется элементарным (полукольцом), если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) пусть $I_1 \in \{I\}$, $I_2 \in \{I\}$, тогда $I_1 I_2 \in \{I\}$;

б) пусть $I' \in \{I\}$, $I'' \in \{I\}$, $I \subset I'$, тогда $I'' - I' = \sum_1^n I_k$, где $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — взаимно не налегающие множества, принадлежащие $\{I\}$; кроме того, сумма $I' + \sum_1^h I_k$ принадлежит семейству $\{I\}$ для $h = 1,2,\ldots,n$.

Рассматриваются действительные функции $F(I)$, определенные на элементарном семействе $\{I\}$. Предполагается, что на последнем определена мера $\mu(I)$, т. е. неотрицательная вполне аддитивная функция с ограниченной вариацией.

Допуская, что функция $F(I)$ неотрицательна и аддитивна, и фиксируя множество I_0 из $\{I\}$, автор рассматривает класс $\theta[F, I_0]$, состоящий из всевозможных вещественных неотрицательных функций $f(x)$, определенных и μ-суммируемых на множестве I_0, для которых

$$\int_I f(x)\, d\mu \leqslant F(I),$$

где I — любая часть I_0, принадлежащая $\{I\}$.

Если функционал

$$J(f) = \int_{I_0} f(x)\, d\mu$$

имеет максимум в классе θ, достигающийся при $f = f_0 (f_0 \in \theta)$, то функция $F(I)$ называется μ-дифференцируемой на множестве I_0, причем функция

$$F^1(x) = dF/d\mu = f_0(x)$$

называется μ-производной от функции $F(I)$. Пусть теперь $F(I)$ будет аддитивной функцией с ограниченной вариацией, которая может принимать значения разных знаков. Тогда имеем

$$F'(I) = p(I) - n(I),$$

где $p(I)$ и $n(I)$ — соответственно, положительная и отрицательная вариации функции $F(I)$. В этом случае производная от функции $F(I)$ определяется равенством

$$F'(x) = p'(x) - n'(x),$$

причем предполагается существование производных от функций $p(I)$ и $n(I)$ (которые аддитивны и неотрицательны).

Эти определения производной и дифференцируемости дал Фикера, развив их теорию (Fichera G., Trasformazioni lineari, vol. I, Ist. mat. Univ. Trieste, 1954; РЖМат, 1956, 2077).

В частности, им показано, что каждая аддитивная функция с ограниченной вариацией μ-дифференцируема на любом множестве $I_0 \in \{I\}$.

В реферируемой работе эти определения производной и дифференцируемости обобщаются на случай неаддитивных функций.

Сначала обобщается понятие интеграла Беркилла следующим образом:

Пусть $F(I)$ — действительная функция, определенная на элементарном семействе $\{I\}$. Пусть δ — разложение множества $I \in \{I\}$ на конечное число частей, взаимно не налегающих и принадлежащих $\{I\}$. Всевозможные такие подразделения расположим в одну последовательность так, чтобы выполнялось условие: если δ — подразделение $I = \sum_1^n I_k$, δ — подразделение $I = \sum_1^{n'} I_h'$, любое из множеств I_h' содержится в одном из множеств I_k, то δ' следует за δ. Рассмотрим сумму

$$\sigma_F(\delta) = \sum_1^n F(I_k),$$

а также ее верхний и нижний пределы в предположении, что δ пробегает указанную последовательность. Верхний предел есть верхний интеграл, а нижний предел—нижний интеграл в смысле Беркилла. В случае их совпадения функция $F(I)$ называется интегрируемой в смысле Беркилла на множестве I, а их общее значение называется интегралом и обозначается символом $\int_I F$, в то время как символы $\overline{\int_I} F$, $\underline{\int_I} F$ обозначают соответственно верхний и нижний интегралы. Показывается, что это определение интеграла более общее, чем то, которое дано Беркиллом даже в простейшем случае, когда $\{I\}$ есть семейство полуоткрытых интервалов числовой прямой. В последующем знак (B) указывает, что имеется в виду интеграл в смысле Беркилла, обобщенный указанным выше способом.

Если $\overline{\int_I} |F| < +\infty$ для любого $I \in \{I\}$, то функция $F(I)$ называется функцией ограниченной вариации на $\{I\}$, короче — имеет свойство VL.

Свойство AVL состоит в том, что имеет место свойство VL и, кроме того, свойство аддитивности.

Доказывается следующая теорема:

(А) Если функция $F(I)$ имеет свойство VL, то функции

$$\overline{G}(I) = \overline{\int_I} F, \quad \underline{G}(I) = \underline{\int_I} F$$

имеют свойство AVL.

Пусть функция $F(I)$ интегрируема (B) и имеет свойство VL на $\{I\}$. Тогда функция $G(I) = \int_I F$ имеет свойство AVL и, следовательно, μ-дифференцируема в смысле Фикера. Ее μ-производная $G'(x)$, по определению, есть μ-производная от функции $F(I)$, для обозначения которой служит символ $F_B'(x)$. Таким образом, функция $F(I)$, интегрируемая (B) и имеющая свойство VL, μ-дифференцируема, причем

$$F_B'(x) = G'(x).$$

Пусть функция $F(I)$ имеет свойство VL и, кроме того, следующее свойство: фиксируя любое I_0 из $\{I\}$, для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $\mu(P) < \delta$ будет следовать неравенство

$\left|\sum_1^n F(I_k)\right| < \varepsilon$, где $P = \sum_1^n I_k$, $I_k \in \{I\}$, $I_k \subset I_0$, $I_k I_h = 0$; $k = 1,2, \ldots, n$; $h \neq k$. В этом случае функция $F(I)$ называется μ-абсолютно непрерывной, короче — имеющей свойство $\mu\, AC$.

Доказываются следующие теоремы:

(B) Если функция $F(I)$ имеет свойство $\mu\, AC$, то функции

$$\overline{G}(I) = \int_I^{-} F, \quad \underline{G}(I) = \int_{\underline{I}} F$$

также имеют это свойство.

(C) Если функция $F(I)$ интегрируема (B) и имеет свойство $\mu\, AC$, то функция $G(I) = \int_I F$ также имеет свойство $\mu\, AC$, причем

$$G(I) = \int_I F'_B(x)\, d\mu,$$

каково бы ни было $I \in \{I\}$.

(D) Пусть функция $F(I)$ интегрируема (B) и имеет свойство VL. Тогда, фиксируя любое I_0 из $\{I\}$, имеем

$$F(I) = F^*(I) + \int_I F'_B(x) d\mu,$$

где $I \in \{I\}$, $I \subset I_0$, функция $F^*(I)$ μ-сингулярна на множестве I_0, т. е. $[F^*(x)]_{B'} = 0$ почти везде на I_0. Такое представление функции $F(I)$ в виде суммы μ-сингулярной функции и функции, имеющей свойства $\mu\, AC$ и AVL, единственно.

Рассматривается, кроме того, случай полуаддитивных функций, а также связь с классическим определением производной.

Пусть S_r — евклидово пространство r измерений. Мера в смысле Лебега множеств пространства S_r обозначается через τ; внешняя мера — τ-est.

По определению, последовательность I_n множеств пространства S_r сходится с параметром регулярности $q > 0$ к точке $x \in S_r$, если выполняются следующие условия:

а) $x \in I_n$ $(n = 1,2, \ldots)$,

б) $\lim_{n \to \infty} (\operatorname{diam} I_n) = 0$,

в) $I_n \subset Q_n$, $\tau\text{-est}(I_n) \geqslant q\, \tau(Q_n)$,

где Q_n — некоторый куб пространства S_r; $n = 1,2 \ldots$

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_r$ координаты точки $x \in S_r$. Полуоткрытым сверху интервалом называется множество точек x, для которых выполняется условие $a_k \leqslant x_k < b_k$, где a_k и b_k — постоянные, $a_k < b_k$; $k = 1x2, \ldots, r$.

Пусть $\{I\}$ — семейство, состоящее из полуоткрытых сверху интервалов пространства S_r; $F(I)$ — действительная функция, определенная для множеств $I \in \{I\}$. Взяв точку $x \in S_r$, положим

$$A(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(I_n)}{\tau(I_n)},$$

предполагая, что последовательность I_n сходится к x с параметром регулярности $q > 0$ и обладает тем свойством, что этот предел (может быть бесконечный) существует; $I_n \in \{I\}$.

Положим

$$\overline{D}_F(x) = \sup A(x), \quad \underline{D}_F(x) = \inf A(x),$$

где знаки sup и inf относятся к всевозможным последовательностям I_n, удовлетворяющим указанным условиям.

Доказывается теорема:

(E) Если функция $F(I)$ интегрируема (B) и имеет свойство VL на множестве $I_0 \in \{I\}$, то почти везде на множестве I_0 имеют место равенства

$$F'_B(x) = \overline{D}_F(x) = \underline{D}_F(x)$$

(где производные берутся по отношению к τ).

В. М. Дубровский

7607. О дифференцировании в абстрактных пространствах функций ограниченной вариации. Панъи (Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata. Pagni Mauro), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 61—69 (итал.)

Эта работа является дополнением к другой работе автора (реф. 7606), определения и обозначения — прежние.

Понятия производной и дифференцируемости снова обобщаются следующим образом:

Пусть на элементарном семействе $\{I\}$ заданы неотрицательная мера $\mu(I)$ и вещественная функция $F(I)$, имеющая свойство VL.

Рассмотрим функции

$$\overline{G}(I) = \int_I^{-} F, \quad \underline{G}(I) = \int_{\underline{I}} F.$$

В силу теоремы (A) (реф. 7606) они имеют свойство AVL, откуда следует, что они μ-дифференцируемы (в смысле Фикера).

Вводится понятие верхней $\overline{F}'_B(x)$ и нижней $\underline{F}'_B(x)$ μ-производных от функций $F(I)$. По определению

$$\overline{F}'_B(x) = \overline{G}'(x), \quad \underline{F}'_B(x) = \underline{G}'(x).$$

Если верхняя и нижняя μ-производные от функции $F(I)$ равны почти везде на множестве $I_0 \in \{I\}$, то функция $F(I)$ называется μ-дифференцируемой на множестве I_0, а ее μ-производная $F_B(x)$ определяется равенством

$$F'_B(x) = \overline{F}'_B(x) = \underline{F}'_B(x).$$

Доказывается, что таким образом, действительно, достигается обобщение понятий производной и дифференцируемости, которые даны в реф. 7606.

Главные результаты работы состоят в следующем:

1. Для того чтобы функция $F(I)$, имеющая свойство μAC, была μ-дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируема (B).

2. Теорема (D) реф. 7606 сохраняет силу, если предположение об интегрируемости (B) функции $F(I)$ заменить более общим предположением об ее μ-дифференцируемости.

3. Пусть $\{I\}$ — семейство полуоткрытых интервалов пространства S_r; $\mu(I) = \tau(I)$ есть мера в смысле Лебега;

функция $F(I)$ имеет свойство VL на множестве $I_0 \in \{I\}$. Тогда

$$\underline{F}_B(x) \leqslant \underline{D}_F(x) \leqslant \overline{D}_F(x) \leqslant \overline{F}'_B(x)$$

почти везде на множестве I_0.

Отсюда вытекает очевидное обобщение теоремы (Е) реф. 7606.

При тех же условиях

$$\int_I |\overline{F}'_B| d\tau \leqslant \int_I |F|, \quad \int_I |\underline{F}'_B| d\tau \leqslant \int_I |F|,$$

$$\int_I |\overline{D}_F| d\tau \leqslant \int_I |F|, \quad \int_I |\underline{D}_F| d\tau \leqslant \int_I |F|,$$

где I — любое множество из $\{I\}$, содержащееся в I_0.

В. М. Дубровский

7608. Проблема Лузина. Бертолини (Il problema di Lusin. Bertolini Fernando), Ricerche mat., 1957, **6**, № 2, 288—306 (итал.)

Рассматриваются вещественные функции на топологическом пространстве X с мерой. Выясняется, при каких условиях свойство (C) характеризует измеримые функции. Существенную роль играет вводимое автором понятие ординарной топологии.

Замкнутое множество $D \subset X$ называется ординарным, если для каждого числа $r = k2^{-n}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n;\ n = 1, 2, \ldots)$ можно определить замкнутое множество F_r и открытое G_r, удовлетворяющие следующим условиям:

$$D = \bigcap_r G_r, \quad G_r \subset F_r \subset G_s \quad \text{при } r < s.$$

Топология в X называется ординарной, если каждое замкнутое множество в X ординарно. Если в произвольном топологическом пространстве ввести новую топологию, в которой замкнутыми множествами являются ординарные замкнутые множества (в прежней топологии) и только они, то новая топология оказывается ординарной. Это наименее тонкая топология, порождающая то же семейство непрерывных функций, что и первоначальная топология. В совершенно нормальном пространстве топология всегда ординарна. Обратно, если в T_1-пространстве топология ординарна, то оно регулярно; если же оно еще и компактно, то будет и совершенно нормальным.

Пусть в X выделено полукольцо (Халмош П., Теория меры, стр. 27 (РЖМат, 1954, 3653 К)) «элементарных» измеримых множеств (э.и.м.) с мерой μ (вполне аддитивной и с ограниченной вариацией). Вводятся следующие классы множеств: P — совокупность всех множеств, представимых в виде конечных соединений э.и.м.; G (A) — совокупность всех множеств, представимых в виде счетных пересечений (соединений) множеств из P (множеств из P, погружающихся в какое-нибудь одно множество из P). Мера μ однозначно распространяется на семейства G и A. Далее определяется совокупность K_μ измеримых множеств с конечной мерой: $K \in K_\mu$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $A \in A$ и $C \in G$, что $C \subset K \subset A$ и что $v_\mu(A \setminus C) < \varepsilon$, где v_μ — полная вариация меры μ, подсчитанная по множествам из класса A. Мера μ однозначно распространяется на K_μ. Класс L_μ всех измеримых множеств определяется как совокупность счетных соединений множеств с конечной мерой. Пусть $\mathfrak{M}_\mu$ — совокупность всех μ измеримых функций на X. Если само пространство $X \in L_\mu$, то класс $\mathfrak{M}_\mu$ полон, т. е.: 1) содержит все постоянные, 2) замкнут относительно арифметических действий и операций max и min над конечным числом функций, 3) замкнут относительно предельного перехода для точечно сходящихся последовательностей функций. Кроме того, каждая μ-измеримая функция представима как предел конечнозначных μ-измеримых функций.

Функция f называется почти непрерывной (μ), если для каждого $K \subset K_\mu$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $C \in C$, что $C \subset K$, $v_\mu(K \setminus C) < \varepsilon$ и функция f непрерывна на C. Класс $\mathfrak{f}_\mu$ функций почти непрерывных (μ) полон в том смысле, как это определено выше для $\mathfrak{M}_\mu$.

Основные результаты:

А. Для включения $\mathfrak{M}_\mu \subset \mathfrak{F}_\mu$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого э.и.м. I существовала последовательность замкнутых множеств F_k таких, что

$$v_\mu(F_k / I) = 0, \ \overline{v}_\mu(I / F_k) < 1/k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$\overline{(v_\mu}$ (E) — абсолютная внешняя мера, т. е. $\overline{v}_\mu(E) = \inf v_\mu$ (M), где $M \in \mathfrak{F}_\mu$ и $E \subset (M)$.

Б. Для включения $\mathfrak{F}_\mu \subset \mathfrak{M}_\mu$ достаточно, чтобы каждое замкнутое множество было измеримым, и необходимо, чтобы каждое ординарное замкнутое множество было измеримым.

В. Если топология в X ординарна, то для совпадения классов $\mathfrak{M}_\mu$ и $\mathfrak{F}_\mu$ необходимо и достаточно, чтобы каждое замкнутое множество было измеримым и чтобы было выполнено условие предложения А.

Как следствие, получается следующий результат. Пусть X — хаусдорфово пространство, $\mathfrak{A}$ — наследственное семейство его открытых подмножеств, замкнутое относительно конечных соединений, и пусть каждое $A \in \mathfrak{A}$ есть множество типа F_σ. Примем за э.и.м. все множества, образующие наименьшее кольцо, содержащее $\mathfrak{A}$, и пусть на этих множествах задана мера μ. Если $K \in K_\mu$, то для того чтобы функция f была μ-измеримой на K, необходимо и достаточно, чтобы она была почти непрерывной (μ) на K.

Б. З. Вулих

7609. Некоторые теоремы о сходимости по плотности. Раджагопал (Some theorems on convergence in density. Rajagopal C. T.), Publs math., 1957, **5**, № 1-2, 77—92 (англ.)

Рассматриваются измеримые (по Лебегу) функции $f(x)$ $(0 < x < \infty)$ или более узкий класс функций $\{s(x)\}$ (ограниченной вариации, ступенчатые), допускающие интегральные преобразования

$$F(x) = x^{-1} \int_0^x f(t)\, dt, \ \Psi(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \psi(\sigma x) f(x)\, dx \quad (\sigma > 0)$$

или

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma x)\, d\{s(x)\},$$

где ядра ψ, φ удовлетворяют определенным условиям (неотрицательные, регулярные и др.).

В конце статьи приведены некоторые ядра

$$\psi(x) = e^{-x}, \ \psi(x) = p/(1+x)^{p+1} \quad (p > 0)$$

и др. Кратко сформулирует основные теоремы.

1. Если $\underline{\lim} f(x) = \underline{\lim} F(x) = l$ $(x \to \infty)$, то $f(x) \to l$ по верхней (асимптотической) плотности 1; имеются еще аналогичные теоремы.

2. Устанавливаются точные неравенства

$$\overline{\lim}\,\Psi(\sigma) \leqslant \overline{\lim}\,F(x) \leqslant (1/\max c\psi(c))\ \overline{\lim}\,\Psi(\sigma)$$
$$(c>0,\ \sigma\to+0,\ x\to\infty).$$

3. Если $\overline{\lim}\,f(x)=\overline{\lim}\,F(x)=l$ $(x\to\infty)$,

то $\overline{\lim}\,\Psi(\sigma)=l$ $(\sigma\to+0)$.

Эта теорема обобщает одну теорему референта (РЖМат, 1954, 2615).

4. Пусть $\Phi(\sigma)=O(1)$ $(\sigma\to+0)$ и

$$\lim_{x\to\infty}\ \inf_{x<\xi<(1+\delta)x}\{s(\xi)-s(x)\}=o_L(\delta)\ (\delta\to+0),$$

тогда

$$\underline{\lim}\,s(x)=\underline{\lim}\,\Phi(\sigma)\ (x\to\infty,\ \sigma\to+0)$$

соответственно, причем $s(x)$ сходится для каждого экстремального предела по верхней (асимптотической) плотности 1 $(x\to\infty)$.

Примечание референта. К реферируемой статье также примыкают некоторые результаты заметки референта (РЖМат, 1953, 798), не отмеченные автором. В статье имеются опечатки. М. П. Щеглов

7610. Замечания о существовании интеграла Римана—Стилтьеса. Пелчинский, Ролевич (Remarks on the existence of the Riemann—Stieltjes integral. Pelczyński A., Rolewicz S.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 74—77 (англ.)

Доказываются различные теоремы о существовании интеграла Римана—Стилтьеса вида

$$\int_a^b \Phi(f(x))\,df(x),$$

где Φ и $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ — действительные функции.

Н. А. Столяров

7611. Интегрирование дифференциальных коэффициентов высшего порядка. Ридер (Integration von Differentialkoeffizienten höherer Ordnung. Ridder J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, A60, № 4, 364—368; Indagationes math., 1957, 19, № 4, 364—368 (нем.)

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a,b]$. В случае если для $x\in[a,b]$ существуют конечнозначные функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ такие, что для $x+h\in[a,b]$ имеем

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f_1(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\left[f_n(x)+\varepsilon(x,h)\right],$$

где $\lim_{h\to0}\varepsilon(x,h)=0$, то функции $f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ называются дифференциальными коэффициентами k-го порядка функции $f(x)$. Пусть

$$f_i^0(x)=\frac{1}{(i-1)!}f_i(x)$$

и

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf_1^0(x)-(h^2/2)f_2^0(x)\ldots}{h^n/n}-$$
$$-\frac{[h^{n-1}/(n-1)]f_{n-1}^0(x)}{h^n/n}=\omega_n(x).$$

В работе Данжуа (Denjoy A., Fundam. math., 1935, 25, 273—326) была поставлена задача о восстановлении функции $f(x)$ посредством $\omega_n(x)$. В реферируемой статье доказывается, что указанная задача Данжуа решается путем n-кратного $C_\lambda P$-интегрирования (или $C_\lambda D$-интегрирования) $(\lambda=n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ функции $\omega_n(x)$ и что путем $(n-i)$-кратного $C_\lambda P$-интегрирования (или $C_\lambda D$-интегрирования) $(\lambda=n-1,\ n-2,\ \ldots,i)$ функции $\omega_n(x)$ получается дифференциальный коэффициент i-го порядка $f_i(x)$. А. Г. Джваршейшвили

7612. О существовании наибольшей субгармонической миноранты данной функции. Думар (On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function. Domar Yngve), Arkiv mat., 1958, 3, № 5, 429—440 (англ.)

Вещественная функция $u(x)$, определенная в открытом связном множестве E k-мерного евклидова пространства, называется субгармонической, если она ограничена сверху на каждом компактном подмножестве в E, полунепрерывна сверху (т. е. для каждого вещественного a множество $\{x: u(x)<a\}$ открыто) и $u(\xi)\leqslant u^R(\xi)$, где $u^R(\xi)$ — среднее значение функции $u(x)$ по любому шару $S_R(\xi)$ радиуса R с центром в $\xi\in E$.

Пусть $F(x)\geqslant0$, полунепрерывна сверху в E (значения $+\infty$ допустимы), и $\{F\}$ означает класс всех субгармонических функций $u(x)\leqslant F(x)$ (субгармонических минорант). Пусть $M(x)=\sup_{u\in\{F\}}u(x)$. В статье выясняются условия относительно $F(x)$ и E для того, чтобы $M(x)\in F$. Известна теорема:

Теорема 1. Для того чтобы $M(x)$ была субгармонической, необходимо и достаточно, чтобы $M(x)$ была ограниченной на всяком компактном подмножестве в E.

В статье дано доказательство теоремы 1 при более слабых предположениях относительно функций $u(x)\in\{F\}$: $u(x)$ измерима вместо полунепрерывна сверху и $u(\xi)\leqslant Bu^R(\xi)$, $B\geqslant1$ — фиксировано вместо $u(\xi)\leqslant u^R(\xi)$. Доказываются:

Теорема 2. $M(x)$ ограничена на каждом компактном подмножестве в E, если для некоторого $\varepsilon>0$

$$\int_E[\log^+F(x)]^{k-1+\varepsilon}dx<\infty.$$

Теорема 4. Показатель $k-1+\varepsilon$ в теореме 2 $(k\geqslant2)$ не может быть заменен на $k-1$.

Пусть E состоит из точек $(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_k)$, где $(x_1,\ldots,x_p)$ принадлежит открытому множеству p-мерного пространства и $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(p+1\leqslant i\leqslant k)$, и пусть $F(x)$ не зависит от $(x_{p+1},\ldots,x_k)$.

Пусть невозрастающая функция $y(m)$, $0\leqslant m\leqslant mE$ (mE — k-мерная мера Лебега) такова, что для любого y_0 одномерная мера множества $\{m: y(m)>y_0\}$ равна k-мерной мере множества $\{x: F(x)>y_0\}$.

Теорема 3. $M(x)$ ограничена на всяком компактном подмножестве в E, если

$$\int_0^{mE}\log^+y(m)\,d(m^{1/p})<\infty.$$

Теорема 5. Показатель $1/p$ в теореме 3 не может быть увеличен. Х. Л. Смолицкий

7613. Слабая и сильная циклическая аддитивность. Микл, Нёйгебауэр (Weak and strong cyclic additivity. Mickle E. J., Neugebauer C. J.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3-5, 243—253 (англ.)

Пусть $\mathfrak{T}$ — класс всех непрерывных отображений T пространства Пеано P в метрическое пространство P^*, причем отображение на пространство обозначается знаком $\to$, а в пространство — знаком $\Rightarrow$, и пусть Φ — действительнозначный функционал, определенный на всех $T \in \mathfrak{T}$. Если при представлении T в виде $T = lm$, где l, m суть монотонно сжатые составляющие T, $m : P \Rightarrow \mathfrak{M}$, $l : \mathfrak{M} \to P^*$, справедливо равенство

$$\Phi(T) = \sum \Phi(lr_C m),$$

причем r_C означает монотонное сжатие $\mathfrak{M}$ на подходящий циклический элемент C из $\mathfrak{M}$, то говорят, что функционал Φ обладает слабой циклической аддитивностью. Если

$$\Phi(T) = \sum \Phi(sr_C f),$$

где $T = sf$, причем $f : P \to \mathfrak{M}$, $s : \mathfrak{M} \to P^*$ суть неограниченные составляющие отображения T, то функционал Φ называют аддитивным.

Микл и Радо (Mickle E. J., Radó T., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, 347—365) показали, что если функционал Φ полунепрерывен и пространство Пеано P односвязно, то слабая аддитивность влечет аддитивность в сильном смысле.

В реферируемой работе показывается, что слабая аддитивность влечет сильную и без этих дополнительных предположений. Р. С. Гутер

7614. Площадь Лебега и мера Хаусдорфа. Радо (Lebesgue area and Hausdorff measure. Radó T.), Fundam. math., 1957, **44**, № 2, 198—237 (англ.)

Рассматривается непрерывное отображение T единичного квадрата Q в евклидово трехмерное пространство R^3; через $A(T)$ обозначается лебегова площадь поверхности Фреше, определенной отображением T.

Важную роль в теории площади поверхностей играет представление $A(T)$ в виде интеграла от некоторой функции кратности по некоторой мере. В предшествующих работах Микла и автора давались частные конструкции функций кратности, допускающие такое представление площади (РЖМат, 1957, 1278, 1279, 3899). В реферируемой работе предлагается общая схема построения таких функций кратности.

Пусть существует закон $\mathfrak{L}$, который для каждого непрерывного отображения $T : Q \to R^3$ ставит в соответствие каждой точке $x \in R^3$ некоторое множество $S \subset Q$. Тем самым определен оператор $\mathfrak{L}(T, x)$, значением которого для каждой пары: отображения T и точки x, является семейство подмножеств Q. Через $\mathfrak{S}(x, T, \mathfrak{L})$ обозначим конечную (быть может, пустую) систему попарно не пересекающихся множеств семейства $\mathfrak{L}(T, x)$, а через $N[\mathfrak{S}(x, T, \mathfrak{L})]$ число множеств такой системы. Положим

$$k(x, T, \mathfrak{L}) = \sup N[\mathfrak{S}(x, \mathfrak{L}T, \mathfrak{L})],$$

причем верхняя грань берется по всем системам $\mathfrak{S}$ при фиксированных T и x. Эту функцию k назовем общей функцией кратности, определенной законом $\mathfrak{L}$. Очевидно, что каждое значение $k(x, T, \mathfrak{L})$ — либо целое неотрицательное число, либо $+\infty$.

Ищется закон $\mathfrak{L}$, обладающий следующими свойствами:

1) Для каждого непрерывного отображения $T : Q \to R^3$ функция $k(x, T, \mathfrak{L})$ измерима по Хаусдорфу и

$$A(T) = \iint_{R^3} k(x, T, \mathfrak{L})\, dH^2.$$

2) Если T_1 и T_2 эквивалентны в смысле Фреше, то для всех $x \in R^3$ имеем

$$k(x, T_1, \mathfrak{L}) = k(x, T_2, \mathfrak{L}).$$

При этом отображения τ_1, τ_2 соответственно топологических пространств X_1, X_2 в метрическое пространство M называют эквивалентными в смысле Фреше, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфное отображение h_ε пространства X_1 на X_2, для которого $d(\tau_1 x_1\ \tau_2 h_\varepsilon x_1) < \varepsilon$ для $x_1 \in X_1$, где d означает расстояние в M.

3) Если τ—преобразование в R^3, сохраняющее расстояния, то для любого непрерывного T и каждого $x \in R^3$

$$k(x, T, \mathfrak{L}) = k(\tau x, \tau T, \mathfrak{L}).$$

4) Пусть закон $\mathfrak{L}$ ставит в соответствие точке при отображении T множество S. Если для отображений T и T^* существует открытое множество $O \supset S$, в каждой точке x которого $Tx = T^*x$, то при отображении T^* закон $\mathfrak{L}$ ставит в соответствие точке x то же самое множество S.

5) Для каждого фиксированного T функция $k(x, T, \mathfrak{L})$ является B-функцией точки $x \in R^3$.

6) Если закон $\mathfrak{L}$ ставит в соответствие точке x при отображении T множество S, то $x \in TS$. Р. С. Гутер

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

7615. Об аксиоме Бурбаки. Уайлер (On an axiom of Bourbaki. Wyler Oswald), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 672 (англ.)

Доказывается, что аксиома A2 системы Бурбаки для теории множеств (РЖМат, 1957, 8544К) может быть заменена более слабой аксиомой, утверждающей существование одноэлементного множества $\{x\}$ для каждого x. А. С. Есенин-Вольпин

7616. Степень пересечения гиперхарактеристического фильтра. Ландсберг (Der Durchschnittsgrad hypercharakteristischer Filter. Landsberg Max), Math. Ann., 1956, **131**, № 5, 429—434 (нем.)

Фильтр Φ называется $\mathfrak{m}$-фильтром, если для каждого семейства $(F_j)_{j \in J}$ элементов фильтра, для которого $\overline{\overline{J}} \leqslant \mathfrak{m}$ (через $\overline{\overline{A}}$ обозначается мощность множества A), $\bigcap^{j \in J} F_j$ является элементом фильтра. Если $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0$, то все множества $X \subseteq A$, для которых $\overline{\overline{A - X}} < \aleph_0$, образуют так называемый характеристический фильтр Φ_A множества A; фильтр на множестве A, меньший, чем Φ_A, называется гиперхарактеристическим. Степенью пересечения $\delta(\Phi)$ гиперхарактеристического фильтра Φ на (бесконечном) множестве A называется наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m}$, для которого фильтр Φ не является $\mathfrak{m}$-фильтром. На бесконечном множестве A тогда и только тогда существует гиперхарактеристический фильтр со степенью пересечения $\overline{\overline{A}}$, когда $\overline{\overline{A}}$ не совпадает с достижимым предельным числом.

Степень пересечения $\delta(\Phi)$ гиперхарактеристического ультрафильтра Φ на множестве A является числом Куратовского (недостижимым предельным числом).

Фильтр Φ называется главным, если существует такое непустое подмножество M множества A, что фильтр Φ состоит из всех содержащих множество M подмножеств множества A. Кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется главным, если существует такое множество A, $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$, что все ультрафильтры на множестве A, являющиеся $\aleph_0$-фильтрами, будут главными. Либо все кардинальные числа являются главными, либо главные кардиналь-

ные числа образуют отрезок $\mathfrak{K}_t$ (вполне упорядоченного) класса $\mathfrak{K}$ всех кардинальных чисел, причем t — вполне определенное число Тарского и $t > \aleph_0$. Если во втором случае Ф—гипехарактеристический ультрафильтр на множестве A, $\bar{\bar{A}} = t$, то либо $\delta(\Phi) = \aleph_0$.
А. Х. Лившиц

7617. О неархимедовой метризуемости в n-кратно упорядоченном множестве. Вагнер (Über nicht-archimedische Metrisierbarkeit in n-fach geordneten Mengen. Wagner K.), Math. Ann., 1957, **134**, № 1, 33-40 (нем.)

Множество $X = (X^1,...,X^n)$ называется n-кратно упорядоченным, если каждое множество X^ν ($\nu = 1,...,n$) упорядочено и X есть прямое произведение множеств $X^1,...,X^n$. Множество X не имеет щели, если в каждом множестве X^ν всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Если $x_1^\nu < x_0^\nu < x_2^\nu$, то множество точек $\mathfrak{A}(x_0^\nu) = \{x^\nu;\ x_1^\nu < x^\nu < x_2^\nu\}$ называется открытым интервалом точки $x_0^\nu \in X^\nu$. Если x_0^ν — первый элемент в X^ν, то $\mathfrak{A}(x_0^\nu) = \{x^\nu;\ x_0^\nu \leqslant x^\nu < x_2^\nu\}$. Прямое произведение интервалов $\mathfrak{A}(x_0^1),...,\ \mathfrak{A}(x_0^n)$ называется открытым интервалом точки $x_0 = (x_0^1,...,x_0^n)$ в X. Аналогично определяются замкнутые интервалы.

Через $X_{\mathfrak{A}}$ обозначается пространство, порожденное в множестве X системой интервалов $\mathfrak{A}(x)$ ($x \in X$).

Пусть $\mathfrak{M}$ — упорядоченное множество с отношением $<$ и бинарной операцией $+$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

1) для всех элементов $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$ имеет место одно из соотношений: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$;
2) из $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ следует $\alpha < \gamma$;
3) для любых двух элементов $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$ существует элемент $\alpha + \beta \in \mathfrak{M}$;
4) из $\alpha \leqslant \beta$ следует $\gamma + \alpha \leqslant \gamma + \beta$ для любого $\gamma \in \mathfrak{M}$;
5) из $\alpha \leqslant \beta$ следует $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$ для любого $\gamma \in \mathfrak{M}$;
6) существует элемент $0 \in \mathfrak{M}$ такой, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 0 + \alpha$ для любого $\alpha \in \mathfrak{M}$;
7) существует счетная последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...$ отличных от нуля элементов таких, что $\lim_{n\to\infty} 2\varepsilon_n = 0$ (для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число $n(\varepsilon)$, что $\varepsilon_\nu + \varepsilon_\nu < \varepsilon$ для всех $\nu > n(\varepsilon)$).

Множество $\mathfrak{M}$ с отношением $<$ и операцией $+$, удовлетворяющими аксиомам 1) — 7), называется метрикой и обозначается $\mathfrak{M}_{(+)}$. Множество X называется $\mathfrak{M}_{(+)}$-метризуемым, если существует однозначное отображение $(x,y) \to \rho(x,y) \in \mathfrak{M}$ множества (X,X) в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\rho(x,y) = 0$ эквивалентно $x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z)$.

n-кратно упорядоченное множество X называется $\mathfrak{M}_{(+)}$-метризуемым, если существует такая $\mathfrak{M}_{(+)}$-метрика, которая порождает в X топологию X_ρ, эквивалентную $X_{\mathfrak{A}}$. Доказана следующая теорема: Пусть $X = (X^1,..., X^n)$ — n-кратно упорядоченное множество без щелей. Пусть X $\mathfrak{M}_{(+)}$-метризуемо. Тогда существует n-кратно упорядоченное подмножество евклидова пространства E^n, имеющее такой же тип, что и X (это означает, что для каждого $\nu = 1, 2,..., n$ существует отображение X^ν в ν-ось пространства E_n, сохраняющее порядок элементов).

Утверждается, что из доказанной теоремы следуют:
а) Упорядоченное множество X имеет порядковый тип множества всех действительных чисел, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) X непрерывно по Дедекинду, 2) X не имеет ни первого, ни последнего элемента, 3) X метризуемо.

б) Если X удовлетворяет условиям 1), 3) из а), то X подобно отрезку прямой.
А. Д. Тайманов

7618. Непротиворечивость проективности некоторых замечательных множеств. Содномов Б. С., Уч. зап. Бурят-Монг. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 10, 3—10

В работе построены следующие множества:

1. Плоское универсальное множество для всех интервалов отрезка [0,1].

2. Универсальное множество для всех нигде не плотных замкнутых подмножеств отрезка [0,1].

Кроме того, доказаны следующие теоремы о возможности построения множеств:

3. Пусть некоторое семейство N измеримых по Лебегу подмножеств отрезка [0,1] имеет универсальное проективное множество класса α. Тогда можно построить проективное множество класса не выше $\alpha+2$, универсальное для всех множеств семейства N, имеющих меру нуль.

4. Пусть имеется трансфинитная последовательность проективных подмножеств отрезка [0,1] класса γ: $E_1, E_2,..., E_\beta,..., \beta \leqslant \alpha < \omega_1$.

Можно построить проективное множество класса $\leqslant \gamma + 2$ универсальное для всех непустых множеств вида

$$E_\beta - \Sigma_{\beta' < \beta} E_{\beta'}.$$

Из работы П. С. Новикова (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 279—316), с помощью построенных выше множеств можно вывести непротиворечивость существования следующих множеств:

1) проективного множества класса не выше четырех, измеримого по Лебегу, но не обладающего свойством Бэра. Это множество не более чем счетно на каждом нигде не плотном совершенном множестве (множество Н. Н. Лузина);

2) проективного множества класса $\leqslant 4$, все относительные B-множества которого суть G_δ (множество Серпинского).
А. Д. Тайманов

7619. К проблеме Серпинского о конгруэнтности множеств. Страус (On a problem of W. Sierpinski on the congruence of sets. Straus E. G.), Fundam. math., 1957, **44**, № 1, 75—81 (англ.)

Обозначим через $\cong$ соотношение конгруэнтности множеств в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Серпинский поставил проблему: существует ли непустое множество $E \subset R^n$ такое, что $E \cong E - \{a\}$ для каждого $a \in E$? Отрицательное решение этой проблемы в случае $n = 1$ содержится в следующем его результате: Для любого множества $E \subset R^1$ существует не более чем одна точка $a \in E$ такая, что $E \cong E - \{a\}$ (Sierpinski W., Fundam. math., 1950, **37**, 1 — 4).

Положительное решение этой проблемы в случае $n = 3, 4,...$ содержится в следующем результате Мыцельского (РЖМат, 1957, 1289): Для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ существует на сфере S_3 трехмерного евклидова пространства R^3 множество E мощности $\mathfrak{m}$ такое, что $E - F \cong E$ для каждого конечного множества $F \subset E$.

В работе для R^3 доказывается полный аналог сформулированного выше предложения Серпинского и этим завершается решение указанной проблемы Серпинского. Кроме того, доказывается следующее общее предложение: Пусть G — свободная группа с рангом $\geqslant 2$, а $\mathfrak{m}$ — кардинальное число такое, что $\bar{\bar{G}}^{\mathfrak{m}} = \bar{\bar{G}}$. Тогда существует множество $U \subset G$ мощности $\bar{\bar{G}}$ такое, что для каждого множества $Q \subset U$, удовлетворяющего условию $\bar{\bar{Q}} \leqslant \mathfrak{m}$, найдется такой элемент $\varphi_Q \in G$, что

$\varphi_Q U = U - Q$. При этом в качестве применения последнего предложения дается простое доказательство одного результата, являющегося частным случаем приведенной выше теоремы Мыцельского. Ш. С. Пхакадзе

7620. Конструкция и свойства некоторых множеств в гиперболической плоскости и на проективной прямой. Вьола (Construction ta propriétés de certains ensembles de points sur le plan hyperbolique ou sur la droite projective. Viola Tullio), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 23, 1819—1821 (франц.)

Обозначим через $\cong$ соотношение конгруэнтности множеств в гиперболической плоскости, а также соотношение проективности на проективной прямой. В качестве гиперболической плоскости рассматривается полуплоскость комплексного переменного $\mathrm{Im}(z) > 0$ с группой преобразований вида $z' = \dfrac{\lambda z + (\lambda^2 - 1)}{z - \lambda}$ $(\lambda > 0)$. Дается положительное решение следующей проблемы: Пусть α — трансфинитное число второго класса. Можно ли построить на полуплоскости $\mathrm{Im}(z) > 0$ (соответственно на оси Ox) счетное множество E_α, содержащее трансфинитную последовательность $z_0, z_1, \ldots, z_\beta, \ldots$ $(\beta < \alpha)$ попарно различных точек, такое, что $E_\alpha \cong E_\alpha - \bigcup_{0 \leqslant \xi < \beta} \{z_\xi\}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha)$?

Отмечается, что в случае $\alpha \leqslant \omega_0$ автором доказано более точное предложение, а именно: Существует счетное множество E на полуплоскости $\mathrm{Im}(z) > 0$ (соответственно, на оси Ox) такое, что для любого конечного множества $U \subset E$ имеем: $E \cong E - U$. Заметим, что аналогичное предложение в случае евклидовой плоскости или евклидовой прямой не имеет места (см. реф. 7619). Ш. С. Пхакадзе

7621. Алгебра множеств. Террасас (Algebra de conjuntos. Terrazas Guillermo), Rev. mat., 1958, № 3, 9—17 (исп.)

Популярная статья о понятии множества.

7622 К. Кардинальные и порядковые числа. Серпинский (Cardinal and ordinal numbers. Sierpiński Waclaw. Monogr. mat. PAN, 34. Warszawa, PAN, 1958, 491 pp.) (англ.)

7623 Д. Об униформизации и расщеплении некоторых множеств. Щегольков Е. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1958

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

7624. Некоторые асимптотические свойства коэффициентов Фурье и теоремы интегрируемости. Чжэнь Юн-мин (Some asymptotic properties of Fourier constants and integrability theorems. Chen Yung-Ming), Math. Z., 1957, **68**, № 3, 227—244 (англ.)

Рассматривается вопрос об интегрируемости функций заданных тригонометрическими или степенными рядами вида

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx,$$

$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx$, $F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ с положительными невозрастающими коэффициентами (причем $\lambda_n \to 0$) или преобразованием Лапласа

$$\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,\theta(t)\,dt$$

от положительной невозрастающей функции $\theta(t)$. Приведем основные результаты, в которых через $\Phi(x)$ обозначена какая-нибудь заданная на $(0, \infty)$ положительная функция, для которой $\Phi(x)/x$ возрастает, $\Phi(x)/x^k$ убывает при некотором $k > 1$.

1. Если $0 < \gamma < 1$, то: а) условие

$$\sum n^{\gamma-2}\,\Phi(n\lambda_n) < \infty \qquad (1)$$

достаточно для того, чтобы

$$x^{-\gamma}\,\Phi(|f(x)|) \in L(0,\pi), \qquad (2)$$

б) условие (1) равносильно условию

$$x^{-\gamma}\,\Phi(|g(x)|) \in L(0,\pi). \qquad (3)$$

2. Если $\Phi(x) = x^p$, $p > 1$, $1 - p < \gamma < 0$, то: а) условия (1) и (2) равносильны, б) условия (1) и (3) равносильны. При $0 < \gamma < 1$ аналогичный результат был получен автором в другой работе (РЖМат, 1957, 4698).

3. Если $-\infty < \gamma < 1$, то будут равносильны условия

$$(1-x)^{-\gamma}\,\Phi(F(x)) \in L(0,1) \text{ и } \sum n^{\gamma-2}\,\Phi(nc_n) < \infty.$$

4. Если $-\infty < \gamma < 1$, то будут равносильны условия

$$x^{-\gamma}\,\Phi(\omega(x)) \in L(0,1) \quad \text{и} \quad t^{\gamma-2}\,\Phi(t\,\theta(t)) \in L(1,\infty).$$

Если в этих условиях поменять местами интервалы $(0,1)$ и $(1,\infty)$, то равносильность условий сохранится. Для $\Phi(x) = x$ это показал Хейвуд (РЖМат, 1956, 5963).

Результаты 1, 3, 4 применяются автором для случая, когда

$$\Phi(x) = x^p(1 + \log^+ x)^m \ (m > 0,\ p \geqslant 1) \text{ и } \Phi(x) = x^p (p > 1).$$

Даются также теоремы аналогичного типа, когда в качестве $\Phi(x)$ берется экспонента. Каждый частный случай автор формулирует как отдельную теорему (всего в статье 23 теоремы). А. А. Шнейдер

7625. О некотором методе чезаровского суммирования рядов Фурье. Яно (On a method of Cesaro summation for Fourier series. Yano Kenji), Kōdai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 2, 49—58 (англ.)

Пусть $f(t)$ — функция периода 2π, интегрируемая по Лебегу на $[-\pi,\pi]$, с рядом Фурье

$$f(t) \sim a_0/2 + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad (1)$$

а

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\,\varphi(u)\,du \qquad (\alpha > 0).$$

Теорема 1. Если $0 < \alpha < 1$ и $\Phi_1(t) = O(t^{1/(\alpha)})$, то ряд (1) суммируем методом (C, α) к $f(x)$ в точке $t = x$.

Теоремы 2—3. Если $0 < \beta < \gamma$, а $\Phi_\beta(t) = O(t^\gamma)$, то ряд (1) суммируем (C, α) к $f(x)$ в точке $t = x$, где $\alpha = \beta/(\gamma - \beta + 1)$.

Теорема 4. Для $\alpha > -1$ существует квазифейеровское ядро $F_n^{(\alpha)}(t)$ порядка α такое, что

1) ряд (1) суммируем (C, α) к $f(x)$ при $t = x$ тогда и только тогда, когда $\int_0^\pi \varphi(t)\,F_n^{(\alpha)}(t)\,dt = o(1)$ $(n \to \infty)$,

2) s-я производная ядра $F_n^{(\alpha)}(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\left[F_n^{(\alpha)}(t)\right]^{(s)} = O(n^{s+1}), \quad h \geqslant 0, \quad t \text{ — любое};$$

$$\left[F_n^{(\alpha)}(t)\right]^{(s)} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-s}\, t^{\alpha+1}}\right), \quad nt \geqslant 1, \quad h = 0,1,\ldots,h_0$$

где h_0 может быть взято как угодно большим.

Теоремы 1 и 2 являются усилением результатов Вана, Идзуми и Суноути, Суноути (Wang F. T., J. London Math. Soc., 1947, **22**, 40 — 47; Izumi S., Sunouchi G., Tôhoku Math. J., 1950, **1**, 313 — 326; РЖМат, 1955, 5722).

В качестве применения теоремы 4 приводится результат:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{\sigma_{n-k}^{1+k}(x) - f(x)}{k+1} = O(n^{-1}) \quad (n \to \infty) \quad (m = 1,\ 2,\ldots)$$

равномерно относительно x, если $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$.

Это примыкает к теореме С. Н. Бернштейна о том, что $\sigma_n^1(x) - f(x) = O(n^{-1}\log n)$ для $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$, где O нельзя заменить на o ($\sigma_m^r(x)$ — $(C,\ r)$-средние для $f(x)$).

И. М. Ганзбург

7626. Определенная расходимость рядов, сопряженных к рядам Фурье. Сингх (Definite divergence of the conjugate Fourier series. Singh Basudeo), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 647—651 (англ.)

Рассматриваются 2π-периодические функции $f(x) \in L(-\pi,\pi)$ и соответствующие им сопряженные к рядам Фурье ряды

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\ (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1}$$

и сопряженные функции

$$\bar{f}\ (x) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\psi(t)}{2\operatorname{tg} t/2}\,dt, \tag{2}$$

где $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$.

Устанавливается теорема: Если в точке x выполняются условия:

$$\int_{0}^{\delta} t^{-1}\left|\ \psi(t+\varepsilon) - \psi(t\ \right| dt = O(1), \tag{3}$$

$$\int_{0}^{t}\psi(u)\,du = O(t) \tag{4}$$

для некоторого фиксированного δ, то определенная расходимость интеграла (2) к $+\infty$ (или $-\infty$) эквивалентна определенной расходимости ряда (1) к $+\infty$ ($-\infty$).

Эта теорема является обобщением теоремы Андерсона, где соотношения (3) и (4) были заменены более сильным условием:

$$\int_{\varepsilon}^{\delta}\left|\frac{\psi(t)}{t} - \frac{\psi(t+2\varepsilon)}{t+2\varepsilon}\right| dt = O(1)$$

(Anderson S.K., Duke Math. J., 1947, **14**, 803—805), а также более ранних результатов Прасада (Prasad B.N., Ann. Math., 1932, **33**, 771—772) и Мурсада (Moursund A. F., Duke Math. J., 1945, **12**, 515—518).

И.М. Ганзбург

7627. О чезаровских средних r-го порядка для r-кратно продифференцированных рядов Фурье и сопряженных к ним рядов. Моханти, Нанда (On the Cesàro means of order r of the r th derived Fourier series and its allied series. Mohanty R., Nanda M.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, **A23**, № 2, 93—99 (англ.)

Пусть 2π-периодическая функция $f(t) \in L(-\pi,\pi)$, а ее ряд Фурье и сопряженный к нему имеют соответственно вид:

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ (b_k \cos kt - a_k \sin kt). \tag{2}$$

Пусть далее $t_n^{(r)}$ и $\bar{t}_n^{(r)}$ обозначают соответственно (C,r)-средние для r-кратно продифференцированных рядов (1) и (2) при $t=x$, а $P(t) = \sum_{i=1}^{r-1}\frac{\theta_i}{i}\,t^i$ есть полином, для которого функции

$$g(t) = rt^{-r}\{f(x+t) - P(t) + (-1)^r[f(x-t) - P(-t)\ ]\},$$
$$h(t) = rt^{-r}\{f(x+t) - P(t) + (-1)^{r+1}[f(x-t) - P(-t)]\}$$

интегрируемы в $[-\pi,\pi]$ (вне $[-\pi,\pi]$ они продолжаются периодически).

Доказываются:

Теорема 1. Если $\int_{t}^{\pi} u^{-1}\left|\ g(u)\ \right| du = o(\log t^{-1})\ (t \to 0)$, то $t_n^{(r)} = o(1)$, $n \to \infty$.

Теорема 2. Если

$$\int_{t}^{\pi} u^{-1}\left|\ h^*(u)\ \right| du = o(\log t^{-1})\ (t \to 0),$$

то $\bar{t}_n^{(r)} \sim \frac{d}{\pi}\log n$, где $h^*(u) = h(u) - d$; $d \equiv d(x)$,

а знак $\sim$ означает асимптотическое равенство.

Имеются опечатки. Например, на стр. 93, строка 7 снизу, вместо $t_n^{-(r)}$ должно быть $\bar{t}_n^{(r)}$; строка 5 снизу, вместо $\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\theta^i}{i}\,t^i$ должно быть $\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\theta_i}{i}\,t^i$.

И. М. Ганзбург

7628. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. Ахиезер Н. И., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 3—43

Обзор работ, вышедших до июля 1955 г., посвященных следующей проблеме С. Н. Бернштейна (Bull. Soc. Math. France, 1924, **52**, 399 — 410). С помощью функции $\Phi(x)(-\infty < x < \infty)$, $\inf \Phi(x) > 0$, определяется линейное пространство C_Φ непрерывных функций $g(x)$, удовлетворяющих условию $\lim_{x \to \pm\infty}[g(x)/\Phi(x)] = 0$, с нормой $\|g\|_\Phi =$

$= \sup \frac{|g(x)|}{\Phi(x)}$. Предполагается, что $x^n \in C_\Phi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Если полиномы образуют плотное множество в этом пространстве, то $\Phi(x)$ называется весовой функцией. Требуется дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была весовой.

В введении приведен первый результат С. Н. Бернштейна: Для того чтобы целая функция $\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{2n}$ $(c_n \geqslant 0)$ была весовой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Phi(x)}{1+x^2}\, dx = \infty . \qquad (1)$$

Приведен результат М. М. Джрбашяна (Докл. Арм ССР, 1947, вып. VII, № 1): Если $\Phi(x)$ — логарифмически выпукла, то условие (1) — достаточное. В конце статьи приведен пример Карлесона (Carleson L., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, № 6, 953 — 961) весовой функции со сходящимся интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln M_\Phi(x)}{1+x^2}\, dx ,$$

где $M_\Phi(x)$ — логарифмически выпуклая миноранта функции $\Phi(x)$.

Введены обозначения: для функции $\Phi(x)$ имеет место случай B, если множество точек, в которых $\Phi(x) \neq \infty$, имеет конечную предельную точку, и случай H, если это не так. Определяются множество $\mathfrak{M}_\Phi$ многочленов, для которых $|P(x)| \leqslant \Phi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, и функционал

$$K[\Phi] = \sup_{P \in \mathfrak{M}_\Phi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |P(x)|}{1+x^2}\, dx \right\}.$$

Доказан основной критерий, полученный впервые автором и С. Н. Бернштейном (РЖМат, 1955, 1153): Равенство

$$K[\Phi] = \infty \qquad (2)$$

является достаточным условием для того, чтобы $\Phi(x) / \sqrt{1+x^2}$, а следовательно, и $\Phi(x)$, была весовой. В случае B это условие является также необходимым. Автор показывает, что в случае H необходимость условия (2) непосредственно следует из результатов Холла (Hall T., On polynomials bounded at an infinity of points. Thesis, Uppsala, 1950). Вводится функция Холла $M(z) = \sup_{P \in \mathfrak{M}_\Phi} |P(z)|$ и показывается, что при невещественном z, $M(z) = \infty$, если $K[\Phi] = \infty$, и $M(z)$ конечно в противном случае. Автор отмечает, что в этих терминах и другими методами проблему С. Н. Бернштейна решил С. Н. Мергелян (РЖМат, 1956, 3750). Далее показано, как из основного критерия получаются результаты Полларда (РЖМат, 1955, 1716) и др. Кроме того, показано, как из основного критерия (2) вытекает критерий М. Рисса определенности проблемы моментов.

Б. Я. Левин

7629. Замечания о механической квадратуре. Киш О., Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 3-4, 473—476

Если $f(t)$ есть произвольный четный тригонометрический многочлен степени $2(r+1)n - 1$, то верно равенство

$$\int_0^\pi f(t)\, dt = \frac{\pi}{n(r!)^2} \sum_{\rho=0}^{r} \frac{s_\rho}{4^\rho n^{2\rho}} \sum_{\nu=1}^{n} f^{(2\rho)}\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right).$$

Здесь s_ν — элементарные симметрические функции чисел $1, 4, \ldots, r^2$: $s_r = 1$, $s_{r-1} = 1 + 4 + \ldots + r^2$, $s_{r-2} = 1\cdot 4 + 1\cdot 9 + \ldots + (r-1)^2 \cdot r^2, \ldots, s_0 = 1\cdot 4 \cdot \ldots \cdot r^2$. Принципиальная возможность построения указанной квадратурной формулы была известна ранее (Turán P., Acta scient. math., 1950, **12**, 30—37). Автором найдены значения коэффициентов формулы.

Когда $g(x)$ есть произвольный алгебраический многочлен степени $2(r+1)n - 1$, тогда

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} g(x)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{n(r!)^2} \sum_{\rho=0}^{r} \frac{s_\rho}{4^\rho n^{2\rho}} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{d^{2\rho}}{dt^{2\rho}} g(\cos t)\right]_{t = \pi(2\nu-1)/2n},$$

что является обобщением квадратурной формулы Эрмита.

В. И. Крылов

7630. Поправка. Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 3, 422

Исправляется неточность в формулировке теоремы 5 заметки Д. Л. Бермана (РЖМат, 1957, 3919).

7631. Поправка. Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 3, 351

Сообщается о двух опечатках в статье А. С. Кованько (РЖМат, 1957, 4710).

7632 Д. Некоторые вопросы из теории коэффициентов Фурье. Конюшков А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958

См. также: 7883, 7905, 7906

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

7633. Разложение обратной функции в ряд Тейлора. Островский (Le développement de Taylor de la fonction inverse. Ostrowski Alexandre), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 4, 429—430 (франц.)

Пусть $w = f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ $(a \neq 0)$ и $\varphi(w) = \sum_1^\infty \beta_n w^n$ ей обратная функция.

Приводятся формулы, дающие явное выражение коэффициентов β_n через a_n.

Т. И. Краснощекова

7634. Сходимость ряда Лорана на контурах для двухсвязной области. Артюшкин А. К., Уч. зап. Марийск. гос. пед. ин-та, 1957, **12**, 3—10

Известна теорема Фейера о том, что если функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на

односвязную область, ограниченную замкнутой жордановой кривой, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится равномерно на окружности $|z|=1$. Автор пытается перенести эту теорему на случай, когда $\varphi(z)$ конформно отображает кольцо $K(r<|z|<R)$ на двухсвязную область G, ограниченную двумя замкнутыми жордановыми кривыми. Доказательство ведется методом, которым доказана теорема Фейера в книге П. Монтеля (Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, 1936, стр. 100—104) Действительно, этот метод позволяет такое перенесение осуществить. Однако доказательство, которое приводит автор, представляется референту неубедительным. Например, автор формулирует следующую лемму, на которую, по его мнению, опирается доказательство теоремы Фейера: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируется процессом средних арифметических и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n|^2$ сходится равномерно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится равномерно. В таком виде эта лемма неверна. Чтобы она была верной, надо потребовать равномерную (а не простую) суммируемость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ процессом средних арифметических. Далее автор пишет равенство

$$\varphi(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{m} c_n \frac{z^n}{R^n} + \sum_{n=1}^{m} c'_n \frac{r^n}{z^n}, \qquad (1)$$

где $\varphi(z)$ — функция, конформно отображающая K на G, а затем — равенство

$$\varphi(Re^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{m} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{m} c'_n \frac{r_n}{R_n} e^{-in\theta}. \qquad (5)$$

Если в равенствах (1), (5) m — конечное число, то оба эти равенства, вообще говоря, неверны. Если же автор мыслит $m=\infty$, то тогда равенство (5) требует доказательства. Ничего не говорится также, что понимает автор под $\varphi(Re^{i\theta})$.

Из (5) он получает равенства

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(Re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta, \qquad (6)$$

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} \varphi(Re^{i\theta}) e^{in\theta}\, d\theta \qquad (7)$$

и утверждает, «что равенство (5) будет представлять ряд Фурье при $m=\infty$».

Для доказательства утверждения, что ряд

$$c_0 + \sum_1^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_1^{\infty} c'_n \frac{r^n}{R^n} e^{-in\theta}$$

является рядом Фурье функции $\varphi(Re^{i\theta})$, действительно достаточно наличия равенств (6) и (7). Но эти равенства автором не обоснованы.

Затем доказывается сходимость рядов $\sum_1^{\infty} n|c_n|^2$ и $\sum_1^{\infty} n|c'_n|^2$. Этот факт хорошо известен (А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950, стр. 374). Н. А. Давыдов

7635. Функция комплексных переменных: ее представление как сумма отрицательных степеней линейных функций. Лере (Fonction de variables complexes: sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires. Leray Jean), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1956, **20**, № 5, 589—590 (франц.)

Пусть X и Ξ — двойственные комплексные линейные пространства комплексной размерности l, а Ξ^* — проективное пространство, соответствующее Ξ. Пусть, далее, $C \subset X$ — регулярно выпуклый компакт, C — его внутренность, ∂C — его граница, а $f(x)$ — голоморфная функция на C.

Тогда для всех точек $z \in C$ имеем:

$$f(z) = \frac{(l-1)!}{(2\pi i)^l}\int_{\alpha^*} \frac{f(x)}{[\xi(x-z)^l]}\, \omega^*(\xi) \wedge \omega(x),$$ где $\wedge$ — внешнее произведение, $\omega(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l$, $\omega^*(\xi) = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} \xi_k d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_{k-1} \wedge d\xi_{k+1} \ldots \wedge d\xi_l$. $\alpha^* = \alpha^*(C)$ — цикл в $\Xi^* \times X$, состоящий из точек (ξ, x), таких, что $x \in \partial C$, а $\xi \cdot (x-z) \neq 0$ для всех $z \in C_0$. Случай $l=1$ сводится к интегральной формуле Коши. Н. Я. Виленкин

7636. Об отыскании класса сходимости некоторых интерполяционных задач. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 1, 31—33

Пусть $\{L_n(f)\}$ — система линейных функционалов, определенных на всем классе целых функции $F(z)$:

$$L_n(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z) u_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

$$u_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z^{n+k}.$$

Через $\{P_n(z)\}$ обозначается система многочленов, биортогональная с системой функционалов $\{L_n(F)\}$:

$$L_n(P_m) = \delta_{m,n}, \quad \delta_{m,n} = 0, \quad (n \neq m), \quad \delta_{n,n} = 1.$$

Ставится задача об отыскании класса целых функций, для которых

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(F) P_n(z). \qquad (1)$$

Эта задача решается при следующих ограничениях на систему функционалов:

1) для некоторой последовательности $\{\lambda_n\}$, которая уточняется ниже, существует область E, в которой $u_n\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$ при $n > n_0(z)$ не обращаются в нуль и $[u_{n+1}(z/\lambda_{n+1})/u_n(z/\lambda_n)] \to u(z)$ равномерно внутри E; 2) $\lambda_n = \lambda(n)$, где $\lambda(z)$ регулярна на плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, положительна при $z>0$ и $w=\lambda(z)$ отображает полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > 0$ на область D, граница которой в окрестности $w=\infty$ имеет уравнения $\theta = \pm\frac{1}{2}\alpha(r)$, $w = re^{i\theta}$, причем: а) $\alpha(r)$ и две ее производные монотонны при $r > r_1$, б) $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \rho > \frac{1}{2}\pi$,

$\lim_{r\to\infty} r\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} = 0$. Последние условия означают, что

$$\ln\lambda_n > \frac{1}{2}\ln n, \quad \ln\ln\lambda_n = O(\ln n).$$

При указанных ограничениях на $\{L_n(f)\}$, для отыскания искомого класса сходимости ряда (1), строятся: 1) та ветвь $h(z)$ функции, обратной $\lambda(z)$, которая положительна при $z > 0$, 2) целая функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{h(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta,$$

где L начинается в бесконечности ниже действительной оси, совпадая в окрестности $\zeta = \infty$ с кривой $\theta = -\frac{1}{2}\alpha(r)$, и кончается в бесконечности выше действительной оси, совпадая в окрестности $\zeta = \infty$ с $\theta = \frac{1}{2}\alpha(r)$.

Полагая

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi(\zeta)u_n\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

устанавливается существование предела $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}(z)}{v_n(z)} = v(z)$.

Основной результат:

Теорема. Пусть функция $v(z)$ регулярна и однолистна в звездообразной области $K \subset E$, отображаемой функцией $w = v(z)$ на круг. Если целая функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi(z\zeta)f(\zeta)d\zeta,$$

где $f(\zeta)$ регулярна вне K, а контур C содержит все особые точки $f(\zeta)$, то справедливо равенство (1).

Высказывается предположение, что теорему нельзя улучшить, когда K является максимальной областью однолистности $v(z)$.

Доказательства не приводятся. М. Г. Хапланов

7637. Интерполяция линейных операторов. Стейн (Interpolation of linear operators. Stein Elias M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 2, 482—492 (англ.)

Для заданных двух пространств M и N, соответственно, с мерами dm и dn, рассматриваются зависящие от комплексного параметра аналитические семейства операторов T_z т. е. такие семейства операторов, которые обладают следующими свойствами:

1) при каждом z T_z есть линейное преобразование функций, заданных на M и принимающих только конечное число отличных от нуля значений на множествах конечной меры, в функции, измеримые на N

2) Если ψ — функция, заданная на M и принимающая только конечное число отличных от нуля значений на множествах конечной меры, а φ такая же функция на N, то функция

$$\Phi(z) = \int T_z(\psi)\varphi\, dn \qquad (1)$$

аналитична внутри полосы $0<\mathrm{Re}z<1$ и непрерывна в ее замыкании.

3) Функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{|y|\le r}\sup_{0\le x\le 1}\ln|\Phi(x+iy)| \le Ae^{ar}, \qquad (2)$$

где $a < \pi$.

Устанавливается, что если T_z такое семейство операторов, а $1 \le p_1, p_2, q_1, q_2 \le \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}$, $(0 \le t \le 1)$, и для любой функции f, принимающей только конечное число отличных от нуля значений на множествах конечной меры,

$$\begin{aligned} \|T_{iy}(f)\|_{q_1} &\le A_0(y)\|f\|_{p_1}, \\ \|T_{1+iy}(f)\|_{q_2} &\le A_1(y)\|f\|_{p_2}, \end{aligned} \qquad (3)$$

то при условии

$$\ln|A_\nu(y)| \le Ae^{a|y|}, \ (a < \pi;\ \nu = 0,1),$$

справедливо неравенство

$$\|T_t(f)\|_q \le A_t\|f\|_p,$$

где

$$\ln A_t = \int_{-\infty}^{\infty}\omega(1-t,y)\ln A_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\omega(t,y)\ln A_1(y)\,dy,$$

$$\omega(t,y) = \frac{1/2\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}{\left[\operatorname{tg}^2\frac{\pi t}{2} + \operatorname{th}^2\frac{\pi y}{2}\right]\operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{2}}$$

Дано приложение к средним Бохнера—Рисса для кратных интегралов Фурье, и получено обобщение теоремы Питта (Pitt H. R., Duke Math. J., 1937, 3, 747—755) на любые ограниченные ортонормированные системы функций. А. Ф. Тиман

7638. Некоторые критерии нормальности семейств непрерывных функций. Арсов (Some criteria for normality of families of continuous functions. Arsove Maynard G.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 299—305 (англ.)

Нормальность семейства F непрерывных функций $w(z)$, заданных в области Ω n-мерного пространства определяется обычным образом (но сходимость к бесконечности не допускается). Доказано, что для нормальности необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного $K \subset \Omega$

$$\sup_{w\in F, z\in K}|w(z)| < \infty, \ \lim_{r\to 0}\sup_{w\in F,\, z\in K}|w(z) - \alpha_r w(z)| = 0$$

(где $\alpha_r w(z)$ — осреднение функции w по шару радиуса r с центром z. Первое условие можно заменить на условие ограниченности в L_p $(p \ge 1)$. Этот критерий особенно удобен в применении к семействам субгармонических или (более общо) разностей субгармонических функций, в связи с чем приводятся без доказательства основные результаты исследования таких семейств автором (РЖМат, 1958, 6656); отметим, например, что для нормальности такого семейства F достаточна равномерная ограниченность (в смысле G или в смысле L_p, $p > 1$) совокупности всех функций из F и всех соответ-

ствующих им плотностей. Формулируются следствия, относящиеся к семействам решения уравнения $\Delta w + \lambda(z) w = 0$, $\sup |\lambda| < \infty$. А. Д. Мышкис

7639. Некоторые свойства покрытий выпуклых областей в теории конформного отображения. Ся Даосинь (Some covering properties of convex domains in the theory of conformal mapping. Shah Tao-shing, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 3, 421—432 (кит.; рез. англ.)

Пусть D есть выпуклая область плоскости w, содержащая точку $w = 0$, и пусть внутренний радиус D относительно этой точки равен единице. Предположим, что для каждой граничной точки w области D существует окружность радиуса ρ (где ρ есть фиксированное число), проходящая через w и содержащая D внутри себя. Обозначим через C_ρ семейство всех таких областей D. Пусть $D \in C_\rho$ и w_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, являются граничными точками D, удовлетворяющими условию $\arg \frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} = \frac{2\pi}{n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $w_{n+1} = w_1$. Рассмотрим

$$A_n(\rho) = \min_{D \in C_\rho} \min_{w_1, w_2, \ldots, w_n} \max_\nu |w_\nu| .$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема. $A_1(\rho) = 1 / \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}}\right)$.

$$A_n(\rho) = \rho \left(1 - \frac{\sin x\pi}{(\sin \pi/n)}\right) \quad (n > 1$$

где x есть корень уравнения

$$(1 - xn)\, \rho \Gamma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n} - x\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{x} + x\right),$$

принадлежащий промежутку $0 < x < \frac{1}{n}$.

Доказывается также, что постоянная Блоха семейства C_ρ есть $A_2(\rho)$, причем эта постоянная удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{A_2(\rho)\,(2\rho - A_2(\rho))}\ \sin^{-1} \sqrt{\frac{A_2(\rho)}{2\rho}} = \pi/4$$

и реализуется единственной функцией семейства C_ρ. Дается простое доказательство того, что постоянная Блока для $\sum C_\rho$ есть $\pi/4$ и что реализующая ее функция в $\sum C_\rho$ тоже единственна.

Примечание референта. В резюме автора ошибочно напечатано, что точки w_ν, входящие в определение $A_n(\rho)$, принадлежат области D. Вместо $\sin \sqrt{\frac{A_2(\rho)}{2\rho}}$ следует читать $\sin^{-1} \sqrt{\frac{A_2(\rho)}{2\rho}}$.

Ю. Е. Аленицын

7640. О третьих коэффициентах ограниченных однолистных функций. Сюй Чжэнь-фань, Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 2, 279—289 (кит.)

Тамми (РЖМат, 1956, 7999) для функций класса S_M ($f(z) \in S_M$, $|f(z)| < M$) установил:

$$|c_3| \leqslant 1 - 1/M^2 \quad (1 \leqslant M \leqslant e),$$

$$|c_3| \leqslant 2(\sigma - 1/M)^2 + 1 - 1/M^2 \leqslant 3 \quad (e \leqslant M),$$

где σ удовлетворяет соотношениям: $\sigma \ln \sigma + 1/M = 0$ $(1/e \leqslant \sigma \leqslant 1)$.

В этой работе методом Голузина (Труды Матем. ин-та АН СССР, 1949, 27) автор установил следующие оценки для функций S_M:

$$|c_3 - \alpha c_2^2| \leqslant \begin{cases} 1 - 1/M \text{ при } M \leqslant e^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ 2(\sigma - 1/M)^2 + 1 - 1/M^2 \text{ при } M \geqslant e^{\frac{1}{1-\alpha}}, \end{cases}$$

$$|c_3| - |c_2| \leqslant \begin{cases} 1 - 1/M^2 \text{ при } M \leqslant M_0 \approx 1{,}9 \times 10^2, \\ 2(e^{-\nu_1} - \frac{1}{M})^2 - e^{-\nu_1} + \frac{3}{4} - \\ - \frac{1}{M^2} \text{ при } M \geqslant M_0 \approx 1{\cdot}9 \times 10^2, \end{cases}$$

$$|c_3| - |c_2| \geqslant -\sqrt{1 - \frac{1}{M^2}} \text{ при } M \geqslant \frac{5}{3},$$

где σ удовлетворяет соотношениям

$$\sigma\left(\ln \sigma + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{M} = 0, \qquad e^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \sigma \leqslant 1;$$

ν_1 — положительный корень, удовлетворяющий уравнению

$$\nu_1 e^{-\nu_1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{M}, \quad 0{,}357 \ldots \leqslant \nu_1 \leqslant 1.$$

Кроме того, получены аналогичные результаты дл p-симметричных функций в S_M. Лим Ен Су

7641. О параметрическом представлении функций, однолистных в круговом кольце. Лин Ен Пир, Чосон минчжуцун инмин конъхвагук гвахаквон хакпо, 1955, № 11, 99—102 (кор.)

Ранее автором получено интегральное представление для функций, регулярных в кольце $R_q: q < |z| < 1$, непрерывных в $q \leqslant |z| \leqslant 1$ и имеющих на $|z| = q$ постоянную вещественную часть (РЖМат, 1957, 6292).

В настоящей заметке, пользуясь этой формулой, автор установил параметрическое представление функций $f(z)$, $f(q) = q$, звездообразных в R_q и удовлетворяющих на $|z| = q$ условию

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(z) = 1,$$

а именно:

$$f(z) = z \exp\left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{P_q(z e^{-i\Theta})}{P_q(q e^{i\Theta})}\, d\alpha(\Theta)\right],$$

где

$$P_q(\zeta) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - q^{2\nu}\zeta)(1 - q^{2\nu+2}\zeta^{-1}),$$

$\alpha(\theta)$ — некоторая неубывающая функция в $[0, 2\pi]$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(2\pi) = 2\pi$. Лим Ен Су

Примечание редакции. Параметрическое представление различных классов аналитических в кольце функций, в том числе и звездообразных, было указано В. А. Зморовичем (Докл. АН СССР, 1952, 86, №3, 465 — 468).

7642. Об искажениях в одном классе однолистных функций. Дан Сун-ши (On the distorsions of a class of schlicht functions. Tang Sung-shih), Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 3, 478—484 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\sum_R^{(k)}$ — класс функций $F_k(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{\zeta^{nk-1}}$ ($k = 1, 2, \dots$), регулярных и однолистных в $1 < |\zeta| < \infty$ и удовлетворяющих там условию $|F_k(\zeta)| > R$ ($R \geqslant 0$).

Автор, спираясь на уравнение Левнера, усиливает и обобщает различные известные оценки (Г. М. Голузин, И. Е. Базилевич, Н. А. Лебедев, И. М. Милин и др.) типа теорем искажения в классах $\sum_R^{(k)}$. Например, получается следующий результат: пусть $\zeta_\nu \zeta'_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — комплексные числа из $|\zeta| > 1$, γ_ν, γ' — произвольные комплексные числа, а числа $a_{\nu,\mu}$ ($a_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu}$) — вещественные, такие, что для вещественных x_ν всегда $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu \geqslant 0$; если $F_l(\zeta) \in \sum_R^{(1)}$, $l = 1, 2, \dots, m$, то

$$\left|\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu,\mu}\gamma_\nu \gamma'_\mu \prod_{j=1}^{m} \ln Q_{F_j}(\zeta_\nu, \zeta'_\mu)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu,\mu}\gamma_\nu \overline{\gamma_\mu} \prod_{j=1}^{m} \ln \frac{1 - \frac{R^2}{F_j(\zeta_\nu)\overline{F_j(\zeta_\mu)}}}{1 - \frac{1}{\zeta_\nu \overline{\zeta_\mu}}}} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu,\mu}\gamma'_\nu \overline{\gamma'_\mu} \prod_{j=1}^{m} \ln \frac{1 - \frac{R^2}{F_j(\zeta'_\nu)\overline{F_j(\zeta'_\mu)}}}{1 - \frac{1}{\zeta'_\nu \overline{\zeta'_\mu}}}}$$

где

$$Q_F(\zeta, \zeta') = \begin{cases} \dfrac{F(\zeta) - F(\zeta')}{\zeta - \zeta'}, & \text{если } \zeta \neq \zeta' \\ F'(\zeta), & \text{если } \zeta = \zeta'. \end{cases}$$

Обозначим через S'_M — класс функций $f(z) = \dfrac{1}{F\left(\frac{1}{z}\right)}$, где $F(\zeta) \in \sum_{1/M}^{(1)}$ и $F(\zeta) \neq 0$ в $1 < |\zeta| < +\infty$.

Тогда ($|z| = r$, $|f(z)| = f$)

$$\ln \frac{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}}{f(z)^\lambda} \Bigg| \leqslant \begin{cases} \ln\left[\left(\frac{1+r}{1+\frac{f}{M}}\right)^{1-\lambda}\left(\frac{1-\frac{f}{M}}{1-r}\right)^{3-5\lambda}\right], & \lambda \leqslant \frac{1}{2} \\ \ln\left[\left(\frac{1+r}{1+\frac{f}{M}}\right)^{3-5\lambda}\left(\frac{1-\frac{f}{M}}{1-r}\right)^{1-\lambda}\right], & \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{3} \\ \ln\left[\left(\frac{1+r}{1+\frac{f}{M}}\right)^{\lambda-1}\left(\frac{1-\frac{f}{M}}{1-r}\right)^{5\lambda-3}\right], & \lambda \geqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

Правая часть неравенства зависит от $|f(z)|$ (различно при разных λ).

Примечание референта. Интересно получить оценку рассматриваемой величины такую, чтобы правая часть зависела только от $|z|$ (ср. РЖМат, 1956,7286). Н. А. Лебедев

7643. Ограниченные однолистные функции в единичном круге. Лю Ли-цюань (Bounded schlicht functions in the unit circle. Liu Li-chuan), Шусюэ сюэбао, Acta. math. sinica, 1957, 7, № 3, 439—450 (кит.; рез. англ.)

Пусть B_k ($k = 1, 2, \dots$) — класс функций $f(z) = az + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk+1} z^{nk+1}$, $|a| < 1$, регулярных и однолистных в $|z| < 1$ и таких, что $|f_k(z)| < 1$ в $|z| < 1$. С помощью уравнения Левнера автором доказана

Теорема. Пусть $f_k(z) \in B_k$. Обозначим: $|z| = r$, $\rho = (2k - \sqrt{3k^2+1})^{1/k}(k-1)^{-1/k}$ и через λ — наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{k + 1 + (k-1)\lambda^{2k}}{k(1+\lambda^k)^2} = \frac{4r^k}{(1+r^k)^2}.$$

Тогда

1) если $|a| \leqslant \dfrac{\lambda}{r}\left(\dfrac{1-r^k}{1-\lambda^k}\right)^{2/k}$, то

$$|f'_k(z)| \leqslant \frac{R}{r}\frac{1+r^k}{1-r^k}\frac{1-R^k}{1+R^k}, \tag{1}$$

где R — положительный корень уравнения

$$\frac{R^k}{(1-R^k)^2} = \frac{|a|^k r^k}{(1-r^k)^2};$$

2) если

$$\frac{\lambda}{r}\left(\frac{1-r^k}{1-\lambda^k}\right)^{2/k} < |a| < \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1+\rho^k}{1-\rho^k}},$$

то

$$|f'_k(z)| \leqslant \frac{r}{x}\frac{1-R^k}{1-r^k}\frac{1+x^k}{1+r^k}|a|, \tag{2}$$

где положительные R и x определяются из уравнений

$$\frac{R}{x}\frac{1+x^k}{1+R^k}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1-x^k}{1+x^k}} = |a|, \quad \frac{k+1+(k-1)R^{2k}}{k(1+R^k)^2} = \frac{4x^k}{(1+x^k)^2}; \tag{3}$$

3) если $|a| \geqslant \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\frac{1+\rho^k}{1-\rho^k}}$, то

$$|f'_k(z)| \leqslant \frac{1-R^{2k}}{1-r^{2k}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k-1-(3k-1)R^{2k}}{2(1-R^{2k})}}$$

где R — вещественный корень уравнения

$$\ln\frac{1}{|a|} = 2k\left(k - 1 + \frac{2kR^{2k}}{1-R^{2k}}\right)\ln\frac{r}{R}.$$

Полученные оценки 1), 2) и 3) — точные.

Примечания референта. 1) В работе очень много опечаток. 2) Второе из уравнений (3), рассматриваемое как уравнение относительно R, может иметь два положительных корня. Автор не указывает, какой из корней следует в этом случае выбрать (видимо наименьший).

3) Обозначим через $S_M^{(1)}$ класс функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и однолистных в $|z| < 1$ и таких, что $|f(z)| < M$, $M > 1$ в $|z| < 1$. Если $f_k(z) \in B_k$, то $f(z) = \left[\frac{f_k(z^{1/k})}{a}\right]^k \in S_{1/|a|}^{(1)}$.

Обратно, если $f(z) \in S_M^{(1)}$, то $f_k(z) = \sqrt[k]{\frac{f(z^k)}{M}} \in B_k$, с $a = \frac{1}{M}$.

Представляется интересным, пользуясь указанной связью, перефразировать теорему для класса $S_M^{(1)}$. При этом будет получена оценка сверху величины

$$\left| \frac{z^{\frac{k-1}{k}} f'(z)}{f(z)^{\frac{k-1}{k}}} \right|, \qquad f(z) \in S_M^{1)},$$

где k — натуральное число. Следует выяснить, при каких вещественных k полученная таким способом оценка справедлива. Смотри также реф. 7642. Н. А. Лебедев

7644. Поведение функции комплексного переменного в бесконечности. Менгер (The behavior of a complex function at infinity. Menger Karl), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 7, 512—513 (англ.)

При изучении регулярных функций $f(z)$ в бесконечности автор предлагает вместо подстановки $z = 1/\zeta$ рассматривать предел (если он существует)

$$Ef(\infty) = \lim \frac{f(z'_n) - f(z_n)}{z_n' - z_n},$$

где $z_n, z'_n \to \infty$ и $\lim (z'_n - z_n) = 0$.

На некоторых примерах автор показывает целесообразность этого метода.

Примечание референта. Автор переоценивает свой прием; так, в своей формулировке интегральной теоремы Коши он фактически накладывает лишние ограничения на функцию. Ю. Ю. Трохимчук

7645. Об одном классе аналитических функций. Ульянов П. Л., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 229—234

Продолжение исследования о возможности представления функций, аналитических в единичном круге, через их угловые граничные значения (вообще, не интегрируемые L) с помощью A-интеграла (РЖМат, 1957, 6993).

Определение. Последовательность действительных чисел называют последовательностью класса B: $\{a_k\} \in B$, если $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty$ ($\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$).

Теорема 1. Если $\{a_k\} \in B$ и $f(r,\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_k r^k \cos k\varphi$ $(0 \leqslant r < 1)$, то $f(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x - \varphi)} dx$.

Теорема 2. Если $\{a_k\} \in B$, $\{b_k\} \in B$ и $F(z) = \sum_0^{\infty} (a_n + ib_n) z^n$, то

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_{|\xi|=1} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi \ (|z| < 1), \quad \text{где } F(\xi) = \sum_0^{\infty} (a_n + ib_n) \xi^n.$$

Теорема 3. Пусть $F(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в единичном круге с ограниченным изменением на $|z| = 1$; тогда

$$(A) \int_{|\xi|=1} F(\xi) \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

7646. К вопросу о представлении некоторых классов аналитических функций. Фишман К. М., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 3, 466—469

Пусть H и $\overline{H}$ — два сепарабельных гильбертова пространства с воспроизводящими ядрами, состоящие из функций $f(z)$, $z \in G$ и $\varphi(\xi)$, $\xi \in \overline{G}$; G и $\overline{G}$ — некоторые множества.

Рассматривается ядро

$$K(z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) \overline{q_n(\xi)}, \ (z \in G, \xi \in \overline{H}) \qquad (1)$$

где $\{p_n(z)\}$ и $\{q_n(\xi)\}$ — ортонормированные базисы в H и $\overline{H}$; $K(z,\zeta) \in H$ ($\xi \in \overline{G}$) и $\overline{K(z,\xi)} \in \overline{H}$ ($z \in G$).

Теорема 1. Соотношениями

$$f(z) = [\varphi(\xi), \overline{K(z,\xi)}], \ \varphi(z) = (f(z), K(z,\zeta)) \qquad (2)$$

ядро $K(z,\xi)$ определяет изометрический оператор, отображающий H на $\overline{H}$; при этом $f(z)$ и $\varphi(\xi)$ соответствуют друг другу в этой изометрии. Обратно, каждому изометрическому оператору, отображающему H на $\overline{H}$, соответствует ядро вида (1), посредством которог действие оператора и его обратного записывается по формулам (2).

([,] и (,) означает скалярное произведение в H и $\overline{H}$ соответственно).

В случае, когда H вложено в более широкое гильбертово пространство $\widetilde{H}$, которое может не обладать воспроизводящим ядром, справедлива являющаяся обобщением теоремы Ароншайна (Aronszayn N., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, №3):

Теорема 2. Любой элемент $f(z) \in H$ представим в виде:

$f(z) = [\widetilde{\varphi}, \overline{K(z,\xi)}]$, $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}$, причем среди всех $\widetilde{\varphi}$ представляющих $f(z) \in H$, наименьшую норму в $\widetilde{H}$ имеет $\varphi(\xi) = (f(z), K(z,\xi))$.

Эти теоремы могут быть использованы для различных представлений классов аналитических функций, образующих гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами. В частности, рассматривая в качестве H класс целых функций $M(2\sigma, \alpha)$ Джрбашяна (Сообщ. Ин-та матем. и механ. АН АрмССР, 1948, вып. 2),

H — класс H_2 Рисса, $\widetilde{H}$ — класс функций $\widetilde{\varphi}(e^{i\theta})$, для которых

$$\int_0^{2\pi} |\widetilde{\varphi}(e^{i\theta})^2| d\theta < \infty, \qquad (3)$$

автор получает следующее интегральное представление целых функций $f(z)$ класса роста меньше $[\alpha, \sigma]$:

$$f(z)=\sqrt{2\sigma\alpha}\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\widetilde{\varphi}(e^{i\theta})\left\{\sum_0^{\infty}(2\sigma)^{n/\alpha}\left[\Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right)\right]^{-1/2}(ze^{-i\theta})^n\right\}d\theta$$

и указывает ту из функций $\widetilde{\varphi}(\zeta)$, представляющих $f(z)$, которая минимизирует интеграл (3).

Отправляясь от функции $E(z)=\sum_0^{\infty}a_n^{-1}z^n$ $(0<a_n<\infty)$, аналитической при $|z|<R^2$, автор рассматривает класс U_E^2 всех гармонических в круге $|z|<R$ функций $u(z)$, для которых аналитические функции $f_u(z)$ $(\operatorname{Re} f_u(z)=u(z))$, принадлежат Z_E^2 (РЖМат, 1957, 6284).

Введением в U_E^2 нормы: $\|u\|_{U_E^2}=\inf_{f_u}\|f_u(z)\|_{Z_E^2}$ и согласованного с ней скалярного произведения

$$(u,\widetilde{u})=a_0\widetilde{a}_0\alpha_0+\sum_1^{\infty}(a_n\widetilde{a}_n+b_n\widetilde{b}_n)\alpha_n.$$

$$\left(u(z)=a_0+\sum_1^{\infty}r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right),\widetilde{u}(z)=\right.$$
$$\left.=\widetilde{a}_0+\sum_1^{\infty}r^n(\widetilde{a}_n\cos n\theta+\widetilde{b}_n\sin n\theta)\right)$$

U_E^2 превращается в гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $F(z\bar{\xi})$, где $F(z)=\operatorname{Re}E(z)$.

Получено являющееся аналогом формулы Шварца представление функций $f(z)=u(z)+iv(z)\in Z_E^2$ через ее вещественную часть $u(z)\in U_E^2$: $f(z)=i\operatorname{Im}f(0)+(u(\xi),E(\bar{\xi}z))_{U_E^2}$, где $(u,\widetilde{u}+i\widetilde{v})_{U_E^2}=(u,\widetilde{u})_{U_E^2}+i(u,\widetilde{v})_{U_E^2}$.

Я. И. Поляков

7647. О коэффициентах типично-вещественных рядов Лорана. Комацу (On the coefficients of typically-real Laurent series. Komatu Yusaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 1, 42—48 (англ.)

Рассматриваются функции вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

регулярные и типично-вещественные в кольце $\rho<|z|<1$, т. е. вещественные на отрезках действительной оси, принадлежащих этому кольцу и удовлетворяющие условию $\operatorname{Im}(f(z))\operatorname{Im}(z)>0$ в остальных точках кольца.

Устанавливаются следующие точные оценки

$$-\frac{n}{1-\rho^{2n}}\left[\frac{k_n}{n}(a_1-a_{-1})+(a_1-a_{-1}\rho^{-2})\rho^{n+1}\right]\leqslant a_n\leqslant$$
$$\leqslant\frac{n}{1-\rho^{2n}}\left[a_1-a_{-1}+\frac{k_n}{n}(a_1-a_{-1}\rho^{-2})\rho^{n+1}\right](n=\pm1,\pm2,\ldots)$$

где $k_{\pm1}=\pm1$, $k_n=-\min_{0<\varphi<\pi}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$, $k_{-n}=k_n$ $(n=2,3,\ldots)$.

Приводятся экстремальные функции. С. А. Гельфер

7648. Некоторые теоремы о типично-вещественных функциях. Чэнь Хань-линь (Some theorems on typical real functions. Chen Han-lin), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 3, 452—461 (кит.)

Пусть T_r обозначает класс функций $f(z)$, имеющих разложение вида

$$w=f(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots,$$

регулярных и типично-вещественных в круге $|z|<1$; положим

$$S_n(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n.$$

Получены, среди других, следующие результаты:

1. Если $f(z)\in T_r$, то $S_2(z)$ и $S_3(z)$ отображают круг $|z|<\frac{1}{4}$ на область, звездную относительно точки $w=0$.
2. $S_2(z)\neq0$ при $0<|z|<1/4$ и $S_n(z)\neq0$ при $0<|z|<1/3$ для $n>2$.
3. Даны оценки сверху и снизу величины

$$\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2},$$

где $f(z)\in T_r$.

4. Если функция $F_p(z)=-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{np-1}^{(p)}z^{np-1}$ типично-вещественна в круге $|z|<1$, выпускает в нем нуль и регулярна в $0<|z|<1$, то имеют место точные оценки $-\frac{2}{p}\leqslant c_{p-1}^{(p)}\leqslant\frac{2}{p}$; $c_{2p-1}^{(p)}\geqslant-\frac{1}{p}$.

С. А. Гельфер

7649. К вопросу о суммировании функций классов $B^{(r)}$. Покало А. К., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 5, 750—753

Пусть $B^{(r)}$ обозначает класс функций $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$, аналитических в единичном круге $|z|<1$ и таких, что $|f^{(r)}(z)|\leqslant1$, ($r\geqslant1$ — целое число). Рассматривается последовательность преобразованных с помощью некоторой системы чисел $\mu_n(k)$ $(n=0,1,2,3,\ldots;\ k=0,1,\ldots,n)$, частных сумм ряда Тейлора

$$A_n(z;\ f;\ \mu)=\sum_{k=0}^{n}\mu_n(k)c_kz^k$$

и устанавливается следующая теорема: Если

$$\mu_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{p}\beta_j k\ldots(k+1-j)+\rho_p(n,\ k),$$

$$\beta_j=\frac{1}{j!}\Delta_1^j\mu_n(0),$$

и $f(z)\in B^{(r)}$, то

$$A_n(z;\ f;\ \mu)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jz^jf^{(j)}(z)+B_nz^rp_{n-r}(z;\ f^{(r)})+D_n$$

$$(n=r-1,\ r,\ r+1,\ \ldots),$$

равномерно относительно всех z, для которых $|z|<1$ и всех функций $f(z)\in B^{(r)}$, где

$$B_n=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\beta_j}{(n-r+2)\ldots(n+1-j)}+\beta_r+$$

$$+\sum_{j=r+1}^{p}\beta_j(n+1)\dots(n+j-r),$$

$$D_n=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j\frac{2(r-j)+1}{(n-r+3)\dots(n+2-j)}\theta_n(j)+$$

$$+\sum_{j=r+1}^{p}\left\{(2^{j-r}-1)\theta_n(j-r)+\right.$$

$$\left.+O\left[\frac{\ln(n-r+2)}{n+2}\right]\right\}\beta_j(n+1)\dots(n+j-r)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}c_kz^k\rho_p(n,k),$$

$$(|\theta_n(j)|\leqslant 1;\ 0\leqslant j\leqslant p,\ n\geqslant r-1,\ r=1,2,3,\dots).$$

Частный случай $\mu_n(k)\equiv 1$ и $\mu_n(k)=\frac{n-k+1}{n+1}$ рассматривал С. Б. Стечкин (РЖМат, 1954, 3292). Отметим еще книгу Э. Ландау (Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1929), где рассматривается случай $\mu_n(k)\equiv 1$, $r=0$. Изучаются также системы множителей $\mu_n(k)$, рассматривавшиеся ранее референтом для рядов Фурье РЖМат, 1953, 656). А. Ф. Тиман

7650. Суммирование рядов функций классов $B^{(r)}$. Покало А. К., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 7, 35—49

Статья содержит подробное изложение результатов заметки автора (реф. 7649). А. Ф. Тиман

7651. Асимптотическое поведение целых функций конечного порядка. Данжуа (L'allure asymptotique des fonctions entières d'ordre fini. Denjoy Arnaud). Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1957, **2**, № 2, 15—18 (франц.; рез. болг., русск.)

Содержание заметки, опубликованной автором ранее (РЖМат, 1956, 7991).

7652. Рост производных целых функций. Боас (Growth of derivatives of entire functions. Boas R. P., Jr), Math. Z., 1957, **68**, № 3, 296—298 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть функция $\mu(x)$ определена для $x>0$, $\mu(x)>2\pi$, бесконечно возрастает и непрерывно дифференцируема, при этом $\mu'(x)\downarrow 0$ и $\mu'(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$. Существует целая функция $f(z)$ такая, что $\ln|f(z)|=O(|z|\mu(|z|))$ $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, а $f'(x)$ при $x\to+\infty$ не ограничена. Как известно, для целых функций экспоненциального типа из $f(x)\to 0$, $x\to+\infty$ следует, что $f'(x)\to 0$, $x\to+\infty$. М. М. Джрбашян

7653. О распределении точек, где некоторые мероморфные функции принимают значение a. Кюнци, Виттих (Sur la répartition des points où certaines fonctions méromorphes prennent une valeur a. Künzi Hans, Wittich Hans), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 23, 1991—1994 (франц.)

Для изучения распределения значений мероморфной функции $w=f(z)$, отображающей $|z|<\infty$ на риманову поверхность F, часто применяется следующий прием. F отображают на $|\zeta|<\infty$ квазиконформно, тем самым устанавливается квазиконформное отображение $|\zeta|<\infty$ на $|z|<\infty$. Если характеристики $p(\zeta)$ этого отображения таковы, что

$$\iint(p(\zeta)-1)\,|\zeta|^{-2}d\xi d\eta<\infty;\ \zeta=\xi+i\eta, \qquad (1)$$

то по теореме Тейхмюллера (Teichmüller O., Dtsche Math., 1938, **3**, 621—678) $\lim\limits_{\zeta\to\infty}|z|/|\zeta|=A$, $0<A<\infty$, что позволяет утверждать, что распределение модулей a-точек на ζ-плоскости дает асимптотику модулей a-точек на z-плоскости. П. П. Белинский (РЖМат, 1954, 2110) показал, что при (1) имеет место $\lim\limits_{\zeta\to\infty}z/\zeta=Ae^{i\alpha}$, так что распределение a-точек на $|\zeta|<\infty$ дает асимптотику a-точек на $|z|<\infty$ не только по модулям, но и по аргументам. Авторы отмечают это обстоятельство и иллюстрируют возможности, которые открывает применение теоремы П. П. Белинского, на примере поверхностей с конечным числом периодических и двояко-периодических концов, квазиконформные отображения которых на $|\zeta|<\infty$ (с условием (1)) хорошо известны (Künzi H., РЖМат, 1957, 3057). А. А. Гольдберг

7654. Обобщенная производная Шварца и выпуклые функции. Гейбриэл (A generalized Schwarzian derivative and convex functions. Gabriel R. F.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 617—626 (англ.)

Пусть C — замкнутая кривая с непрерывно вращающейся касательной, ψ — угол, образованный касательной к C в точке P с действительной осью.

Если ψ не убывает (не возрастает) и касательная делает p, $p>0$, полных оборотов, когда точка P пробегает один раз C, то кривая C называется выпуклой порядка p (порядка $-p$).

Выражение

$$\left\{f(z),\,z\right\}_n\equiv\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{n+1}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

автор называет обобщенной производной Шварца функции $f(z)=z^{-n}+\dots$

Основной результат: Пусть $f(z)=z^{-n}+\dots$ является аналитической и однозначной функцией в $0<|z|<1$, $f'(z)\neq 0$ в $0<|z|<1$ и пусть выполняется неравенство

$$\left|\{f(z),z\}_n\right|\leqslant\frac{(n+1)c_n}{|z|}\ \text{для}\ 0<|z|\leqslant 1,$$

где $c_n=x_n^2/4$, а x_n означает наименьший положительный корень уравнения $(n+1)xI'_1(x)+(n-1)I_1(x)=0$ ($I_1(x)$ — функция Бесселя).

Тогда $f(z)$ отображает $|z|=r<1$ на выпуклую кривую порядка $-n$. Если, далее, существует такое значение w_0, что $f(z)\neq w_0$ в $0<|z|<1$, то $f(z)$ n-листна и звездообразна по отношению к w_0 в $0<|z|<1$. Для каждого n постоянная c_n является наилучшей. С. А. Гельфер

7655. Некоторые оценки кернфункции Сегё. Одзава (Some estimations on the Szegö kernel function. Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 2, 71—78 (англ.)

Пусть B есть n-связная область, граница Γ которой состоит из n гладких кривых. Если для всякой аналитической в области B функции $f(z)$, угловые граничные значения которой образуют на Γ суммируемую с квадратом функцию, имеет место формула

$$f(z_0)=\int_\Gamma f(z)\,\overline{K(z,\bar{z}_0)}\,ds_z,\ z_0\in B,$$

то функция $K(z,\bar{z}_0)$, $z\in B$, $z_0\in B$, называется кернфункцией Сегё. Устанавливаются два неравенства:

1) Если S — длина контура Γ, то при $z_0 \in B$

$$K(z_0, \bar{z}_0) \cdot S \geqslant 1,$$

2)

$$K(z_0, \bar{z}_0) \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \frac{|dz|}{|z - z_0|}.$$

П. К. Суетин

7656. Об уточнении Ландау теоремы Шоттки. Кёниг (Über die Landausche Verschärfung des Schottkyschen Satzes. König Heinz), Arch. Math., 1957, 8, № 2, 112—114 (нем.)

Дается элементарное (т. е. не использующее модулярных функций) доказательство следующей теоремы Ландау: Существует функция $L(\rho, \vartheta) > 0$ ($\rho > 0$, $0 < \vartheta < 1$) такая, что для всякой голоморфной в $|z| < 1$ функции $f(z)$, $|f(0)| \leqslant \rho$, не принимающей значения 0 и 1, в круге $|z| < \vartheta$ выполняется $|f(z)| \leqslant L(\rho, \vartheta)$. Доказательство опирается на ослабленную формулировку теоремы Блоха, для которой известно простое доказательство (Landau E., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys — Math. Kl., 1926, 467—474). По сравнению с известным элементарным доказательством теоремы Ландау (обобщенного неравенства Шоттки) (Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, М. — Л., 1948) приведенное доказательство заметно проще. А. А. Гольдберг

7657. Функции Блоха третьего вида и константа Улучай (Bloch functions of the third kinr and the constant Ulu çay C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 923—925 (англ.)

Доказательство теоремы 1, утверждающей новое неравенство для константы Блоха—Ландау в некотором подклассе однолистных функций, ошибочно. Автор по существу пользуется в доказательстве лишь равенством нулю второго коэффициента регулярной и однолистной функции $f(z) = z + a_3 z^3 + \ldots$, $|z| < 1$, и приходит к утверждению, что ближайшая граничная точка соответствующей ей области удалена от начала координат не менее, чем на 0,629, а это опровергается примером функции $f'(z) = \frac{z}{1 - z^2}$. Ошибка состоит в утверждении регулярности и однолистности рассматриваемой автором функции $f(z, s, t)$. И. Е. Базилевич

7658. Об одной характеристичной прямой многоугольника нулей полинома. Палевич (О једној правој и једној карактеристичној дужи у полигонима нула полинома. Палевић Шефкија), Зб. радова. Српска АН, 1953, **35**, № 3, 89—94 (серб.; рез. франц.)

Исправление к работе «Об одной характеристичной прямой многоугольника нулей полинома». Палевич (Corrigenda уз рад «О једној правој и једној карактеристичној дужи у полигонима нула полинома». Палевић Шефкија), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, 144 (серб.)

Пусть $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, — полином степени n имеет p различных корней $z_1, \ldots, z_p$ кратности $m_1, \ldots, m_p$, $\sum m_\nu = n$. Центром тяжести нулей полинома $P_n(z)$ называется точка

$$\zeta_1 = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{\sum m_\nu} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n}.$$

Центром тяжести многоугольника нулей полинома $P_n(z)$ называется точка

$$\zeta_2 = \frac{1}{p} \sum z_\nu.$$

Через ζ_1^* обозначим центр тяжести нулей производной $P_n'(z)$, не совпадающих с нулями полинома $P_n(z)$. Автор доказывает, что три точки ζ_1, ζ_2 и ζ_1^* лежат на одной прямой.

Во второй заметке исправляется одна неточность, вкравшаяся в первую работу. Н. С. Мейман

7659. Об аналитических функциях на некоторых римановых поверхностях. Курода (On analytic functions on some Riemann surfaces. Kuroda Tadashi), Nagoya Math. J., 1956, **10**, June, 27—50 (англ.)

Обозначим O_{AB} и O_{AD} соответственно классы римановых поверхностей, на которых не существуют непостоянные однозначные аналитические функции, ограниченные или с ограниченным интегралом Дирихле. Если на римановой поверхности F задана область G с относительной границей C и существует ограниченная аналитическая в G функция $f(p) \not\equiv \text{const}$, непрерывная в $G \cup C$, такая, что $\operatorname{Re} f(p) = 0$ при $p \in C$, то $G \in SO_{AB}$. Если вместо аналитических функций рассматриваются гармонические функции, то A заменяется на H. Если все подобласти F принадлежат S_{AB}, то $F \in O^0{}_{AB}$. Пусть на F задана аналитическая функция $w = f(p)$, отображающая F на поверхность Φ над w-плоскостью. Основные результаты статьи связаны с вопросом, при каких условиях Φ обладает свойством Иверсена (Неванлинна Р. — Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, 239). Доказано, что если $F \in O^0{}_{AB}$, то Φ обладает свойством Иверсена. В связи с этим возникает задача установить соотношения между $O^0{}_{AB}$ и другими классами. Показано, что для римановых поверхностей бесконечного рода

$$O_{HB} \subset O^0{}_{AB} \subset O_{AB}, \quad O^0{}_{AB} \not\subset O_{HD}, \quad O_{HD} \not\subset O^0{}_{AB},$$

для поверхностей конечного рода $O_{HB} \subseteq O^0{}_{AB} \subset O_{AB}$. $O^0{}_{AB} \not\subset O_{HD}$. Приведены критерии принадлежности F к классам O_{AB} и $O^0{}_{AB}$.

Кроме этих результатов, доказаны теоремы весьма разнообразного содержания. Отметим лишь следующий результат. Обозначим N_B класс замкнутых множеств в комплексной плоскости, в дополнении к которым не существуют непостоянные аналитические ограниченные функции. Пусть $f(p)$ задана на F и G — прообраз связной окрестности на Φ, лежащей над $c_\rho : |w - w_0| < \rho$. Обозначим E множество тех точек из c_ρ, которые $f(p)$ не принимает в G. Тогда, если $G \in SO_{AB}$, то пересечение E с любым замкнутым множеством в c_ρ принадлежит N_B. Библ. 26 назв. А. А. Гольдберг

7660. Продолжаемая риманова поверхность. Тамура (A prolongable Riemann surface. Tamura Jirô), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1956, **6**, № 2, 123—127 (англ.)

Если риманова поверхность F конформно эквивалентна правильной части F' другой римановой поверхности G, $F' \subset G$, то F — продолжаема, в противном случае F называется непродолжаемой. Строится пример области S' с вертикальными разрезами конформно эквивалентной области S, имеющей в качестве границы компактное всюду разрывное линейное множество. Универсальная поверхность наложения R области S конформно эквивалентна поверхности наложения R' для S' и, следовательно, продолжаема, так как R' продолжаема через разрезы.

Доказывается, что у R: 1) нет плоского граничного элемента, т. е. из R невозможно проведением замкнутой жордановой кривой выделить многосвязную подобласть $R_1 \subset R$, подобную однолистной, 2) соответствующая фуксова группа — первого рода. Тем самым показано, что гипотеза Посселя (Possel de R., C. r. Acad. sci., 1927, 186, 1092—1095; 1928, 187, 98—100):

Для того чтобы F была продолжена, необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий: 1) F имеет плоский граничный элемент, 2) фуксова группа, ассоциированная с F, — второго рода, сформулирована неточно, а доказательство ее, данное Хейнсом (Heins M., Ann. Math, 1942, **43**, 280—297), ошибочно.

Д. Б. Потягайло

7661. Распространение теоремы П. Фату. Айзенберг Л., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 11—17

Конечная выпуклая область G пространства двух комплексных переменных w, z называется обыкновенной, если: 1) она ограничена дважды непрерывно дифференцируемой гиперповерхностью $F(w, z, \bar{w}, \bar{z}) = 0$, причем почти во всех точках этой поверхности первые производные от F не обращаются одновременно в нуль; 2) существует k_0 такое, что почти для всех точек границы G (в смысле трехмерной меры) плоскость $w = k_0 z + b$ не является касательной ни при каком b (примеры: гиершар, гиперконус, бицилиндр и т. п.).

Основная теорема: Функция $f(w,z)$, аналитическая и ограниченная внутри некоторой обыкновенной области G, имеет почти во всех точках границы G (в смысле трехмерной меры) угловые граничные значения.

А. И. Маркушевич

7662. Об одном типе базисов в пространстве аналитических функций двух переменных. Еремин С. А., Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 2, 134—140 (рез. франц.)

В пространстве E_R функций, аналитических в круге $|z| < R$, систему $\{f_n(z)\}$ А. И. Маркушевич (Матем. сб., 1945, 17, 211—252) назвал усиленно линейно независимой (у. л. н.), если из равномерной сходимости к нулю внутри $|z| < R$ агрегата $\alpha_{0,\nu} f_0(z) + \ldots + \alpha_{n_\nu,\nu} f_{n_\nu}(z)$ следует, что $\alpha_{k,\nu} \to 0$ при $\nu \to \infty$, $k = 0,1 \ldots$; систему $\{f_n(z)\}$ назвал базисом в широком смысле, если каждой $f(z) \in E_R$ можно единственным образом поставить в соответствие ряд $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n(z)$, либо равномерно сходящийся к $f(s)$, либо вовсе не имеющий никакой равномерно сходящейся последовательности частичных сумм.

Автор в пространстве E_R функций $f(w,z)$, аналитических в бицилиндре $|w| < R$, $|z| < R$, рассматривает систему $\{\varphi_m(w) \cdot \psi_n(z)\}$, $m, n = 0,1 \ldots$, где $\varphi_m(w) \in E_R$, $\psi_n(z) \in E_R$. Доказывает, что эта система в E_R 1) полна, 2) у. л. н., 3) образует базис в широком смысле, 4) образует базис тогда и только тогда, когда соответственно этими свойствами обладают каждая из систем

$$\{\varphi_m(w)\},\ \{\psi_n(z)\} \text{ в } E_R.$$

Как доказал А. И. Маркушевич, чтобы в пространстве E_R система $P_0(w) \equiv 1$, $P_m(w) = (w - b_1) \ldots (w - b_m)$, $m = 1, 2 \ldots$ была у. л. н., необходимо и достаточно выполнения условия $|b_k| < R$, $k = 1, 2 \ldots$; чтобы она образовала базис в широком смысле — кроме предыдущего условия, точки $\{b_k\}$ должны иметь хотя бы одну предельную точку внутри круга $|w| < R$; если $|b_n| \leqslant r < R$, то система будет базисом в том и только в том случае, если $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\widetilde{P}_n(w)} = w$ равномерно на всяком ограниченном замкнутом множестве, лежащем вне круга $|w| \leqslant R$. Эти теоремы, используя приведенные выше результаты, автор переносит на системы $\{P_m(w)\ \widetilde{P}_n(z)\}$, $\widetilde{P}_0(z) \equiv 1$, $\widetilde{P}_n(z) = (z - c_1) \ldots (z - c_n)$ в пространстве E_R аналитических функций двух переменных.

М. Г. Хапланов

7663. Лемма Шварца в теории функций многих комплексных переменных. Лу Ци-цзянь (Schwarz lemma in the theory of functions of several complex variables. Look K. H.), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 3, 370—420 (кит.; рез. англ.)

Работа содержит доказательства теорем, анонсированных автором (РЖМат, 1958, 3684). Сверх того, доказываются следующие предложения:

1) Пусть G, D — ограниченные однолистные области, причем область D однородна. Тогда существует такая величина k, зависящая только от области D, что для всякого голоморфного отображения $w = f(z)$ области G внутрь области D будет $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} T_D(w,\bar{w}) \frac{\partial \bar{w}'}{\partial \bar{z}} \leqslant k^2 T_G(z,\bar{z})$. Здесь T_D, T_G — (n, n)-матрицы, соответственно состоящие из производных $\frac{\partial^2 \ln K_D}{\partial w_i \partial \bar{w}_e}$, $\frac{\partial^2 \ln K_G}{\partial z_i \partial \bar{z}_e}$, где K_D, K_G — кернфункции областей D, G. Матричное неравенство $A \leqslant B$ понимается в том смысле, что матрица $A - B$ является определенно неотрицательной.

2) Пусть через любые две точки ограниченной, однородной однолистной области D проходит всегда одна и только одна геодезическая линия метрики Бергмана. Тогда, если при голоморфном внутреннем отображении области D точки z_1, $z_2 \in D$ переходят в точки w_1, w_2, то $\varkappa(w_1, w_2) \leqslant k_0(D) \varkappa(z_1, z_2)$. Здесь $\varkappa$ — геодезическое расстояние в метрике Бергмана, $k_0(D)$ — так называемая „постоянная Шварца".

3) Если область $R = R^1 \times R^2 \times \ldots R^{(l)}$, где $R^{(s)}$ — так называемые классические области (определение см. в статье Хуа Ло-гэна, Ann, Math., 1946, **47**, 167—191), то постоянные Шварца этих областей связаны соотношением $k_0^2(R) = \sum_{s=1}^{l} k_0^2(R^{(s)})$.

Б. Фукс

7664. Связь между ростом целой функции многих переменных и распределением особенностей ассоциированной с ней функции. Иванов В. К., Матем. сб., 1957, **43**, № 3, 367—387

Рассматривается класс целых функций $F(z_1, \ldots, z_n)$ комплексных переменных, удовлетворяющих неравенству $|F(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant A e^{\sigma_1 |z_1| + \ldots + \sigma_n |z_n|}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и $A = A(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — положительные постоянные (функции конечной степени).

Строится функция $f(z_1, \ldots, z_n)$, ассоциированная с $F(z_1, \ldots, z_n)$ по Борелю, и доказывается соотношение, связывающее рост функции $F(z_1, \ldots, z_n)$ с распределением особенностей функции $f(z_1, \ldots z_n)$

Доказанное автором соотношение представляет собой естественное обобщение известной теоремы Пойа (Pólya G., Math. Z., 1929, **29**, 549—600).

Примечание референта. В статье референта (РЖМат, 1957, 380) были рассмотрены целые функции многих переменных, имеющие произвольные порядки и типы роста по отдельным переменным. Полученные там интегральные представления, в частном случае, содержат формулы (7.5) и (10.3) реферируемой работы.

М. М. Джрбашян

7665. Функции на круговых множествах в пространстве n комплексных переменных. Леу (Functions on circular subsets of the space if n complex. variables. Leeuw K. de), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 415—431 (англ.)

Множество X пространства C^n n комплексных переменных называется круговым, если из того, что $(x_1, \ldots x_n) \in X$, $|y_i| = |x_i|$, $i = 1, \ldots, n$, следует, что $(y_1, \ldots, y_n) \in X$. На круговых компактных множествах X автор изучает банахову алгебру $A(x)$ комплекснозначных функций, которые равномерно приближаются на X полиномами. Устанавливается характеристика $A(X)$ в терминах коэффициентов Фурье, которая для случая одного комплексного переменного и $X = \{w : |w| = 1\}$

сводится к известному факту, что $A(X)$ состоит из всех непрерывных функций, имеющих ряд Фурье в форме: $\sum_0^\infty a_n e^{in\theta}$.

Для множеств X, которые вместе с каждой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ содержат любую $(y_1, \ldots, y_n)$, для которой $|y_i| \leqslant |x_i|$, $i = 1, \ldots, n$ (X — полное круговое множество), дается характеристика в терминах аналитичности, которая сводится для случая одного комплексного переменного и $X = \{w : |w| \leqslant 1\}$ к известному факту, что $A(X)$ состоит из всех функций, непрерывных на X и аналитичных к каждой внутренней точке.

Изучается $b(X)$ — кольцевая граница $A(X)$, т.е. наименьшее замкнутое подмножество X, на котором каждая функция $A(X)$ принимает максимум модуля. Пусть $C_p(X) = \{y : |f(y)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)|$, для всех полиномов $f\}$. Функции из $A(X)$ естественно продолжаются на $C_p(X)$. Назовем точку $x \in Y$ (где Y — круговое множество) мультипликативной экстремальной точкой, если из равенства: $(x_1^2, \ldots, x_n^2) = (u_1 v_1 \ldots, u_n v_n)$, где $u, v \in Y$ следует, что $|u_i| = |v_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$. Показывается, что $b(X)$ совпадает с замыканием множества мультипликативных экстремальных точек $C_p(X)$.

Устанавливается формула типа Коши, где интеграция ведется по мультипликативным экстремальным точкам $C_p(X)$. Эта формула для случая X полицилиндра: $X = \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i| \leqslant 1\}$ сводится к классической.

Л. А. Маркушевич

7666. Потенциально-гармонические функции и некоторые их приложения. Козманова А. А., Докл. АНЗ СССР, 1957, 116, № 2, 171—174

Переносятся на случай n переменных результаты, известные для $n = 3$. n-мерная векторная функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n f_k i_k$ называется потенциально-гармонической, если:
1) $\operatorname{div} f = 0$; 2) $df_j/dx_k = df_k/dx_j$; $j, k = 1, 2, \ldots n$ (n-мерное обобщение условий Даламбера-Эйлера).

Дается n-мерный аналог интегральной формулы Коши и указывается, что с помощью рассматриваемых функций на n измерений могут быть перенесены основные результаты, полученные для $n = 3$. А. В. Бицадзе (РЖМат, 1955, 238 и 239).

Далее устанавливается n-мерный аналог теоремы Пойа о связи между ростом целой функции и распределением особенностей ассоциированной с нею функции (случай $n = 3$ рассматривался в работах референта и автора ранее: см. РЖМат, 1957, 2242, 6376 и 6377; 1958, 1164). Для этого используется понятие изотропного вектора: n-мерный комплексный вектор $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + i\mathbf{p}''$ называется изотропным, если $\mathbf{p}^2 = 0$.

Условие изотропности равносильно двум следующим: 1) $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}''|$, 2) $\mathbf{p}' \perp \mathbf{p}''$. Изотропный вектор может быть задан при помощи $2n - 2$ параметров: длины $\rho = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}''|$; $n-1$ сферических углов $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$, определяющих направление вектора $\mathbf{p}'$ и $n-2$ сферических углов $\psi_1, \ldots \psi_{n-2}$, определяющих в подпространстве, ортогональном к $\mathbf{p}'$, направление вектора $\mathbf{p}''$.

Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$ — гармоническая функция, регулярная вне поверхности σ, содержащей начало координат. При помощи формулы

$$\mathbf{p}F(\mathbf{p}) = \frac{1}{\omega_n} \int_\sigma \left[\operatorname{grad} u, \boldsymbol{n}, \mathbf{p}e^{(\mathbf{pr})}\right] d\sigma \qquad (1)$$

с нею ассоциируется функция $F(\mathbf{p})$ от изотропного вектора $\mathbf{p}$. Здесь: ω_n — поверхность n-мерной сферы, n — единичный вектор внешней нормали к σ, подынтегральное выражение есть тройное произведение векторов, которое определяется формулой

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -(\mathbf{bc})\mathbf{a} + (\mathbf{ca})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \qquad (2)$$

Функция

$$h(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}; \psi_1 \ldots \psi_{n-2}) = \overline{\lim_{\rho \to \infty}} \frac{\ln |F(\mathbf{p})|}{\rho} \qquad (3)$$

называется индикатрисой роста функции $F(\mathbf{p})$. Доказывается, что

$$\sup h(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}; \psi_1, \ldots \psi_{n-2}) = K(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \qquad (4)$$

где $K(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})$ — опорная функция выпуклой оболочки множества особенностей функции $u(x_1, \ldots x_n)$.

В процессе доказательства получено обращение формулы (1), дающее выражение $u(x_1, \ldots x_n)$ через $F(\mathbf{p})$.

В качестве приложений соотношения (4) приводится n-мерное обобщение результата Штейнера о гармоническом продолжении (РЖМат, 1956, 436) и дается аналог интегрального метода суммирования Бореля разложения по шаровым функциям функции гармонической в окрестности начала координат. Область суммируемости такого ряда (n-мерный «многогранник» Бореля) строится таким же образом, как и «многоугольник» Бореля, при суммировании степенных рядов.

В. К. Иванов

7667. Одна общая круговая теорема. Пауэр, Джексон (A general circle theorem. Power G., Jackson H. L. W.), Appl. Scient. Res., 1957, **6**, № 6, 456—460 (англ.)

Рассмотрена следующая задача. В комплексной плоскости z заданы комплексные потенциалы $f_0(z)$ и $f_1(z)$ — возбуждаемые массами, расположенными соответственно вне и внутри окружности $|z| = a$. Ищутся возмущенные потенциалы, внешний $w_e(z)$ и внутренний $w_i(z)$, определяемые следующими условиями:

$$\Delta \operatorname{Re}[w_e(z) - f_0(z)] = 0 \quad \text{при } |z| \geqslant a;$$

$$\Delta \operatorname{Re}[w_i(z) - f_1(z)] = 0 \quad \text{при } |z| \leqslant a;$$

$$\operatorname{Re}(w_e) = \operatorname{Re}(w_i);$$

$$\operatorname{Re}\left(\lambda_1 a \frac{dw_e}{dz}\right) + \operatorname{Re}(\lambda_3 w_e) = \operatorname{Re}\left(\lambda_2 a \frac{dw_i}{dz}\right) + \operatorname{Re}(\lambda_4 w_i) \Big\} \text{ при } |z| = a.$$

Здесь λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 — заданные постоянные.
Решение дается формулами

$$w_e(z) = f_0(z) + A\overline{f_0}(a^2/z) + \int_0^1 F(t)\,\overline{f_0}(ta^2/z)\,dt + B f_1(z) + \int_1^\infty G(t) f_1(tz)\,dt \Big\} |z| \geqslant a;$$

$$w_i(z) = f_1(z) + C\overline{f_1}(a^2/z) + \int_1^\infty H(t)\,\overline{f_1}(ta^2/z)\,dt + D f_0(z) + \int_0^1 K(t) f_0(tz)\,dt \Big\} |z| \leqslant a.$$

где $C = -A = 1 - 2\alpha$, $B = 2(1-\alpha)$, $D = 2\alpha$;

$$F(t) = K(t) = 2\alpha\beta t^{-(1+\beta)};\ G(t) = H(t) = 2(1-\alpha)\beta t^{-(1+\beta)}$$

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2};\ \beta = \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

При специальном выборе постоянных λ_j отсюда получается ряд известных результатов (возмущение электрического поля цилиндрическим диэлектриком, обтекание круглого цилиндра стационарная задача теплопроводности для круга плоскости с круговым отверстием). В. К. Иванов

7668. Новый критерий для квазиконформных отображений. Дженкинс (A new criterion for quasiconformal mapping. Jenkins James A.). Ann. Math., 1957, 65, № 2, 208—214 (англ.)

Автор исходит из определения квазиконформного отображения, как гомеоморфного отображения области, для которого коэффициент искажения модуля любого топологического четырехугольника ограничен.

Доказывается следующая теорема: Пусть $w = f(z)$ — гомеоморфное отображение области D плоскости z на область Δ плоскости w, сохраняющее ориентацию. Пусть $w_0 = f(z_0)$ и пусть

$$m(r, z_0) = \min_{|z - z_0| = r} |f(z) - w_0|,$$

$$M(r, z_0) = \max_{|z - z_0| = r} |f(z) - w_0|.$$

Далее, пусть

$$m(z_0) = \underline{\lim}_{r \to 0} \frac{m(r, z_0)}{r},$$

$$M(z_0) = \overline{\lim}_{r \to 0} \frac{M(r, z_0)}{r}.$$

Тогда, если для каждого $z \in D$, $m(z)$ и $M(z)$ конечны и положительны и если существует константа $K \geqslant 1$ такая, что $\frac{M(z)}{m(z)} \leqslant K$, тогда отображение f квазиконформно.

Примечание референта. Теорема не существенно новая и является следствием хорошо известных дифференциальных свойств функций двух переменных; вывод теоремы имеет место при значительно более общих предположениях; достаточно, например, предполагать, что $\overline{\lim}_{r \to 0} \frac{M(r, z_0)}{m(r, z_0)}$ всюду конечен и меньше K почти всюду (РЖМат, 1957, 1357).

Кроме этого, известно, что в условиях теоремы коэффициент искажения модуля любого четырехугольника не превышает K; у автора же получена оценка K^2. И. Н. Песин

7669 К. Теория римановых поверхностей. Пфлугер (Theorie der Riemannschen Flächen. Pfluger A. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1957, XII, 248, S. 39, 20 DM) (нем.)

Реферируемая книга близка к книге Р. Неванлинна «Униформизация» (РЖМат, 1956, 7313), однако отличается от нее рядом особенностей. Для нее характерно широкое использование метода Перрона, развернутое построение и использование теории гомологий и когомологий, построение теории приближения гармонических и аналитических функций на римановых поверхностях, а также рассмотрение современной теории классификации римановых поверхностей.

Книга состоит из семи глав. Гл. 1 посвящена понятию римановой поверхности. Довольно скоро вводятся гармонические, субгармонические и супергармонические функции, доказывается теорема Перрона и с ее помощью устанавливается метризуемость, а с ним и свойство счетности римановой поверхности. В этой же главе доказывается нормальная исчерпаемость и, с помощью одной теоремы существования гл. 4,— триангулируемость римановой поверхности. В гл. 2 рассматриваются обычные вопросы по аналитическому продолжению и по теории поверхностей наложения. В гл. 3 рассматривается интегрирование на римановых поверхностях (косые 2-формы, скалярное произведение, теорема Стокса, гармонические дифференциалы с конечной нормой, когомология и гомология, гомология и гомотопия). Глава 4 посвящена теоремам существования. Доказательства ведутся методом Перрона (для поверхностей с положительной границей) и методом Дирихле; проводится сопоставление обоих методов и конструктивное построение для них минимизирующих последовательностей. В гл. 5 рассматривается теория униформизации: теорема Римана, униформизация произвольных римановых поверхностей, отображение поверхностей подобных однолистным. В гл. 6 рассматриваются гармонические и аналитические дифференциалы: абелевы дифференциалы и интегралы на замкнутых римановых поверхностях (включая теоремы Римана—Роха и Абеля), гармонические дифференциалы с конечной нормой на открытых римановых поверхностях. Подробно рассматривается вопрос об аппроксимировании аналитических и гармонических функций на римановых поверхностях с приложениями, в частности, к построению функций с заданными особенностями. В гл. 7, и последней, рассматриваются вопросы современной классификации римановых поверхностей. Особенно подробно рассматриваются поверхности с нулевой границей.

Книга интересна для всех интересующихся геометрической теорией функций комплексного переменного.

Л. И. Волковыский

7670 К. Введение в теорию римановых поверхностей. Шпрингер (Introduction to Riemann surfaces. Springer G. Massachusetts, U. S. A., Addison—Wesley Publ. Co., 1957, 307 pp.) (англ.)

За последние годы появилось много книг по теории римановых поверхностей: Р. Неванлинна «Униформизация» (РЖМат, 1956, 7313), Вейль (H. Weyl), «Die Idee der Riemannschen Fläche» (РЖМат, 1957, 3071), М. Шиффер и Д. К. Спенсер «Функционалы на конечных римановых поверхностях» (РЖМат, 1957, 7848), Пфлугер (реф. 7669 К).

Книга Шпрингера также представляет собой современное изложение основных понятий и теорем классической теории римановых поверхностей, подготовляющее читателя к изучению новейших исследований в этой области. От читателя предполагается знакомство с университетским курсом теории функций комплексного переменного и элементами современной алгебры. Необходимые сведения по топологии и гильбертову пространству сообщаются в книге. Поверхности рассматриваются как триангулируемые двумерные многообразия. Изложение комбинаторной топологии ведется в духе книги Г. Зейферт и В. Трельфалль «Топология», 1938 (перевод с нем., изд. 1934 г.). Доказательство теорем существования на римановых поверхностях ведется по Вейлю (РЖМат, 1957, 3071). Предварительно излагается теория дифференциалов и интегралов на римановых поверхностях, в плане картановых построений. В связи с теоремами существования и теорией униформизации доказывается свойство счетности и триангулируемость римановых поверхностей. Отдельная, очень хорошо написанная глава посвящена замкнутым римановым поверхностям.

Автор приложил немало усилий, чтобы сделать изложение по возможности более доступным, и это ему в

значительной степени удалось. Книга может быть рекомендована для первого чтения по римановым поверхностям.

Книга состоит из десяти глав: Введение (алгебраические функции и их римановы поверхности; тут же потоки жидкости на плоскости и на поверхностях); Общая топология; Риманова поверхность аналитической функции; Накрывающие многообразия; Комбинаторная топология (поверхностей); Дифференциалы и интегралы (здесь же внешнее исчисление дифференциалов); Гильбертово пространство дифференциалов; Существование гармонических и аналитических дифференциалов; Униформизация; Компактные римановы поверхности (сюда включены и теорема Римана—Роха, теорема Абеля и проблема обращения Якоби). Библ. 52 назв.; указатель и небольшое число задач в конце каждой главы.

Л. И. Волковыский

7671 Д. Некоторые теоремы о сходимости для рядов типа Дирихле, коэффициенты которых являются целыми функциями ограниченного индекса. Мак-Доннел (Some convergence theorems for Dirichlet—type series whose coefficients are entre functions of bounded index. Diss. Mac Donnell John J. Washington, Catholic Univ. Amer. Press, s. a., 41 pp., 50 c.), Publishers'Weekly, 1957, **172**, № 26, 96 (англ.)

7672 Д. О достаточных признаках однолистности и применении их к обратным краевым задачам теории аналитических функций. Аксентьев Л. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1958

7673 Д. О наилучших приближениях гармоническими многочленами. Гольштейн Е. Г. Автореф. дис. канд. физ.матем. н., МГУ, М., 1958

См. также: 7604, 7628, 7736, 7852, 7863, 7876, 7877, 7878

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7674. Несуществование интегралов для канонических систем дифференциальных уравнений. Мозер (Non-existence of integrals for canonical systems of differential equations. Moser Jürgen), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 3, 409—436 (англ.)

Рассматривается каноническая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=H_y(x;\ y;\ t), \qquad \dot{y}=-H_x(x;\ y;\ t), \tag{1,1}$$

где $H(x;\ y;\ t+2\pi)=H(x;\ y;\ t)$.
Предполагается, что $x=y=0$ есть решение и что

$$H(x;\ y;\ t)=-\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)+\sum_{k+l\geqslant 3} H_{kl}(t)x^k y^l,\ k,\ l\geqslant 0, \tag{1,2}$$

причем степенной ряд сходится для достаточно малых значений $|x|+|y|$. Изучается вопрос о существовании дифференцируемых интегралов системы (1.1) вида

$$G(x;\ y;\ t)=x^2+y^2+F(x;\ y;\ t), \tag{1,3}$$

где $F(x;\ y;\ t+2\pi)=F(x;\ y;\ t)$, определенных в некоторой окрестности $|x|+|y|<\rho$ начала. Функция $F(x;\ y;\ t)$ предполагается имеющей непрерывные первые производные и удовлетворяющей условию

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}(xF_x+yF_y)=0. \tag{1,4}$$

где $r^2=x^2+y^2$.
Основной результат формулируется в виде теоремы:

Теорема 1. Пусть дана последовательность положительных чисел ε_2, ε_{kl} $(k,\ l\geqslant 0;\ k+l\geqslant 3)$. Тогда существует функция

$$\widetilde{H}(x;\ y;\ t)=-\frac{\widetilde{\alpha}}{2}(x^2+y^2)+\sum_{k+l\geqslant 3}\widetilde{H}_{kl}(t)x^k y^l,$$

обладающая теми же свойствами, что и $H(x;\ y;\ t)$, удовлетворящая условиям $|\alpha-\widetilde{\alpha}|<\varepsilon_2$, $|H_{kl}(t)-\widetilde{H}_{kl}(t)|<\varepsilon_{kl}$ и такая, что система

$$\dot{x}=\widetilde{H}_y, \qquad \dot{y}=-\widetilde{H}_x$$

не имеет интегралов $G(x;\ y;\ t)$ вида (1.3), (1.4). Число $\widetilde{\alpha}$ может быть выбрано иррациональным.

Теорема 1 вытекает из следующего более сильного утверждения:

Теорема 2. Пусть дана последовательность положительных чисел ε_2, ε_{kl} $(k,l\geqslant 0;\ k+l\geqslant 3)$. Тогда существует функция

$$\widetilde{H}(x;\ y;\ t)=-\frac{\widetilde{\alpha}}{2}(x^2+y^2)+\sum_{k+l\geqslant 3}\widetilde{H}_{kl}(t)x^k y^l,$$

обладающая теми же свойствами, что и $H(x;\ y;\ t)$, удовлетворяющая условиям $|\alpha-\widetilde{\alpha}|<\varepsilon_2$, $|H_{kl}(t)-\widetilde{H}_{kl}(t)|<\varepsilon_{kl}$ и такая, что система

$$\dot{x}=\widetilde{H}_y, \qquad \dot{y}=-\widetilde{H}_x$$

обладает в любой окрестности начала особым периодическим решением, отличным от $x=y=0$. Число $\widetilde{\alpha}$ может быть выбрано иррациональным. (Периодическое решение системы вида (1.1) называется особым, если существует в x, y, t-пространстве такая его окрестность, в которой нет других периодических решений с тем же периодом).

Доказательство теоремы 2 основано на изучении связанного с системой (1.1) отображения плоскости $(x,\ y)$, сохраняющего площадь.

М. И. Грабарь

7675. К теории дифференциальных уравнений. Татаркевич (Contribution à la théorie des équations différentielles. Tatarkiewic Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie Sklodowska, 1955(1957), **A9**, № 1-13, 29—36 (франц.; рез. русск., польск.)

Приводятся результаты, относящиеся к представлению фундаментальной системы решений линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Б. П. Демидович

7676. О некоторых теоремах среднего значения в нелинейной механике. Манарези (Su alcuni teoremi di media nella meccanica non lineare. Manaresi Gabriella), Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena, 1951—1952 (1953), **6**, 78—86 (итал.)

Доказывается, что если $y = y(t)$ есть периодическое решение периода T обобщенного уравнения Льенара (Liénard)

$$\ddot{y} + \dot{F}(y) + \varphi(y) = 0,$$

то $\int_0^T F(y)\varphi(y)dt = 0$.

Аналогичный результат устанавливается также для системы двух уравнений типа Льенара. Теорема автора представляет обобщение теоремы Сансоне (Sansone G., Rend. Linc., 1949, ser. 8, **6**, 156—160). В заключение рассматриваются некоторые приложения теоремы Граффи (Graffi D., Actes Colloq. Intern. des vibrat. non linéaires), Porquerolles, 1951, 189—194). Б. П. Демидович

7677. Некоторая точка зрения на проблему Коши. Хилле (Some aspect of Cauchy's problem. Hille Einar), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954, Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 109—116 (англ.)

Статья носит обзорный характер.

Абстрактная проблема Коши (ACP^1) формулируется следующим образом.

Пусть дано комплексное B-пространство $\mathfrak{X}$ и в нем линейный оператор U с областью определения $D(U)$ и областью значений $R(U)$. Пусть задан элемент $y_0 \in \mathfrak{X}$. Требуется найти такую функцию $y(t) = y(t, y_0)$, что 1) $y(t)$ сильно абсолютно непрерывна и непрерывно дифференцируема в каждом подынтервале интервала $0, \infty)$ [или $(0, \infty)$]; 2) для каждого $t > 0$, $y(t) \in D(U)$ и $Uy(t) = y'(t)$; 3) $\lim_{t \to 0+} \| y(t, y_0) - y_0 \| = 0$.

Это определение дано Филлипсом. В условии (1) подразумеваются две возможности, и в соответствии с этим различают две абстрактные проблемы Коши ACP_1^1 и ACP_2^1.

Говорят, что решение $y(t)$ нормального типа, если

$$\lim_{t \to +\infty} \sup t^{-1} \log \| y'(t) \| = \omega < \infty .$$

Решение, не равное тождественно нулю и стремящееся к нулю при $t \to 0+$, называется нулевым решением. Вопрос о единственности и неединственности ACP^1 сводится к вопросу о существовании нулевых решений. Имеют место следующие теоремы (Э. Хилле):

Теорема 1. Для каждого $y_0 \in \mathfrak{X}$ ACP^1 имеет не более одного решения нормального типа, если U — замкнутый оператор, точечный спектр которого неплотен ни в какой правой полуплоскости.

Теорема 2. Если U замкнут, то необходимое и достаточное условие того, что ACP^1 имеет нулевое решение нормального типа $\leqslant \omega$, состоит в том, что характеристическое уравнение

$$Ux(\lambda) = \lambda x(\lambda)$$

имеет решение $x(\lambda) \not\equiv 0$, ограниченное и голоморфное в каждой полуплоскости $R(\lambda) \geqslant \omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Следующий пункт посвящен установлению связи с теорией полугрупп. Рассматриваются сильно непрерывные при $t > 0$ полугруппы $S(t)$ двух классов (C_0) и $(0, A)$.

Филлипсом установлены теоремы.

Теорема 3. Если U — инфинитезимальный генератор полугруппы $S(t)$ класса $(0, A)$, то ACP_2^1 имеет единственное решение $y(t, y_0) = S(t)y_0$ для каждого $y_0 \in D(U)$.

Теорема 4. Пусть U — замкнутый оператор с плотной областью определения и не пустым резольвентным множеством (и пусть $\lambda \| R(\lambda, U) \| = O(1)$, когда $\lambda \to +\infty$). Предположим, что для каждого $y_0 \in D(U)$ существует единственное решение ACP_1^1 (соответственно ACP_2^1). Тогда U образует полугруппу класса (C_0) (соответственно класса $(0, A)$) и $y(t, y_0) = S(t)y_0$ для всех $y_0 \in D(U)$.

Последнее приложение (пункт 6) относится к одномерному уравнению диффузии. Здесь приводятся результаты Э. Хилле, эквивалентные известным результатам Феллера.

В конце статьи, аналогично ACP^1, формулируется ACP^n для уравнения $U^n y(t) = y^n(t)$ и проводится одна теорема Э. Хилле, относящаяся к случаю $n = 2$.

Теорема 6. Если U образует сильно непрерывную при всех $-\infty < t < +\infty$ группу $T(t, u)$, то ACP^2 имеет единственное решение $y(t)$ для любых $y(0) \in D(U^2)$ и $y'(0) \in D(U) \cap R(U)$ именно

$$y(t) = \frac{1}{2}\{T(t, U)[y(0) + z_1] + T(-t, U)[y(0) - z_1]\},$$
$$Uz_1 = y'(0).$$

П. Е. Соболевский

7678. О счетных системах дифференциальных уравнений в линейных нормированных пространствах и устойчивости их решений. Хаймульдин Омар, Сб. научн. тр. Казахск. горно-металлург. ин-та, 1957, № 15, 313—339

Рассматривается счетная система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots) \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad (1)$$

где функции $x_1, x_2, \dots$ принимают значения, соответственно, в некоторых полных линейных нормированных пространствах $A_1, A_2, \dots$, а область значений функции f_n принадлежит пространству A_n. Функции f_n предполагаются непрерывными по t и удовлетворяющими условию Липшица по x_i, т. е. для двух точек $(t, x_1', x_2', \dots)$ и $(t, x_1'', x_2'', \dots)$ имеет место неравенство

$$\| f_n(t, x_1', x_2', \dots) - f_n(t, x_1'', x_2'', \dots) \| \leqslant$$
$$\leqslant A(t) \| x' - x'' \|,$$

кроме того

$$\| f_n(t, \theta_1, \theta_2, \dots) \| \leqslant B(t),$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные функции,

$$\| x' - x'' \| = \sup [\| x_1' - x_1'' \|, \| x_2' - x_2'' \|, \dots],$$

норма $\| f_n \|$ рассматривается в смысле метрики в A_n и нормы $\| x_1' - x_1'' \|, \| x_2' - x_2'' \|, \dots$ — соответственно в смысле метрик в $A_1, A_2, \dots$, $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ — нулевая точка. Методом последовательных приближений доказывается существование и единственность в целом непрерывного решения системы (1). Устанавливается непрерывная зависимость решения от начальных условий $x_n^0 = x_n^0(t_0, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$. На систему (1) распространяются известные определения устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову в смысле оценок $\sup[\| x_1 \|, \| x_2 \|, \dots]$ и известные теоремы второй методы Ляпунова.

Для линейной однородной системы

$$\frac{dx_n}{dt} = L_n(t_1, x_1, x_2, \dots), \qquad (2)$$

где $L_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ — оператор линейный относительно $x_1, x_2, \ldots$, доказана теорема следующего содержания. Пусть

$$x^{(m)}(t) = x^{(m)}(x_{1m}, x_{2m}, \ldots), \ (m = 1,2, \ldots),$$

есть счетное число решений системы (2) и пусть при $t = t_0$ имеет место неравенство

$$\| x^{(1)}(t_0) \| + \| x^{(2)}(t_0) \| + \ldots = \mu < \infty;$$

тогда при любых вещественных или комплексных C_k $(k = 1,2, \ldots)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup [|C_1|, |C_2|, \ldots] = C < \infty$$

ряды

$$x_s = C_1 x_{s1}(t) + C_2 x_{s2}(t) + \ldots \ (s = 1,2, \ldots)$$

образуют решение системы (2) и допускают их почленное дифференцирование и интегрирование. И. П. Макаров

7679. О задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве Банаха. Агаев Г. Н., Новрузов А. А. Мэ'рузэлэр. АзэрбССР Элмлэр Акад., Докл. АН АзербССР, 1957, **13**, № 11, 1149—1152 (рез. азерб.)

В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши $y'' = f(x, y)$, $y(0) = \eta_1$, $y'(0) = \eta_2$ $(\eta_1, \eta_2 \in E)$.

Оператор $f(x, y)$ предполагается непрерывным по совокупности переменных $0 \leqslant x \leqslant X$, $y \in E$. Предполагается, что

$$\| f(x, x\eta_2 + \eta_1) \| \leqslant \frac{A}{x^\alpha},$$

$$\| f(x, y_2) - f(x, y_1) \| \leqslant \frac{M \| y_2 - y_1 \|}{x^\alpha},$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$.

Задача Коши сводится к интегральному уравнению, после чего методом последовательных приближений доказывается локальная теорема существования и теорема единственности. М. А. Красносельский

7680. О приведенном кинетическом потенциале системы дифференциальных уравнений. Шульгин М. Ф., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, вып. 37, 59—63

Рассматриваются некоторые чисто формальные преобразования координат и введение новых переменных. Эти преобразования, как показывают примеры, не всегда применимы. В. В. Немыцкий

7681. Об одной краевой задаче в пространстве Банаха. Агаев Г. Н., Заманов Т. А. Мэ'рузэлэр АзэрбССР, Элмлэр Акад., Докл. АН АзербССР, 1957, **13**, № 10, 1045—1048 (рез. азерб.)

В банаховом пространстве E рассматривается краевая задача

$$y'' = f(x, y), \quad y(0) = \eta_1, \quad y(1) = \eta_2 \quad (\eta_1, \eta_2 \in E).$$

Оператор $f(x, y)$ со значениями в E предполагается непрерывным по совокупности переменных $x \in [0,1]$, $y \in E$. Предполагается, что

$$\| f(x, x\eta_1 + (1-x)\eta_2) \| \leqslant \frac{A}{x^\alpha (1-x)^\alpha},$$

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leqslant \frac{M \| y_1 - y_2 \|}{x^\alpha (1-x)^\alpha} \qquad (y_1, y_2 \in E),$$

$$\frac{M\Gamma(1-\alpha)\Gamma^2(2-\alpha)}{\Gamma(3-2\alpha)} < 1,$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$.

Краевая задача сводится к интегральному уравнению, после чего методом последовательных приближений доказывается теорема существования и единственности. М. А. Красносельский

7682. Итерации замкнутых геодезических и теория пересечений Штурма. Ботт (On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory. Bott Raoul), Communs. Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 2, 171—206 (англ.)

В работе развиваются топологические методы изучения самосопряженных краевых задач для систем обыкновенных уравнений, позволяющие получить основные факты теории собственных значений таких задач, как следствия топологической теории пересечений.

Рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор L, действующий на n-мерные комплексные вектор-функции $y(t)$ действительного переменного t:

$$Ly = -\{py' + qy\}' + q^*y' + ry.$$

Здесь $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ — комплексные матричные функции; $r(t)$ — самосопряженная, $p(t)$ — положительно определенная, $q^*(t)$ — сопряженная $q(t)$ матрица.

Эквивалентная система из $2n$ уравнений первого порядка для уравнения $Ly = \lambda y$ имеет вид

$$u'(t) = A_\lambda(t)\, u(t) \qquad (1)$$

где $u(t)$ — $2n$-мерная вектор-функция, $A_\lambda(t)$ — $2n$-матрица, вычисляемая по p, q, r, λ.

Для системы (1) составляется фундаментальная система решений в виде матрицы $X_\lambda(t)$, $X_\lambda(0) = 1$; матрица $P = X_0$ (1) была введена Пуанкаре при изучении периодических систем. Доказывается, что при действительных t, λ матрица $X_\lambda(t)$ принадлежит группе $\mathfrak{H}$ комплексных $2n$-матриц X, удовлетворяющих условию $X^*JX = J$, где J — матрица, порождающая преобразование $J(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (-y_1 \ldots -y_n, x_1, \ldots, x_n)$ $2n$-мерного комплексного пространства E.

$2n$-матрицы M, N, по определению, образуют эрмитову пару; если из $Mv = Nv = 0$ (v — вектор) следует $v = 0$, и $M^*JM = N^*JN$; если существует такая невырожденная матрица T, что $MT = M_1$, $NT = N_1$, то пары $\{M, N\}$, $\{M_1, N_1\}$ считаются эквивалентными. Класс эквивалентности эрмитовых пар $B \supset \{M, N\}$ определяет эрмитово граничное условие B на интервале $[0, a]$: $u(t)$ удовлетворяет B, если существует такой вектор $v \in E$, что $u(0) = Mv$, $u(a) = Nv$. Через B^0 обозначается множество тех $X \in \mathfrak{H}$, для которых $\det |XM - N_1| = 0$.

Через $[\theta_B : \tau]$ обозначается число линейно независимых решений системы $Ly = \lambda y$, удовлетворяющих краевому условию B на $[0, a]$ при каком-либо λ, принадлежащем интервалу τ (предполагается что концы не являются собственными значениями краевой задачи B).

Основной результат работы составляет теорема V: B^0 является носителем $[(2n)^2 - 1]$-мерного абсолютного (открытого) цикла γ_B многообразия $\mathfrak{H}$, такого, что для любого интервала τ

$$[\theta_B : \tau] = [\gamma_B : \tau],$$

где $[\gamma_B : \tau]$ есть топологический индекс пересечения γ_B с дугой $X = X_\lambda(a)$ $(\lambda \in \tau)$ в $\mathfrak{H}$.

Из этой теоремы вытекают: теорема существования бесконечного дискретного спектра для регулярной задачи; теорема о непрерывной зависимости спектра от краевого условия; обобщения осцилляционной теоремы Штурма и теоремы М. Морса о фокальных точках.

Оказывается, все эти теоремы являются следствием того факта, что пересечение двух циклов, один из которых гомологичен нулю, также гомологично нулю.

Детально изучается частный случай, когда p, q, r имеют период 1, $a = n$ — целое и $\{M, N\} = \{1, z1\}$ $(|z| = 1)$. Этот случай содержит задачу об индексе n-кратно повторенной замкнутой геодезической g^n риманова пространства, рассмотренную М. Морсом (при $z = \pm 1$).

Показывается, в частности, что матрица Пуанкаре P задачи Морса определяет такие две функции $\Lambda_g(z)$, $N_g(z)$ (первую — с точностью до постоянного слагаемого, вторую — полностью), заданные на окружности $|z|=1$, что индекс $\lambda(g^n)$ и степень вырождения (nullity) $\nu(g^n)$ выражаются в виде:

$$\lambda(g^n)=\Sigma\Lambda_g(\omega),$$

$$\nu(g^n)=\Sigma N_g(\omega);$$

здесь суммирование распространяется на все корни ω n-й степени из 1 или из —1, в зависимости от того, ориентируема g или нет. При этом g называется ориентируемой (неориентируемой), если при параллельном перенесении вдоль g координатный репер риманова пространства сохраняет (изменяет на обратную) свою ориентацию.

Доказывается ряд других результатов относительно $\Lambda(z)$, $N(z)$, $\lambda(g^n)$, $\nu(g^n)$, усиливающих или частично пересекающихся с результатами Хедлунда (Hedlund G. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **34**, 75—77) и Морса и Питчера (Morse M., Pitcher E., Proc. Nat. Acad. Sci., 1934, **20**, 282—287). Приводятся без доказательства теоремы, характеризующие классы гомологий цикла γ_B и двойственных ему (замкнутых) циклов в $\mathfrak{B}$.

А. И. Фет

7683. Об одной линейной неавтономной системе. Савинов Г. В., Цитович П. А., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 3, 9—12

Проводится качественное исследование уравнения

$$\ddot{x}+f(t)x=0, \qquad (1)$$

где $f(t)>0$ — возрастающая функция, путем рассмотрения решений на фазовой плоскости $(x,\dot{x})$. Указывается также метод получения приближенных формул для решения в том случае, когда $|f'(t)/2f(t)|<1$. Этот метод лишь формой изложения отличается от известного метода, состоящего в приведении уравнения (1) преобразованием Лиувилля к виду $d^2u/du^2+(1+\varphi(\tau))u=0$, где $\int^{\infty}|\varphi(t)|\,dt<\infty$, и отбрасывании $\varphi(\tau)$ — см. стр. 131 и 159—160 книги Беллмана (РЖМат, 1956, 5239 К).

А. Ф. Филиппов

7684. О существовании решений краевых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эрман (Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ehrmann Hans), Math. Ann., 1957, **134**, № 2, 167—194 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$y''=f(x,y,y'), \qquad (1)$$

в котором действительная функция $f(x,y,v)$ однозначна в области $G\{x_0\leqslant x\leqslant x_1,\ -\infty<y,v<+\infty\}$ и удовлетворяет следующим условиям:

I. Для каждой тройки чисел a,y_a,y'_a $(x_0\leqslant a\leqslant x_1,\ -\infty<y_a,y'_a<+\infty)$ соответствующее интегро-дифференциальное уравнение

$$y'(x)-y'(a)=\int_a^x f(t,y(t),y'(t))\,dt \qquad (2)$$

имеет решение $y=y(x)=y(x;a,y_a,y'_a)$ с начальными значениями $y(a)=y_a$, $y'(a)=y'_a$, причем y, а также $y'=y'(x)=y'(x;a,y_a,y'_a)$ непрерывно дифференцируемы по x и непрерывно зависят от параметров a,y_a,y'_a (при этом интеграл (2) понимается в смысле Лебега и в точках непрерывности из уравнения (2) следует уравнение (1)).

II. Существует непрерывная функция $h(y)$ и постоянные K_1, K_2, K_3 такие, что в области G

$$|f(x,y,v)-h(y)|\leqslant K_1|y|+K_2|v|+K_3$$

(это условие — при измеримости f — обеспечивает существование интеграла (2).

III. Для каждой постоянной $C>0$ существуют положительные постоянные ε, c, Y такие, что $f(x,y,v)\ v^{-1}\leqslant -C$ при $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, $|y|\geqslant Y$, $|v|\leqslant c|y|^{1+\varepsilon}$.

Эти условия гарантируют „штурмовский" характер решений уравнения (2) — перемежаемость нулей y, y', что на „фазовой плоскости" y, y' (с евклидовой метрикой $y^2+y'^2$) характеризуется спиралевидной формой кривой $y(x)$, $y'(x)$ (x — параметр) и выражается следующей теоремой:

Теорема 5. Для каждого $R>0$ произвольного натурального числа N существует постоянная $R_1>0$ такая, что для всякого решения $y(x)$ уравнения (2) с $a=x_0$ и начальными значениями $y(x_0)$, $y'(x_0)$ с $y(x_0)^2+y'(x_0)^2\geqslant R_1^2$ справедливы следующие утверждения: 1) $y(x)^2+y'(x)^2\geqslant R^2$ для всех x, $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, 2) кривая $y(x)$, $y'(x)$ на плоскости y, $y'=v$ при $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ охватывает окружность $y^2+v^2=R^2$ по крайней мере N раз; 3) периоды $\xi_{n+1}-\xi_n$ оборотов (т. е. приращения параметра x между двумя последовательными пересечениями в моменты $x=\xi_n$, $x=\xi_{n+1}$ нашей кривой с фиксированной прямой $a_1y+a_2v=0$) не превосходят $(x_1-x_0)N^{-1}=\delta$; 4) во всяком подинтервале $a\leqslant x<a+\delta$ интервала $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ лежит по крайней мере одна точка ξ_n.

Основной целью своей работы автор считает доказательство существования таких решений уравнения (2), которые удовлетворяют граничным условиям:

$$a_1y(x_0)+a_2y'(x_0)=a, b_1y(x_1)+b_2y'(x_1)=b$$

$$(a_1^2+a_2^2>0,\ b_1^2+b_2^2>0). \qquad (3)$$

На плоскости y, y' уравнение вида $\alpha y+\beta y'=\gamma$ определяет прямую линию и, таким образом, нужно доказать существование интегральных кривых l которые в заданные моменты $x=x_0$, $x=x_1$ начинаются и кончаются на заданных прямых (3). Это достигается рассуждениями, напоминающими доказательства теорем Бохера для систем Штурма (см., например, Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, I, М., 1953, гл. IV). Таким образом, получается решение краевой задачи (2), (3) и, удаляя P, можно получить неограниченно много таких решений; это и есть основная теорема существования, доказываемая в реферируемой статье.

Примечание референта. Автор не отмечает указанной выше аналогии его построений с классическими рассуждениями. Вообще, в работе полностью отсутствует библиография по данному вопросу. М. К. Фаге

7685. О нелинейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. Фукухара (Sur les équations différentielles périodiques non linéaires. Hukuhara Masuo), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 1957, **7**, № 4, 437—447 (франц.)

Рассматриваются уравнения вида

$$dx_j/dt=f_{j1}(t)x_1+\ldots+f_{jn}(t)x_n+$$

$$+\Sigma''f_{jk_1\ldots k_n}(t)x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}, \qquad (1)$$

где ряды в правых частях сходятся равномерно при $-\infty<t<\infty$, $|x_\sigma|<\delta$, а коэффициенты $f_{jk}(t)$, $f_{jk_1\dots k_n}(t)$ суть непрерывные периодические функции с периодом ω.

Показывается, что можно определить такое формальное преобразование

$$x_j \approx p_{j1}(t)\eta_{i1}+\dots+p_{jn}(t)\eta_{in}+ \\ +\Sigma'' p_{jk_1\dots k_n}(t)\eta_{i1}^{k_1}\eta_{i2}^{k_2}\dots\eta_{in}^{k_n} \qquad (2)$$

что уравнения (1) приводятся к виду

$$d\eta_j/dt \approx h_j(t,\eta_{i1},\dots,\eta_{in}),\ h_j=\lambda_j\eta_j+\delta_{j-1}\eta_{j-1}+ \\ +\Sigma'' b_{jk_1\dots k_n}\exp\{(\lambda_j-\Sigma k_e\lambda_e)t\}, \qquad (3)$$

где λ_j, δ_{j-1}, $b_{jk_1\dots k_n}$ — постоянные, причем $b_{jk_1\dots k_n}=0$

$$\text{при } \lambda_j \neq \sum K l \lambda l \left(\mathrm{mod}\frac{2\pi i}{\omega}\right).$$

Показывается далее, что если интегралы

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_{jk_1\dots k_n}(t)\exp\{(\Sigma K_e\lambda_e-\lambda_j)t\}\,dt$$

положить равными некоторым значениям $q_{jk_1\dots k_n}$ при $\lambda_j\equiv\Sigma K l\lambda l\left(\mathrm{mod}\frac{2\pi i}{\omega}\right)$, то такое формальное преобразование будут единственным.

Рассматривается также вопрос о существовании периодических решений исходных уравнений и показывается, что если найдется именно такое преобразование вида (2), что в преобразованных уравнениях (3) правые части $h_j(t,\eta_{i1},\dots,\eta_{in})=0$ при $\eta_j=0$, $j\neq r_1,\dots,r_m$, то тогда периодическое решение исходных уравнений (1) существует и это решение разлагается в ряды по степеням m произвольных постоянных. Доказывается, что эти ряды сходятся всегда вблизи начала координат.

Ю. А. Рябов

7686. О решении системы нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сайто (On the system of non - linear differential equations with periodic coefficients. Saito Tosiya), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 3, 97—106 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k+ \\ +\sum_{k_1+\dots+k_n\geq 2} a_{j,k_1\dots k_n}(t)x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}, \qquad (1)$$

$$j=1,\dots,n$$

где правые части представлены в виде степенных рядов, сходящихся при $-\infty<t<\infty$, $|x_j|<\rho$, $\rho>0$; коэффициенты $a_{jk}(t)$ и $a_{j,k_1\dots k_n}(t)$ суть периодические функции t с периодом 1. Показывается, что если действительные части характеристических показателей $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, линейной системы, соответствующей (1), все положительные или все отрицательные, то решение $x_j(t)$, $j=1,\dots,n$, системы (1) при начальных условиях $x_j(t_0)=x_{j_0}$ может быть представлено в области $t_0-N\leq t\leq t_0+N$, $|x_{j0}|<\varepsilon_N$, $j=1,\dots,n$, где N — произвольное число (положительное), а ε_N зависит от N, в виде: $x_j(t)=\sum_{k_1+\dots+k_n\geq 1}P_{j,k_1\dots k_n}(t)e^{(k_1\lambda_1+\dots+k_n\lambda_n)t}$, (2) где $P_{j,k_1\dots k_n}(t)$ суть полиномы по t с периодическими коэффициентами. Если при этом все $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ различны и если ни при каких целых положительных $k_1,\dots,k_n$ таких, что $k_1+\dots+k_n\geq 2$ и ни при каких $m=1,\dots,n$ не имеет место тождество

$$\lambda_m\equiv k_1\lambda_1+\dots+k_n\lambda_n\,(\mathrm{mod}\,2\pi i),$$

то функции $P_{j,k_1\dots k_n}(t)$ в (2) суть периодические с периодом 1, и это решение имеет место в области

$$|e^{\lambda_1 t}|<M,\dots,|e^{\lambda n t}|<M,\quad |x_{j_0}|<\varepsilon_M,$$

где M — произвольное положительное число и ε_M зависит от M.

Ю. А. Рябов

7687. Существование и единственность решения краевых задач нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Чан Чан Хун, Докл. АН СССР, 1957, 113, № 6, 1227—1230

Для краевой задачи

$$y^n=\varphi(x,y,\dots,y^{(n-1)}),$$
$$y^{(k)}(a)=y_0^{(k)}\ (k=0,1,\dots,n-2),\ y^{(n-2)}(b)=y_1^{(n-2)} \qquad (1)$$

доказано существование единственного решения в следующих предположениях: 1) $\varphi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ непрерывна вместе со своими первыми производными по $y,y',\dots,y^{(n-1)}$ при $-\infty<x,y,y',\dots,y^{(n-1)}<+\infty$; 2) существуют постоянные S, $\mu>0$ такие, что $0\leq\varphi_{y^k}\leq S$ $(k=0,1,\dots,n-3)$, $0<\varphi_{y^{(n-2)}}<\mu$, $b-a<\ln(1+\mu/S)$; 3) $|\varphi|\leq A(y^{(n-1)})^2+B$, где A и B — непрерывные неотрицательные функции $x,y,y',\dots,y^{(n-2)}$ в любой замкнутой области. Эта теорема в определенном смысле является обобщением теоремы С. Н. Бернштейна (Успехи матем. наук, 1941, 8, 32) для уравнения второго порядка.

Далее изучается задача

$$u''=F(t,u,u'),\quad u(a)=\alpha,\quad u(b)=\beta, \qquad (2)$$

где u, F, α, β — n-мерные векторы (α, β постоянны), $a\leq t\leq b$. Для существования единственного решения достаточно следующих условий: 1) F определена при $a\leq t\leq b$, $\|u\|$, $\|u'\|<\infty$; 2) для матриц F_u и $F_{u'}$ с любыми комбинациями аргументов выполнены неравенства $(F_u w,w)\geq m_0\|w\|^2$, $|(F_{u'}v,w)|\leq m_1\|v\|^2+m_2\|w\|^2$, где $1>m_1>0$, $m_0>m_2>0$ (m_i — постоянные); 3) $\|F(t,u,u')\|\leq A(t,u)\|u'\|^2+B(t,u)$, где A и B — непрерывные неотрицательные функционалы в любой замкнутой области.

Указаны менее ограничительные условия существования единственного решения задачи (2) для скалярного случая (когда $a=0$, $b=1$, $\alpha=\beta=0$): 1) F непрерывно дифференцируема по u, u' в области $0\leq t\leq 1$, $-\infty<u,u'<+\infty$ и $F_u>-c>-\pi^2$, где $c>0$ — постоянная; 2) $F_{u'}'=k+\alpha(t)$, где k постоянно и $\alpha(t)$ непрерывна на $[0,1]$; 3) $c\pi^{-2}+\max|\alpha(t)|(\pi^2+1)(2\pi^2)^{-1}<1$. Эта теорема применяется для изучения поведения решения некоторого нелинейного параболического уравнения.

Сформулированы также достаточные условия существования единственного решения краевой задачи с периодическими граничными условиями

$$y''=ay+\varphi(x,y,y'),\ y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1). \qquad (3)$$

А. И. Перов

7688. Ограниченные движения нелинейных систем со многими степенями свободы. Манфреди (Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in

condizioni non lineari. Manfredi Bianca), Boll. Unione mat. ital., 1956, № 1, 64—71 (итал.)

Рассматривается система $\ddot{x}=\varphi_i(t, X(t), \dot{X}(t))$

$$(i=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

где $X(t)$ — совокупность $x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Функции $\varphi_i(t)$ имеют свойства, обеспечивающие существование и локальную единственность решений системы (1). Автор называет устойчивыми («stabili») те решения системы, для которых $|x_i(t)|$ и $|\dot{x}_i(t)|$ ограничены для всех значений t; в этом смысле и употребляется дальше этот термин.

Рассматриваются три частных вида систем (1).

$$\text{I. } \ddot{x}_i+\omega_i(X(t), \dot{X}(t))\,\dot{x}_i+g_i(X(t))=f_i(t) \qquad (1')$$

и для этого случая доказывается теорема: Если а) $\omega_i(X(t), \dot{X}(t))\geqslant 0$ для всех $(X(t), \dot{X}(t))$, б) $g_i(X(t))=\partial G(X(t))/\partial x_i$, где $G(X(t))>0$, для $X(t)\neq 0$, в) $G(X(t))\to+\infty$ при $x_i(t)\to+\infty$, г) $f_i(t)$ интегрируема на $(0, +\infty)$, тогда всякое решение системы (1'), существующее на $(0, +\infty)$, является устойчивым.

II. Для системы

$$\ddot{x}_i+r_i(\dot{X}(t))+\omega^2 x_i=f_i(t), \qquad (1'')$$

где ω — постоянное, доказана теорема: Если $\sum_{i=1}^{n} r_i(\dot{X}(t))\,x_i(t)\geqslant 0$ для всех $\dot{X}(t)$, $|f_i(t)|$ интегрируема на $(0, +\infty)$, тогда каждое решение системы (1''), существующее на $(0, +\infty)$, является устойчивым.

III. Для системы

$$\ddot{x}_i+2\varepsilon\dot{x}_i+r_i'(\dot{X}(t))+\omega^2 x_i=f_i(t), \qquad (1''')$$

где ε и ω — постоянные, доказаны теоремы:

Теорема. Если $\varepsilon>0$, $r_i'(\dot{X}(t))$ равномерно удовлетворяют условию Липшица с показателем $\alpha<1$ по всем x_i, тогда если одно из решений системы (1''') предельно ограниченно, то и все решения этой системы устойчивы. Для системы (1''') доказана еще одна теорема.

Теорема. Если система (1''') удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и имеет решения на $(0, +\infty)$, то разность двух таких решений остается ограниченной при неограниченном возрастании t. Автор указывает на то, что эти теоремы являются обобщением результатов, полученных Антосевичем (РЖМат, 1956, 2294) и Сестини (РЖМат, 1956, 5849; Riv. Mat. Univ. Parma, 1951, 2, 303—314; Atti 4 Congresso univ. Mat. Italia, 1951, 2, 559—564). А. Н. Черкасов

7689. О некотором нелинейном дифференциальном уравнении третьего порядка. Джонс (On some third order non-linear differential equations. Jones John, Jr), Portugaliae math., 1955, **14**, № 3-4, 95—98 (англ.)

Предлагаются условия ограниченности решения и их производных для нелинейного уравнения.

Теорема. Если для нелинейного уравнения

$$[r(x)y'']'+\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,[y']^{2i-1}=0 \qquad (1)$$

выполнены следующие условия:

1) $r(x)>0$, $r(x)$ и $p_i(x)$ вещественные и непрерывные при $a\leqslant x<+\infty$; 2) $r(x)p_i(x)>0$ при $a\leqslant x<+\infty$; 3) $r(x)p_i(x)$ абсолютно непрерывны при $a\leqslant x<+\infty$; 4) $[r(x)p_i(x)]^{-1}\,[r(x)p_i(x)]'_0\in L(a,+\infty)$ для $i=k$, $[r(x)p_i(x)]^{-1}\,[r(x)p_i(x)]'_\Phi\in L(a;+\infty)$ для всех $i\neq k$, то $y'(x)$ ограничено при $a\leqslant x<+\infty$, $y(x)$ — любое решение (I), где

$$f'(x)_\Phi=\max[f'(x), 0], \qquad f'(x)_0=\min[f'(x), 0].$$

Далее приводятся два утверждения, сопровождаемые доказательствами, не доведенными до конца.

В. И. Зубов

7690. Об одной дифференциальной системе четвертого порядка. Мерфи (An interesting fourth-order differential system. Murphy Charles H.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 9, 664—666 (англ.)

Рассматривается система вида

$$x''=c_1x'+c_2x+c_3y'+c_4y,$$

$$y''=c_5x'+c_6x+c_7y^2+c_8y,$$

где c_k — постоянные.

Указывается, что в некоторых случаях ее решение можно свести к решению квадратного уравнения.

В. А. Кондратьев

7691. Современное состояние метода Пуанкаре и возможность его использования. Малкин И. Г., Тр. 2-го Всес. совещ. по теории автомат. регулирования. Т. I. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1955, 169—176

Дается обзор советских работ по методам построения периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода малого параметра, предложенного Пуанкаре.

Н. П. Еругин

7692. О линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами и периодической разрывной возмущающей функцией. Шмидт (Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und periodischer unstetiger Störungsfunktion. Schmidt Adam), Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 2, 189—190 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$L(y)\equiv y^{(n)}+c_1y^{(n-1)}+\ldots+c_ny=f(x), \qquad (1)$$

где $c_1,\ldots,c_n$ — постоянные и $f(x)$ — ограниченная функция с периодом 2π, интегрируемая в смысле Лебега. Под решением уравнения (1) понимается функция $y=\varphi(x)$ такая, что: 1) $\varphi(x)$ всюду $(n-1)$ раз дифференцируема; 2) $\varphi^{(n-1)}(x)$ почти всюду имеет конечную производную; 3) $L[\varphi(x)]=f(x)$ почти всюду.

Теорема 1. В „резонансном" случае не существует решения уравнения (1) с периодом правой части.

Теорема 2. В «нерезонансном» случае имеется периодическое периода 2π решение, определенное с точностью до периодических решений того же периода соответствующего однородного уравнения, коэффициенты Фурье которого вычисляются формально по коэффициентам Фурье правой части. Б. П. Демидович

7693. О нелинейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. Фор (Sur les équations différentielles non linéaires à coefficients périodiques. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 23, 2767—2769 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+K_1y^{(n-1)}+\ldots+K_ny=f(t, y, y', \ldots, y^{(n)}), \qquad (1)$$

где $K_1, \ldots, K_n$ — вещественные постоянные, $f=a+b_0y+\ldots+b_ny^{(n)}+c_{pqr\cdots v}y^p y'^q\ldots y^{(n)v}$, a, b_i, $c_{pqr\cdots v}$ — периодические функции периода T, разложимые в

абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$a = \sum a_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}, \qquad b_l = \sum b_{l,n} e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

$$c_{pqr\cdots v} = \sum c_{p,qr\cdots v,n} e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

причем

$$\|a\| = \sum |a_n| < \infty, \quad \|b_l\| = \sum |b_{l,n}| < \infty,$$

$$\|c_{pqr\cdots v}\| = \sum |c_{pqr\cdots v,n}| < \infty,$$

и

$$\int_0^T a(t)dt = \int_0^T b_l(t)dt = 0.$$

Предполагается, что ряд $\|c_{pqr\cdots v}\| X^p Y^q \ldots Z^v$ абсолютно сходится для положительных $X_0, Y_0, \ldots, Z_0$.

Утверждается, что уравнение (1) имеет единственное периодическое решение периода T, если $\|a\|$ не есть нуль, а $\|b_l\|$ достаточно малы. А. И. Перов

7694. О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений. Гу Лянь-кунь (On the periodic solutions of systems of non-linear differential equations. Ко L. К.), Сямэнь дасюэ сюэбао. Цзыжанькэсюэбань, Asta scient. natur. Univ. amoensis, 1957, № 1, 59—66 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается нелинейная система

$$dx/dt = X(x, t) + q(x, t, k), \qquad (1)$$

где x, $X(x, t)$, $q(x, t, k)$ — n-мерные векторы и k — действительный параметр. Предполагается, что: а) $X(x, t)$ и $q(x, t, k)$ непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по x и периодичны по t с периодом π, причем $X(0, t) \equiv 0$ и $q(x, t, 0) \equiv 0$; б) каждое решение системы первого приближения

$$dx/dt = X(x, t)$$

удовлетворяет условию

$$|x(t)| \leqslant \beta |x(t_0)| e^{-\alpha(t-t_0)},$$

где β и α — положительные постоянные.

Теорема. Если система (1) удовлетворяет условиям а) и б) и k достаточно мало, то существует единственное периодическое решение системы (1).

Если, сверх того:

$$|X(x_3, t) - X(x_2, t) - X(x_1, t)| \leqslant L|x_3 - x_2 - x_1|$$

(в тексте резюме опечатка: на стр. 66, вторая строка снизу, вместо x_3, x_2 стоит t_3 и t_2), то периодическое решение системы (1) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

Доказательство 1-й части теоремы проводится с помощью построения функции Ляпунова; при доказательстве 2-й части теоремы используется метод интегральных неравенств. Б. П. Демидович

7695. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с запаздывающим аргументом. Муравьев П. А., Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 4, 432—441 (рез. англ.)

Операционными методами интегрируется система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянными запаздываниями.

Операционный метод применяется в комбинации с «методом шагов». Указывается вид частного решения для систем с простейшими правыми частями.

Л. Э. Эльсгольц

7696. Решение операционным методом некоторых дифференциальных уравнений n-го порядка с запаздывающим аргументом (с различными запаздываниями). Муравьев П. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 175—187

Операционным методом интегрируются линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями. Операционный метод применяется в комбинации с «методом шагов».

Примечание референта. Автор ставит перед собой задачу: «доказать существование и единственность решения» и «построить это решение с помощью операционного метода». Лишь последняя задача — построение решения — является ранее нерешенной. Существование и единственность решения начальной задачи доказывались многими авторами (например А. Д. Мышкисом) для значительно более широких классов уравнений. Существование изображения решения следует из результатов Белмана и Райта и поэтому тоже не нуждается в доказательстве.

Л. Э. Эльсгольц

7697. Решение (уравнений) отрицательных политроп Эмдена. Роджерс, Майерс (Solutions of the negative Emden polytropes. Rodgers A. W., Myers D. M.), Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1955 **114**, № 6, 620—627 (англ.)

При помощи дифференциального анализатора получены решения уравнения Эмдена с отрицательным показателем политропы, которое определяет распределение яркости и плотности в шаровых скоплениях и туманностях.

Уравнение имеет вид $\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) = x^2 y^{-n}$ для граничных условий $y = 1$, $dy/dx = 0$ при $x = 0$. Изложена методика расчетов. Приведены графики и таблицы решений для $n = 2$; 2,5; 3; 3,5 и 4 в пределах от $x = 0$ до $x = 20$. Е. И. Сушкина

7698. О поднормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга. Латышева К. Я., Наук. зап. Київськ. ун-та, 1957, **16**, № 2, 119—135

Дословный текст настоящей работы уже был ранее напечатан в том же журнале (РЖМат, 1955, 198).

В. П. Басов

7699. О методе наискорейшего спуска. Харазов Д. В., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, АН ГрузССР, 1957, **24**, 111—123

Линейный ограниченный оператор A, отображающий вещественное гильбертово пространство X в себя, называется симметризуемым с помощью линейного строго положительного ограниченного оператора H, если $(HAx, y) = (x, HAy)$ для любых $x, y \in X$ (предполагается, что $(Hx, x) > 0$, если $x \neq 0$). В гильбертовом пространстве со скалярным произведением $[x, y] = (Hx, y)$ оператор A самосопряжен. Это позволяет применять для отыскания собственных значений оператора A и для решений неоднородных уравнений $Ax = \varphi$, разработанный Л. В. Канторовичем метод наискорейшего спуска.

Автор детализует изложенные соображения и применяет полученные результаты к построению последовательных приближений к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, изученной им ранее (РЖМат, 1956, 413). М. А. Красносельский

7700. Некоторые задачи поведения в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Кордуняну (Citeva probleme globale referitoare la ecuatiile diferentiale neliniare de ordinul al doilea. Corduneanu C.), Studii si cercetari stiint. Acad. RPR Fil. Jasi. Mat. 1956, **7**, № 1, 1—7 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается уравнение

$$y'' = f(x, y). \qquad (1)$$

Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям: а) $f(x, y)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $-\infty < y < +\infty$, б) частная производная f_y удовлетворяет неравенству $0 < m \leqslant f_y \leqslant M$ во всей рассматриваемой области, в) $f(x, 0)$ ограничена на полуоси $x \geqslant 0$. Доказана лемма: Если $f(x, y)$ удовлетворяет условиям а), б), в), а $y_2(x)$, $y_1(x)$ — два ограниченных решения уравнения (1), то разности $y_2(x) - y_1(x)$ и $y'_2(x) - y'_1(x)$ при $x \to +\infty$ стремятся к нулю одновременно; кроме того, если одна из них монотонно убывает, то другая монотонно возрастает, и наоборот. После этого доказывается следующее: Если $f(x, y)$ удовлетворяют условиям а), б), в), тогда через каждую точку оси OY проходит единственное, ограниченное на полуоси $x \geqslant 0$ решение уравнения (1). Все такие решения при $x \to +\infty$ асимптотически стремятся к одному из них. Остальные решения продолжаемы и неограничены при $x \to +\infty$.

Если условие б) заменить условием $0 < m \leqslant f_y$, то решения, вообще говоря, будут непродолжаемы. Однако ограниченные решения будут располагаться так же, как в случае, описанном выше.

Далее доказано: Если условия а), б), в) удовлетворяются на всей плоскости, соответственно на всей оси OX, тогда уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение (на всей оси OX). Если исключить из рассмотрения точку встречи графика этого решения с осью OY, то через каждую точку оси OY проходит решение, ограниченное на полуоси $x \geqslant 0$ и неограниченное на $x \leqslant 0$, и другое решение, ограниченное на $x \leqslant 0$ и неограниченное на $x \geqslant 0$. Ограниченные решения на полуоси при $|x| \to \infty$ асимптотически стремятся к решению, ограниченному на всей оси OX. Остальные решения неограничены при $|x| \to +\infty$. А. Н. Черкасов

7701. Приводимые системы разностных уравнений и устойчивость их решений. Коваль П. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 143—146

В заметке отдельные результаты теории приводимых систем линейных дифференциальных уравнений (Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л. Гостеиздат, 1950) переносятся на системы уравнений

$$x_{s+1} = A_s x_s + a_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где $\{A_s\}$ — заданная ограниченная последовательность неособенных матриц, $\{a_s\}$ — ограниченная последовательность векторов, $\{x_s\}$ — искомая последовательность векторов. Система (1) приводима, если существует ограниченное (вместе с обратным) преобразование $x_s = T_s y_s$, переводящее систему (1) в систему $y_{s+1} = B_s y_s + b_s$, с постоянной матрицей $B_s = B$. Доказывается, что система (1) с периодической матрицей $A_s = A_{s+k}$ $(k > 0)$ приводима. Вводится понятие почти приводимости ($\lim B_s = B$ при $s \to \infty$) и доказывается теорема 2: Система (1), у которой матрица A_s представима суммой двух матриц, одна из которых периодическая, а другая имеет пределом нулевую матрицу, — почти приводимая. Рассматриваются критерии устойчивости для приводимых и почти приводимых систем. Н. Н. Красовский

7702. К устойчивости ускоренных движений, некоторые соображения о линейных дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами. Коллар (On the stability of accelerated motion: some toughts on linear differential equations with variable coefficients. Collar A. R.), Aeronaut. Quart., 1957, 8, № 4, 309—330 (англ.)

Предлагаемая статья стремится привлечь внимание задаче влияния ускорения на эффект стабилизации. Статья разделена на три части.

Часть I начинается с общего рассмотрения задачи. Хотя автор и интересуется устойчивостью по Ляпунову, но вместо ляпуновского определения приводит иные, из которых неясен ни сам характер невозмущенного движения, ни то, по отношению к каким переменным исследуется его устойчивость. В этой же части высказываются некоторые соображения о колебательности решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

В части II рассматривается упомянутое уравнение. Автор исходит из общего решения в амплитудно-фазовом виде, близком к предложенному Хамелем (G. Hamel) и Хауптом (O. Haupt). Предлагается приближенное выражение общего решения в этой форме; оценки приближения не даются. Полученные результаты применяются к исследованию флаттера самолета при прямолинейном полете с постоянным ускорением. Автор выделяет параметр, называемый им числом ускорения, представляющий, впрочем, величину, обратно пропорциональную числу Фруда.

В части III рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами специального вида (с гиперболическим законом изменения), допускающие решения в замкнутом виде. Исследуется устойчивость тривиального решения такой системы. Приводится численный пример для системы двух указанных уравнений. Библ. 6 назв. В. М. Старжинский

7703. Теорема А. М. Ляпунова об устойчивости решений дифференциальных уравнений. Салтыков (Le théorème de A. M. Liapounoff sur la stabilité des solutions d'equations différentielles. Saltykow M. N.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 3, 229—234 (франц.)

Приводится упрощенное доказательство известной теоремы Ляпунова об устойчивости возмущенного движения в случае отрицательности вещественных частей корней соответствующего характеристического уравнения. Доказательство использует явное построение функции Ляпунова и примыкает к доказательству, помещенному в книге Петровского (Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, изд. 4). Б. П. Демидович

7704. Об устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений, правые части которых начинаются формами m-го порядка. Ефремов Е. П., Сб. научн. тр. Казахск. горно-металлург. ин-та, 1957, № 15, 245—252

Рассматривается счетная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(m)}(x_1, x_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

где $X_s^{(m)}$ суть формы m-го порядка $(m \geqslant 2)$ с постоянными коэффициентами, определенные в области $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant R$, и удовлетворяющие в этой области условию Коши

$$|X_s^{(m)}(x'_1, x'_2, \ldots) - X_s^{(m)}(x''_1, x''_2, \ldots)| \leqslant A \sup[|x'_1 - x''_1|, |x'_2 - x''_2|, \ldots].$$

Предполагается, что существует точка $A(a_1, a_2, \ldots)$ такая, что

$$\frac{a_1}{X_1^{(m)}(a_1, a_2, \ldots)} = \frac{a_2}{X_2^{(m)}(a_1, a_2 \ldots)} = \ldots = \delta$$

В этих условиях исследуется движение по интегральной прямой, соединяющей начало координат с точкой A. Доказывается, что при $\delta<0$ точка движется к началу координат (условная асимптотическая устойчивость тривиального решения), при $\delta>0$ точка движется в течение промежутка времени от $t=0$ до $t=\delta/(m-1)$ от начала координат (неустойчивость). Результаты, касающиеся неустойчивости, распространяются на случай наличия добавок к правой части более высокого, чем m, порядка и на некоторые системы с правыми частями, зависящими от t.

Как частный случай рассматривается линейная система.

Примечание референта: Введенное автором условие существования точки A и исследование движения лишь по прямой OA, решение вопроса о неустойчивости на основании характера движения на конечном промежутке времени делают полученные результаты весьма частными, а в отношении неустойчивости незаконченными.

В работе много опечаток, затрудняющих ее чтение.
И. П. Макаров

7705. Об одной задаче устойчивости движения точки переменной массы на конечном интервале времени. Галиуллин А. С., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1953, 28, 67—74

Рассматривается пример приложения полученных ранее результатов (РЖМат, 1954, 5571) к случаю движения точки переменной массы по заданной в вертикальной плоскости криволинейной траектории. Предполагается, что сопротивление среды пропорционально квадрату скорости точки, а реактивная сила направлена по направлению этой скорости. В. Г. Каменков

7706. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений Эльсгольц Л. Э., Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 4, 562—576 (кит.)
Перевод с русского (РЖМат, 1956, 414).

7707. Проблемы и методы современной теории устойчивости. Хан (Probleme und Methoden der modernen Stabilitätstheorie. Hahn W.), MTW-Mitt., 1957, 4, № 5, 289—304 (нем.)

Обзорная статья по исследованиям, посвященным методу функций Ляпунова (второй метод) в теории устойчивости. Описываются основные определения и теоремы второго метода в теории устойчивости Ляпунова. Отмечая отсутствие общих эффективных приемов построения функций Ляпунова, автор описывает некоторые задачи (устойчивость по первому приближению; задача М. А. Айзермана (Успехи матем. наук, 1949, 4, № 4, 187—188) и ее обобщения, задача А. И. Лурье (Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, М., 1951), для решения которых известны схемы построения функций Ляпунова. Описывается предложенный Н. Г. Четаевым метод построения функций Ляпунова в виде комбинации известных интегралов изучаемой системы. Отмечаются работы по задачам обращения теорем Ляпунова и по задачам распространения теории второго метода на системы, описываемые аппаратом, отличным от обыкновенных дифференциальных уравнений (траектории в банаховом пространстве, системы дифференциально-разностных уравнений).

Автор отмечает большое теоретическое значение второго метода Ляпунова, который позволяет создать стройную и строгую теорию устойчивости. Прикладное значение метода для инженерных задач в настоящее время автор считает ограниченным. Ссылаясь на примеры конкретных технических расчетов, предпринятых на основе метода, автор указывает на неудовлетворительность оценок с точки зрения практики. Однако отмечается, что с развитием нелинейной механики и, в частности, с уточнением характера нелинейных связей, значение второго метода как строгого метода исследования может значительно возрасти. В настоящее время автор считает важной задачей изучение возможностей метода путем систематического приложения его (с использованием счетной техники) к широкому кругу технических расчетов и сравнение численных результатов с оценками, которые получаются для этих задач другими методами. Н. Н. Красовский

7708. Критерий устойчивости и его приложение к уравнению шестой степени. Данкан (Stability criteria, with special reference to the sextic equation. Duncan W. J.). J. Roy. Aeronaut. Soc., 1954, 58, № 522, 431—433 (англ.)

Рассматриваются необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения n-й степени. Приводятся критерии устойчивости в форме Рауса и Гурвица. Упоминаются условия обращения в нуль вещественного корня или вещественной части пары комплексных корней.

Результаты применяются к уравнению шестой степени. Определители Гурвица приводятся к виду, удобному для быстрого их вычисления. Опровергается утверждение, что положительность всех коэффициентов уравнения и предпоследнего определителя Гурвица является достаточным условием устойчивости корней уравнения. Показано, что в этом случае могут существовать две пары корней с положительными вещественными частями. Все положения иллюстрируются на числовом примере уравнения шестой степени.
А. П. Проскуряков

7709. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 213

7710. Необходимое и достаточное условие неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Павлюк И. А., Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 2, 111—113

Доказывается, что для того чтобы уравнение $y''+q(x)y=0$ имело бы конечное число нулей на $[a,\infty)$, необходимо и достаточно существование положительной, дважды непрерывно дифференцируемой на $[a,\infty)$ функции $\varphi(x)$ такой, что

$$q(x)\leqslant\frac{\varphi''}{2\varphi}-\frac{3}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 \text{ на } [a,\infty).$$

Это условие эквивалентно ранее известному (Wintner A., Amer. Z. Math., 1951, **74**; Ельшин, Докл. АН СССР, 1949, 68; № 5) условию

$$\sigma'+\sigma^2+q(x)\leqslant 0, \qquad (1)$$

Если в (1) положить $\sigma=-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)$, условие (1) перейдет в условие автора. В. А. Кондратьев

7711. Заметка о затухающих колебаниях. Винтнер (Comments on «flat» oscillations of low frequency. Wintner Aurel), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 365—366 (англ.)
Рассмотрено уравнение

$$x''+f(t)x=0. \qquad (1)$$

Предполагается, что для любого его решения $x(t)$ выполнено соотношение $x(t)=O(t^{1/2})$. Доказано, что если

функция $g(t)$ такова, что

$$\int^{\infty} t|f(t)-g(t)|dt<\infty,$$

то для любого решения $y(t)$ уравнения

$$y''+g(t)y=0 \qquad (2)$$

выполняется соотношение $y(t)=O(t^{1/2})$. Если, кроме того, допустить, что $x'(t)=O(t^{-1/2})$ ($x(t)$ — любое решение уравнения (1), тогда $y(t)=O(t^{-1/2})$ справедливо для всех решений уравнения (2). В. А. Кондратьев

7712. Колеблемость решений нелинейного автономного дифференциального уравнения порядка выше второго. Фридман (Oscillatory solutions of nonlinear autonomous differential equations of order higher than two. Friedman Avner), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 561—566 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^nx}{dt^n}+\frac{d^{n-1}G_1(x)}{dt^{n-1}}+\frac{d^{n-2}G_2(x)}{dt^{n-2}}+\ldots+\frac{dG_{n-1}(x)}{dt}+h(x)=0.$$

Решение называется сильно ограниченным, если оно ограничено с $(n-1)$-й первой производной. Доказывается, что сильно ограниченное решение колеблется, если:

1) функции $h'(x)\frac{d^{n-x}}{dx^{n-x}}$, $G_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ непрерывны $(-\infty<x<\infty)$;

2) $h(0)=0$; $h(x)\neq 0$ при $x\neq 0$;

3) для любой положительной или отрицательной непрерывной функции $f(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ из сходимости $\int_0^{\infty} h\left(f(t)\right)dt$ следует ограниченность $\int_0^t G_k(f(t))dt$ $(k=2, 4, 5, \ldots, n-1)$ и сходимость $\int_0^{\infty} G_3(f(t))dt$; 4) если $h(x)>0$ (<0), то $(-1)^{n-k}G_k(x)<0$ (>0), $k=4,5, \ldots, (n-1)$; 5) действительные части корней полинома

$$u^n+G_1'(0)u^{n-1}+G'_2(0)u^{n-2}+\ldots+G'_{n-1}(0)u+h'(0)$$

положительны.

Доказательство приведено для $n=3$ и говорится, что оно обобщается на случай любого $n>3$.

В. А. Кондратьев

7713. Об одном свойстве интегралов уравнения $y^{(n)}+Q(x)y=0$, $n=3,4$. Швец (Sur une propriété des intégrales de l'équation $y^{(n)}+Q(x)y=0$, $n=3,4$. Svec Marko), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 3, 450—462 (франц.; рез. русск.)

Доказано: 1) если уравнение $y^{(4)}+Q(x)y=0$, $Q(x)\geqslant 0$, имеет одно колеблющееся решение на $(-\infty, \infty)$ то все его решения колеблются; 2) если уравнение $y^{(3)}+Q(x)y=0$, $Q(x)\geqslant 0$, имеет хотя бы одно колеблющееся решение, то любое его решение либо колеблется, либо не имеет ни одного нуля и стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Отмечается, что уравнение $y^{(n)}+Q(x)y=0$, $Q(x)\geqslant 0$, при $n>4$ может иметь одновременно колеблющиеся и неколеблющиеся решения. В. А. Кондратьев

7714. К вопросу об осцилляции интегралов уравнения $y+g(t)=0$. Олех, Опяль, Важевский (Sur le problème d'oscillation des intégrales de l'équation $y''+g(t)y=0$. Olech C., Opial Z. Ważewski T.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 6, 621—626 (франц.; рез. русск.)

Рассматривается уравнение $y''+g(t)y=0$. Авторы приводят достаточные условия, когда все решения этого уравнения на полуинтервале $\Delta=[0, +\infty)$ обращаются в нуль бесконечное число раз.

Пусть $\lim_{t\to\infty}\text{appr}\, G(t)=l$, где $G(t)=\int_0^t g(t)\,dt$. Это означает, что существует множество E, мера Лебега которого конечна и $\lim_{t\to\infty,\,t\notin E}G(t)=l$, если $t\notin E$ (аппроксимативный предел). Основной результат, полученный авторами, состоит в том, что если $l=+\infty$ или если аппроксимативный предел $G(t)$ не существует, всякое решение уравнения $y''+g(t)y=0$ имеет бесконечное число нулей. Из этого условия авторы получают теорему Р. В. Петропавловской (РЖМат, 1956, 6558).

В. А. Кондратьев

7715. О существовании абсолютной константы, связанной с выравнивающей колеблемостью. Винтнер (On the existence of an absolute constant concerning «flat» oscillators. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 3, 710—712 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x''+\omega^2(t)x=0. \qquad (1)$$

По определению, уравнение (1) называется выравнивающимся, если $\lim_{t\to+\infty}x'(t)=0$, для любого решения $x(t)$.

Доказано, что существует абсолютная константа β) такая, что если $\lim_{t\to\infty}\sup t\omega(t)<\beta$ и уравнение (1) колеблющееся, то оно выравнивающееся. Точное значение β не найдено; утверждается только, что $\infty>\beta\geqslant 1$.

В. А. Кондратьев

7716. О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка. Кондратьев В. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 242

7717. Резонансные колебания некоторых нелинейных систем. Симидзу (Resonant oscillations for some non-linear differential equations. Shimizu Tatsujiro), Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1954. Tokio 1955, 443—446 (англ.)

См. РЖМех, 1958, 7359.

7718. Прямое доказательство теоремы об универсальном значении преобразований. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 35—39

В рассматриваемой работе автор доказывает теорему об инвариантности системы уравнений (называемой автором канонической системой уравнений ранга, большего нуля)

$$dq_\nu=\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial p_\nu}+\sum_{i=1}^{r_\sigma}F_{i\sigma}\frac{\partial H_{i\sigma}}{\partial p_\nu}\right)dt_\sigma$$

$$-dp_\nu=\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial q_\nu}+\sum_{i=1}^{r_\sigma}F_{i\sigma}\frac{\partial H_{i\sigma}}{\partial q_\nu}\right)dt_\sigma \quad (\nu=1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

относительно контактного преобразования, определяемого из условия

$$-dW=\sum_{\nu=1}^{n}(\eta_\nu\,d\xi_\nu-p_\nu\,dq_\nu)+\sum_{\sigma=1}^{s}(H_\sigma-K_\sigma)\,dt_\sigma,$$

где

$$W=W(t_1, t_2, \ldots, t_s;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

при этом величины $q_1, q_2, \ldots, q_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ связаны дополнительными уравнениями:

$$W_k(t_1, t_2, \ldots, t_s;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, h), \qquad h < n.$$

При таком преобразовании связь между старыми и новыми переменными осуществляется при помощи $n + h$ уравнений с $n + h$ неизвестными посредством лагранжевых множителей Λ_k.

$$p_\nu = \frac{\partial W}{\partial q_\nu} + \sum_{k=1}^{h} \Lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial q_\nu};$$

$$-\tau_{i\nu} = \frac{\partial W}{\partial \xi_\nu} + \sum_{k=1}^{h} \Lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial \xi_\nu};$$

$$W_k(t_1, t_2, \ldots, t_s;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \qquad (2)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, h).$$

Автор непосредственно вычисляет величины

$$P_\nu = -d\xi_\nu + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial \eta_\nu} + \sum_{i=1}^{r_\sigma} \Phi_{i\sigma} \frac{\partial K_{i\sigma}}{\partial \tau_{i\nu}} \right) dt_\sigma,$$

$$Q_\nu = d\eta_\nu + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial K_\sigma}{\partial \xi_\nu} + \sum_{i=1}^{r_\sigma} \Phi_{i\sigma} \frac{\partial K_{i\sigma}}{\partial \xi_\nu} \right) dt_\sigma,$$

где

$$K_\sigma = H_\sigma + \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial t_\sigma};$$

$$\Phi_{i\sigma} = F_{i\sigma}; \qquad K_{i\sigma} = H_{i\sigma},$$

и показывает, что в силу формул преобразования (2) и уравнений (1) P_ν и Q_ν исчезают, что и доказывает теорему.

При формулировке теоремы автор допускает неточность, именно:

в теореме говорится, что неопределенные множители определяются из уравнений

$$W_k = 0\ (k = 1, 2, \ldots, h), \qquad (3)$$

тогда как эти множители из одних лишь уравнений (3) не определяются, а могут быть найдены только из системы (2), содержащей Λ_k явно. Эта неточность затрудняет понимание теоремы. В. В. Добронравов

7719. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. Фельдбаум А. А., Автоматика и телемеханика, 1955, **16**, № 2, 129—149

7720. Линейные динамические системы. Шолохович Ф. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 249—257

Динамическую систему $f(t)p$, заданную в банаховом пространстве B, автор называет линейной, если выполняется условие

$$f(t)(p_1 + p_2) = f(t)p_1 + f(t)p_2,$$

где p_1, p_2 — произвольные точки пространства B и t — любое вещественное число. Важными примерами линейных динамических систем являются системы решений уравнения в частных производных гиперболического типа и интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \int_a^b k(x; s)\, \varphi(s, t) ds,$$

рассмотренные в соответствующих банаховых пространствах.

Работа состоит из трех параграфов. В первом рассматривается линейная динамическая система, порожденная сдвигами аргумента в некотором специальном банаховом пространстве функций, и устанавливается наличие в ней траектории различных типов, в частности, устойчивых по Пуассону, но не рекуррентных и рекуррентных, но не почти периодических.

Во втором параграфе изучаются линейные многообразия однотипных траекторий, а в третьем рассматривается вопрос о роли спектра бесконечно малого производящего оператора линейной динамической системы, т. е. оператора, определяемого равенством

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t},$$

причем предел понимается в смысле сильной сходимости в пространстве B (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы. М. Изд-во ин. лит., 1951).

М. Г. Грабарь

7721 К. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Еругин Н. П., Л., Ленингр. гос. ун-т, 1956, 108 стр. 3 р. 50 к.

Основная цель автора заключается в том, чтобы дать методы исследования линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами на основе результатов, полученных в аналитической теории дифференциальных уравнений по методу И. А. Лаппо-Данилевского.

В § 1 рассматриваются аналитические функции от одной матрицы A, а также функции матриц A, заданные степенными рядами от A, коэффициенты которых — функции инвариантов матрицы A. Исследуется вопрос о представлении этих функций полиномами от A. Дается простой способ построения таких полиномов наименьшей возможной степени при любой совокупности элементарных делителей. Здесь также отмечается важный факт, что коэффициенты полинома, представляющего указанные выше функции от A, являются симметрическими функциями от характеристических чисел матрицы A, что позволяет во многих случаях построить этот полином, минуя нахождение характеристических чисел матрицы A.

В § 2 излагаются понятия аналитических функций от нескольких матриц и от счетного числа матриц, а также указываются условия единственности разложений этих функций в степенные ряды.

В §§ 3 и 4 приводятся некоторые классы систем линейных дифференциальных уравнений, фундаментальная матрица решений которых находится в замкнутой форме.

В § 5 строится фундаментальная матрица решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений в виде ряда, равномерно сходящегося во всякой ограниченной области непрерывности коэффициентов.

В § 6 излагается проблема Пуанкаре—Лаппо-Данилевского из аналитической теории дифференциальных уравнений, которая заключается в следующем. Известно, что фундаментальная матрица решений матричного дифференциального уравнения

$$dX/dt = XP(z) \qquad (1)$$

с аналитической матрицей n-го порядка $P(z)$, имеющей в точке $z=a$ однозначную изолированную особенность, представима в виде

$$X(z) = (z-a)^W N(z-a), \qquad (2)$$

где $N(z-a)$ — однозначная в окрестности $z=a$ матрица, а W — постоянная матрица. Требуется для $X(z)$, нормированной в заданной неособой точке $z=b$, найти общее выражение матрицы W через параметры уравнения (1), т. е. через коэффициенты разложения матрицы $P(z)$ в ряд Лорана. Эти коэффициенты считаются произвольными, обеспечивающими лишь сходимость ряда Лорана. Эта проблема для случая, когда

$$P(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{z-a_j}, \qquad (3)$$

где U_j — постоянные матрицы, была решена И. А. Лаппо-Данилевским (Тр. Физ. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, отд. матем. VI, 1934), а в общем случае автором (Еругин Н. П., Матем. сб., 1938, 3 (45)). В работе приводятся результаты этих исследований. Отмечается, что в случае (3) W_j, соответствующие каждому из a_j, есть мероморфные функции $U_1, \ldots, U_m$. В общем же случае уравнения (1) W есть бесконечнозначная функция параметров этого уравнения. Для случая, когда $P(z)$ — матрица второго порядка, приводится вид этой функции.

В §§ 7—12 рассматривается матричное уравнение

$$dX/dt = XP(t) \qquad (4)$$

с вещественной непрерывной периодической матрицей $P(t)$, имеющей период 2π. Показывается, что фундаментальная матрица решении уравнения (4) имеет вид

$$X = e^{At} N(t),$$

где A — вещественная постоянная матрица, а $N(t)$ — вещественная периодическая матрица, имеющая период 2π или 4π. Приводятся способы нахождения матриц A и $N(t)$.

Устанавливается связь между проблемой нахождения матрицы A для уравнения (4) и матрицы W для уравнения (1). Именно, если в уравнении (4) матрица $P(t)$ представима в виде ряда Фурье, то замена независимой переменной $z=e^t$ приводит уравнение (4) к виду (1), матрица $P(z)$ которого имеет однозначную особенность в точке $z=0$ и представляется в виде ряда Лорана. Коэффициенты последнего легко выражаются через коэффициенты Фурье уравнения (4). Это позволяет перенести все результаты, полученные для уравнения (1) на уравнение (4). В частности, впервые получена возможность дать общее представление матрицы A через параметры уравнения (4).

На примере системы второго порядка выводятся условия ограниченности и периодичности решений уравнения (4).

В § 13 строится приближенно периодическое решение уравнения Матье. В. П. Басов

7722 Д. Линейные динамические системы в банаховом пространстве. Шолохович Ф. А., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1958

7723 Д. Некоторые вопросы общей теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. (Теоремы существования, единственности и краевая задача). Каменский Г. А., Автореф. дисск. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

7724. Общая конструкция фундаментальных решений уравнений с частными производными. Фантаппье (Costruzione generale delle soluzioni fondamentali delle equazioni a derivate parziali. Fantappié Luigi), Collect. math., 1957, **9**, № 1, 7—26 (итал.)

Рассматривается задача Коши для уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \sum a_{r_0 r_1 \ldots r_n} \frac{\partial^{r_0 + r_1 + \ldots + r_n} u}{\partial t^{r_0}\, \partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} = f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(r_0 + r_1 + \ldots + r_n \leqslant m;\ r_0 < m); \qquad \left(\frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right)_{t=\psi} = \varphi_r(x_1, \ldots, x_n)\ (r = 0, \ldots, m-1),$$

где поверхность $t=\psi(x_1, \ldots, x_n)$, несущая начальные данные, нигде не касается характеристических поверхностей. С помощью простого введения нового независимого переменного заданное уравнение приводится к форме, в которой все участвующие производные от u имеют порядок m. Далее в результате m-кратного интегрирования по t от $t=\psi$ задача преобразуется к интегро-дифференциальному уравнению, к которому применяется теория аналитических функционалов, разработанная автором в ряде предыдущих работ (см., в частности, Ann. mat. (4), 1943, 22). В терминах этой теории решение получается в весьма компактной символической форме, выраженным через операторы

$$If = \int_{\psi}^{t} f(\tau, x_1, \ldots, x_n)\, d\tau, \qquad B_\nu f = I\partial f/\partial x_\nu,$$

$$I_\alpha f = \int_{\psi}^{t} f(\tau, x_1 + \alpha_1(\tau - t), \ldots, x_n + \alpha_n(\tau - t))\, d\tau.$$

От этой формы возможно перейти к более обычной форме, содержащей кратные контурные интегралы в комплексных плоскостях. Особо разбирается более простой случай $\psi = \text{const}$. Эта методика дает возможность единообразно получать фундаментальные решения для указанных уравнений; так, для волнового уравнения здесь получается ядро запаздывающего потенциала и т. п. А. Д. Мышкис

7725. Связь между свойствами решений дифференциальных уравнений в частных производных и коэффициентами их разложения в степенные ряды. Крейсиг (Relations between properties of solutions of partial differential equations and the coefficients of their power series development. Kreyszig Erwin), J. Math. and Mech. 1957, **6**, № 3, 361—381 (англ.)

Уравнение

$$\Delta v + \alpha(x, y)\, v_x + \beta(x, y)\, v_y + \gamma(x, y)\, v = 0, \qquad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, а α, β и γ — заданные целые функции своих комплексных аргументов x, y, относительно переменных z, z^*:

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy$$

записывается в виде

$$u_{zz^*} + a(z, z^*)\, u_z + b(z\, z^*)\, u_{z^*} + c(z\, z^*)\, u = 0,$$

где

$$u(z, z^*) = v(x, y), \qquad a = \frac{1}{4}(\alpha + i\beta), \quad b = \frac{1}{4}(\alpha - i\beta),$$

$c = 1/4\ \gamma$, а всякое его, регулярное в окрестности начала, решение — $u(z, z^*)$ может быть разложено (в данной окрестности) в ряд:

$$u(z, z^*) = \sum_{m,\ n=0}^{\infty} u_{mn}\, z^m\, z^{*n}. \qquad (2)$$

В работе, оперируя известными формулами общего представления решений уравнения (1), исследуется связь между поведением решения $u(z, z^*)$ в плоскости zz^* и коэффициентами соответствующего разложения (2). В частности, в терминах коэффициентов (2) дается необходимое и достаточное условие того, чтобы у функции $u(z, z^*)$ было не более конечного числа особенностей (полюсов конечного порядка и логарифмических точек ветвления) относительно переменного z независимо от $z^* \neq 0$.

Указывается на возможность распространения результатов статьи на отдельные случаи трех переменных. Библ. 19 назв. М. Б. Гагуа

7726. Униформизация решения линейной аналитической задачи Коши вблизи многообразия, несущего данные Коши. Лере (Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy. Leray Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 18, 1483—1488 (франц.)

Пусть X—комплексно-аналитическое многообразие (комплексной) размерности l, состоящее из точек x с локальными координатами $(x_1, \ldots, x_l)$, а S—его комплексно-аналитическое подмногообразие размерности $l-1$, локально определяемое уравнением $s(x) = 0$, где $s(x)$—комплекснозначная аналитическая функция, причем $\partial s/\partial x_j$ на S не обращаются в 0 одновременно. В работе сформулировано несколько теорем о решении задачи Коши

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{j_1 + \cdots + j_l \leq m} a_{j_1 \ldots j_l}(x)\, \frac{\partial^j u(x)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_l^{j_l}} = v(x);$$

$$\left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^k u(x) = w_k(x) \quad (k = 0, \ldots, m-1) \text{ на } S.$$

Здесь коэффициенты оператора a и оператора b 1-го порядка, $v(x)$ и $w_k(x)$ — комплекснозначные аналитические функции (w_k определены на S). Предполагается, что из $s(x) = 0$ следует $h(x, \partial s/\partial x) \not\equiv 0$, где h — главная часть оператора a, и $b(x, \partial s/\partial x) \not\equiv 0$.

Решение $u(x)$ будет, вообще говоря, многозначной функцией от x. Указывается, что в окрестности S ее можно униформизировать, построив комплексно-аналитическое многообразие Φ размерности l, зависящее только от X, S и h, и определив однозначные аналитические функции $u = u[\varphi]$ и $x = x(\varphi)$ на Φ так, что функция $u = u(x)$ получается отсюда исключением φ. Ограничение отображения $x = x(\varphi)$ на прообраз S будет аналитическим гомеоморфизмом.

Униформизация строится с помощью решений гамильтоновой системы бихарактеристик. С помощью этой системы определяются также „характеристика K, касательная к S "над которой решение $u(x)$ разветвляется, и „исключительные точки" поверхности S. Как правило такие точки отсутствуют. В окрестности неисключительной точки функция $u(x)$ будет алгеброидной: существует полином $P(u, x)$ от u с коэффициентами, аналитически зависящими от x, и старшим коэффициентом 1, такой, что $P[u(x), x] \equiv 1$. Многообразие Φ будет при этом конечнолистным накрытием многообразия X, причем число листов равно степени полинома P.

Простейший тип неисключительной точки на S — нехарактеристическая точка ($h(x, \partial s/\partial x) \neq 0$). Для нее это число равно 1. В последней теореме описываются Φ, K и $u(x)$ для окрестности такой точки, для которой это число равно 2. М. С. Агранович

7727. Об уравнении с частными производными $\sum_{\omega=0}^{s} \sum_{r=0}^{\omega} A_{\omega r} z^r \frac{\partial^\omega u}{\partial x^{\omega - r} \partial z^r} = 0$, соответствующем производящей функции $u_{q,k} = [1 - x^q + (x - z)^q]^{-1/k}$. **Феррер-Фигерас** (Sobre la ecuación en derivadas parciales $\sum_{\omega=0}^{s} \sum_{r=0}^{\omega} A_{\omega r} z^r \frac{\partial^\omega u}{\partial x^{\omega - r} \partial z^r} = 0$ correspondiente a las funciones generatrices $u_{q,k} = [1 - x^q + (x - z)^q]^{-1/k}$. Ferrer Figueras Lorenzo), Collect. math., 1957, **9**, № 2, 77—85 (исп.)

При помощи непосредственного подсчета производных и анализа числа параметров показано, что функция $u_{q,k}(x, z)$ удовлетворяет уравнению указанного в заглавии вида (где коэффициенты $A_{\omega r}$ зависят от x), если q — натуральное, а $s > 2q - 3$. Очень много опечаток; в частности, следует иметь в виду, что p и k — одно и то же. А. Д. Мышкис

7728. О системе уравнений типа С. Л. Соболева. Лебедев В. И., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 215—216

7729. О существовании аналитических и неаналитических решений для дифференциальных уравнений в частных производных. Кокарева Т. А., Уч. зап. Марийск. гос. пед. ин-т, 1957, **12**, 11—34

Подробно исследуются вопросы существования и единственности аналитического и неаналитического решений дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^p z(x, y)}{\partial x^p} = \sum_{\gamma=0}^{r} A_\gamma(x)\, \frac{\partial^{\gamma+q} z(x, y)}{\partial x^\gamma \partial y^q} \quad (r < p)$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k z(0, y)}{\partial z^k} = \varphi_k(y) \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1),$$

частного случая ранее рассмотренной автором более общей задачи. (Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 1.) В статье имеются опечатки. С. А. Самедова

7730. Некоторое обобщение проблемы Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Плисс А., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, **4**, 733—736

Рассматривается следующее обобщение задачи Коши:

$$u^i_x = f^i\left(x, y_1, \ldots, y_n, u^i_{y_1}, \ldots, u^i_{y_n}\right),$$

$$u^i(u_i, y_1, \ldots, y_n) = \omega^i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где постоянные a_i и функции f^i, ω^i заданы; $|x| \leqslant \beta$; $-\infty < y_1, \ldots, y_n < \infty$. При соответствующих предположениях (тотальные условия Липшица, накладываемые на те или иные заданные функции и их производные, достаточная малость β) с помощью метода сжатых отображений доказаны теоремы о существовании и единственности ограниченного решения. Автор упоминает также о задаче, в которой начальные условия задаются на поверхностях $x = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n)$.

А. Д. Мышкис

7731. Начальная задача для линейных уравнений с частными производными и переменными коэффициентами. III. Сирота (The initial value problem for linear partial differential equations with variable coefficients. III. Shirota Taira), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 8, 457—461 (англ.)

Ч. I, II см. РЖМат, 1958, 6721, 6722.

Работа идейно тесно связана со статьей Лиона (РЖМат, 1957, 1414), однако здесь область определения основного оператора может зависеть от временного аргумента. Пусть Ω — область R^n, $\mathfrak{D}(\Omega)$ — пространство основных функций Шварца, V — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, для которого $\mathfrak{D}(\Omega) \subset V \subset L_2(\Omega)$, а включения $V(\Omega) \to V$ и $V \to L_2(\Omega)$ непрерывны. Пусть задана вещественная билинейная форма $((u, v))_t$ ($u \in V$, $v \in V$, $-\infty < t < \infty$), для которой при некоторых $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ $((u, u))_t \geqslant a \| u \|_V^2$; $b \| u \|_V \| v \|_V \geqslant |((u,v))_t|$; $c|t - t'| \| u \|_V \| v \|_V \geqslant |((u,v))_t - ((u,v))_{t'}|$. Пусть замкнутый оператор $\overline{A_t}$ в $L_2(\Omega)$ определен на всюду плотном множестве $D(\overline{A_t})$ соотношением $((f,v))_t = (\overline{A_t} f, v)_{L_2(\Omega)}$ ($v \in V$). Автор формулирует без доказательства теоремы о существовании и единственности решения операторного уравнения

$$(d/dt + \overline{A_t}) f(t) = g(t) \quad \text{(почти всюду)}$$

при соответствующих предположениях о g и f для $-\infty < t < \infty$ или $a \leqslant t \leqslant b$ (в последнем случае — при условии $f(a) = 0$). В качестве примера рассматриваются задача Фоккера — Планка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(b^{ij}(t,x)\,u) - \frac{\partial}{\partial x^i}(a^i(t,x)\,u) + g(t,x) \qquad \text{(в } \Omega\text{)},$$

$$b^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\cos(n,x^i) + \left(\frac{\partial b^{ij}}{\partial x^j} - a^i\right)\cos(n,x^i)\,u = 0 \quad \text{(на границе } \Omega\text{)}$$

и проблема диффузии.

А. Д. Мышкис

7732. Применения теории прямых интегралов пространства Гильберта к некоторым интегральным и дифференциальным операторам. Гординг (Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators. Gårding Lars. Lect. Ser. Inst. Fluid. Dynam. and Appl. Math., 1954, № 11, 23 pp.) (англ.)

Пусть σ — обычное пополнение вполне аддитивной меры, определенной на всех борелевских множествах прямой линии.

Пусть $\nu = \nu(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) — измеримая функция, принимающая целые положительные значения $1, 2, \ldots, \infty$. Рассмотрим вектор-функции

$$F(\lambda) = \{F_1(\lambda), F_2(\lambda), \ldots, F_{\nu(\lambda)}(\lambda)\}$$

с комплексно-значными компонентами. Определим скалярное произведение и норму:

$$(F, G) = \int F(\lambda)\,\overline{G(\lambda)}\,d\sigma(\lambda);\quad F(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)} = \sum_1^{\nu(\lambda)} F_k(\lambda)\,\overline{G_k(\lambda)} \quad (1)$$

$$\|F\| = (F, F)^{1/2}. \quad (2)$$

Обозначим через H^* пространство Гильберта с конечной нормой (2). При фиксированном λ $F(\lambda)$ есть элемент пространства Гильберта (последовательностей) H_λ^* размерности $\nu(\lambda)$.

Поэтому формально можно написать

$$H^* = \int H_\lambda^* d\sigma(\lambda). \quad (3)$$

Разложение (3) называется прямым интегралом.

Пусть теперь A — самосопряженный оператор, определенный в сепарабельном пространстве Гильберта H. В силу одной теоремы Неймана (Neumann J. von, Ann. Math., 1949, **50**, 404—438) существует унитарное отображение T пространства H на пространство H^* такое, что TAT^* является оператором умножения на λ: $F(\lambda) \to \lambda F(\lambda)$.

В работе даны два применения этой теоремы:

1) Пусть H — множество функций с интегрируемым квадратом модуля относительно положительной меры $\alpha(x)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,d\alpha(x)$$

(например, $\alpha(x)$ — мера Лебега в действительном n-мерном пространстве). Говорят, что оператор B, определенный на всюду плотном множестве в H, есть оператор Карлемана, если существует функция $b(x, y)$, измеримая относительно меры $\alpha * \alpha$ и такая, что:

а) $b(x) = \left\{\int |b(y, x)|^2\,d\alpha(y)\right\}^{1/2} < \infty$;

б) для почти всех x

$$Bf(x) = (Bf)(x) = \int f(y)\,\overline{b(y, x)}\,d\alpha(y),$$

если f из области определения оператора B.

Для этого случая доказана теорема: Существуют функции $E_k(\lambda, x)$, измеримые по мере $\sigma * \alpha$ и такие, что для любой функции $f \in H$

$$F_k(\lambda) = (Tf)_k(\lambda) = \int \overline{E_k(\lambda, x)}\,f(x)\,d\alpha(x) \quad (4)$$

и

$$f(x) = (T^*F)(x) = \int \left(\sum_1^{\nu(\lambda)} F_k(\lambda) E_k(\lambda, x)\right) d\sigma(\lambda). \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) дают обобщение интеграла Фурье.

2) Пусть S — область действительного n-мерного пространства и $r(x) > 0$ — дифференцируемая функция на S, H — пространство измеримых по Лебегу функций на S со скалярным произведением

$$(f, g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,r(x)\,dx.$$

Пусть L — линейный, эллиптический, формально самосопряженный дифференциальный оператор

$$Lf(x) = r(x)^{-1}\sum_{|\alpha| \leqslant m} L_\alpha(x)\,D^\alpha f(x)$$

$$\left(D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\right).$$

Обозначим через A самосопряженные расширения S (если они существуют). Доказывается, что если $k>n/2m$, то $(A+i)^{-k}$ задается ядром Карлемана. Это обстоятельство позволяет применить к оператору L формулы (4) и (5), при этом функции $E_k(\lambda, x)$ можно предполагать m раз дифференцируемыми по x и удовлетворяющими дифференциальному уравнению

$$LE_k(\lambda, x) = \lambda E_k(\lambda, x).$$

В доказательствах используется существование локального фундаментального решения для эллиптического оператора. Б. М. Левитан

7733. Характеристика положительных производящих ядер. Применение к функциям Грина. Ароншайн, Смит (Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions. Aronszajn N., Smith K. T.), Amer. J. Math., 1957, 79, № 3, 611—622 (англ.)

Рассматриваются необходимые и достаточные условия положительности производящих ядер собственных функциональных гильбертовых пространств. Абстрактная теорема лежит в основе результатов о положительности функций Грина.

Собственным функциональным гильбертовым пространством называется пространство, элементы которого суть функции (вообще говоря, комплексные), заданные на множестве E и притом такие, что значение функции в любой точке E есть непрерывный линейный функционал. Каждому такому пространству F соответствует функция $K(x, y)$, называемая производящим ядром F, определенная на $E\times E$ и такая, что для каждого $y\in E$, $K(x, y)\in F$, а для каждого $u\in F$ $u(y) = (u, K(x, y))$.

Доказывается основная теорема: Для того чтобы производящее ядро $K(x, y)$ было неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия: а) если $u\in F$, то $\bar{u}\in F$ и $\|\bar{u}\| = \|u\|$ ($\bar{u}$ — функция, комплексно-сопряженная с u); б) для любой вещественной $u\in F$ существует функция $\tilde{u}\in F$ такая, что $\tilde{u}(x)\geqslant |u(x)|$ для всех $x\in F$ и $\|\tilde{u}\|\leqslant\|u\|$.

Условие а) теоремы необходимо и достаточно, чтобы $K(x, y)$ было вещественным (Aronszajn N., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 337—404).

Функциональные пространства, используемые при решении уравнений в частных производных, являются собственными гильбертовыми пространствами только для задач достаточно высокого порядка. Для задач меньшего порядка вводятся понятия псевдопроизводящего ядра и μ-измеримого пространства. Гильбертово пространство F функций, определенных на классе E' μ-измеримых подмножеств множества E, называется μ-измеримым, если функции из F не определены лишь на множестве меры нуль и интегрируемы по каждому $x'\in E'$ и если из $\|u\|\neq 0$ следует, что $\int_{x'} u d\mu\neq 0$ для некоторого $x'\in E'$.

Если, далее, $K'(x', y')$ есть производящее ядро собственного гильбертова пространства F', элементы которого $u'(x') = \int_{x'} u d\mu$ заданы на E', и $K'(x', y') = \int_{x'}\int_{y'} K(x, y)\, d\mu(y)\, d\mu(x)$, то $K(x, y)$ называется псевдопроизводящим ядром пространства F.

Основная теорема без труда распространяется и на псевдопроизводящие ядра.

Если мера μ и $K(x, y)$ заданы, то необходимым и достаточным условием того, чтобы $K(x, y)$ было псевдопроизводящим ядром, является положительность матрицы $K'(x_i', x_j')$ на E'. Пространство F в этом случае будет замыканием линеала функций

$u = Kf = \int_E K(x, y) f(y)\, d\mu(y)$ по норме $\|u\|^2 =$

$= \int_E Kf(x)\overline{f}(x)\, d\mu(x)$ (здесь $f(x) = \sum\alpha_i\chi_{x_i'}$,

$\chi_{x_i'}$ — характеристические функции множеств x_i').

Нетрудно видеть, что функция Грина для линейного эллиптического самосопряженного по Лагранжу оператора A является псевдопроизводящим ядром пространства с нормой $\|u\|^2 = \int Au(x)\bar{u}(x)\, dx$, если A — положительно определенный оператор. Основная теорема дает поэтому необходимые и достаточные условия неотрицательности функции Грина. В частности, для уравнений 2-го порядка оказывается возможным положить $\tilde{u} = |u|$ и доказать, что для существования неотрицательной функции Грина необходимо и достаточно, чтобы оператор уравнения был положительно определенным. Для уравнений 4-го порядка, как показал пример, построенный Гарабедианом, положительной определенности, в общем случае, недостаточно. Авторы выделяют широкий класс уравнений 4-го порядка, имеющих неотрицательные функции Грина. Е. Д. Гарбер

7734. Гипергруппы и операторы перестановочности и сверхперестановочности (трансмутации). Дельсарт (Hypergroupes et opérateurs de permutation et de transmutation. Delsarte Jean), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 71, Paris, 1956, 29—44. Discuss. 44—45 (франц.)

Автор называет гипергруппами то, что раньше он называл операторами обобщенного сдвига. В основе работы лежит следующее замечание: Пусть G—топологическая группа и $\mathfrak{A}$—некоторая компактная группа автоморфизмов группы G. Обозначим через da меру Хаара на $\mathfrak{A}$ и пусть эта мера нормирована так, что полная мера группы $\mathfrak{A}$ равна 1. Пусть $f(t)$, $t\in G$— произвольная комплекснозначная функция, определенная на G. Определим операторы T^s равенством

$$T^s_t(f) = \int_{\mathfrak{A}} f[t.a(s)]\, da,$$

где (as) есть отображение элемента $s\in G$ с помощью автоморфизма $a\in\mathfrak{A}$. Легко проверить, что операторы T^s удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига. При этом для любой функции $f(t)$

$$T^s{}_t(f)|_{s=e} = f(t), \qquad (2)$$

где e — единица группы G.

Равенство (2) означает, что e является верхним нейтральным элементом для семейства T^s. На функциях, удовлетворяющих условию

$$f[(as)] = f(s),$$

т. е. постоянных на классах смежности $G/\mathfrak{A}$, элемент e является также нижним нейтральным элементом, т. е.

$$T_t{}^s(f)|_{t=e} = f(s).$$

Например, если G — числовая ось с обычной топологией и группа $\mathfrak{A}$ состоит из двух элементов —тождественно автоморфизма и автоморфизма симметрии $s\to -s$, то по формуле (1)

$$T_t{}^s(f) = \tfrac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)]. \qquad (3)$$

Если G — группа Ли, то можно перечести автоморфизмы и группы на алгебру Ли. Пользуясь этим, автор получает для обобщенных сдвигов, определенных по формуле (1), аналог первой прямой теоремы Ли.

Существует конечное число дифференциальных операторов X_α и $\overline{X}_\alpha$ таких, что функция $u(s,t)=T_t^s(f)$, определенная по формуле (1), удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$X_{\alpha t}u=\overline{X}_{\alpha s}u. \qquad (4)$$

Если T^s есть сдвиг на группе (т. е. группа $\mathfrak{A}$ состоит из одного элемента — тождественного автоморфизма), то операторы X_α и $\overline{X}_\alpha$ суть инфинизимальные операторы группы G и, следовательно, являются дифференциальными операторами первого порядка.

В этом случае система (4) в существенном совпадает с содержанием первой прямой теоремы Ли. В более сложных случаях операторы X_α и $\overline{X}_\alpha$ (по крайней мере один из каждого семейства) выше первого порядка. Например для операторов (3) имеется лишь один инфинизимальный оператор $X=\overline{X}=d^2/dt^2$.

Система (4) может быть получена независимо от формулы (1) с помощью непосредственного рассмотрения автоморфизмов алгебры Ли. При этом соответствующая группа автоморфизмов может оказаться некомпактной, так что формула (1) может не иметь смысла.

В конце работы рассмотрено три примера:

1. $G=Gl(2)$ есть полная линейная группа второго порядка, $\mathfrak{A}$ — группа внутренних автоморфизмов (некомпактная) группы G.

2. $G=Gl(2)$. $\mathfrak{A}$ — подгруппа внутренних автоморфизмов, получаемая при преобразовании элемента группы G ортогональными матрицами второго порядка $O(2)$.

3. G — группа неособых треугольных матриц A четвертого порядка. $\mathfrak{A}$ — группа внутренних автоморфизмов группы G, получаемая с помощью преобразования матрицы A матрицей вида

$$X=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z & x \end{vmatrix}$$

Для этих трех случаев вычислены операторы X_α и $\overline{X}_\alpha$.

Б. М. Левитан

7735. По поводу аналитических решений уравнения обобщенных потенциалов. Хайман (Concerning analytic solutions of the generalized potential equation. Hyman Morton A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 4, 408—413, Indagationes math., 1954, **16**, № 4, 408—413 (англ.)

Обозначим через R двумерную область плоскости переменных (x, y), содержащую внутри сегмент I вещественной оси.

Пользуясь разложением в ряд вида

$$F(x,y)=F_0(x)+F_1(x)y+F_2(x)\,y^2+\ldots,$$

где $\{F_i\}$ — аналитические функции, автор показывает, что регулярное решение $F(x,y)$ уравнения $F_{xx}+F_{yy}+py^{-1}=0$, где p — вещественная постоянная, при $p\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$ единственным образом определяется своим значением $F_0(x)$ на сегменте I.

А. В. Бицадзе

7736. Теория регулируемых систем с переменной во времени регулировочной мощностью. Людвиг, Рольник (Theorie von Regelsystemen mit zeitlich variabler Regelstärke. Ludwig G., Rollnik H.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 11-12, 457—470 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается регулируемая система, для которой регулировочная мощность (закон регулирования) специальным образом зависит от времени и приводит эту систему за конечное время в требуемое окончательное состояние. Математическая задача состоит в исследовании при $-\infty<t<0$ решений дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)t\,\varepsilon(t)+Q\left(\frac{d}{dt}\right)\varepsilon(t)=0,$$

где P и Q — многочлены с постоянными коэффициентами (схема метода описана и для случая, когда P и Q — любые целые функции). Решение подробно изучается, если степень n многочлена P больше степени Q, многочлен P имеет только простые корни λ_μ в которых вычеты $a_{-1}^{(\mu)}$ функции Q/P нецелые. С помощью комплексного преобразования Лапласа получается:

$$\varepsilon(t)=\int_C e^{tz}\prod_{\mu=1}^{n}(z-\lambda_\mu)^{a_{-1}^{(\mu)}}dz,$$

где C — соответственно подобранный контур в комплексной плоскости. Отсюда выводятся асимптотическое представление решения и простой признак его устойчивости при $t\to-\infty$, а также разложение решения в ряд при малых t. Асимптотическое представление при наличии у P кратных корней разобрано только при $Q=q_0+q_1z$, $P=p_2z^2$ и $Q=q_0+q_1z+q_2z^2$, $P=p_2z^2+p_3z^3$. Приложения и обобщения полученных результатов будут даны в другой работе. Фиг. 4 перевернута.

А. Д. Мышкис

7737. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Березанский Ю. М., Матем. сб., 1957, **43**, № 1, 75—126

В работе дан новый метод вывода формулы разложения по собственным функциям (в общем случае обобщенным) самосопряженного оператора, определенного в пространстве функций.

Основная идея работы очень проста и состоит в следующем:

В пространстве последовательностей всякий ограниченный оператор задается матрицей. В самом деле, если

$$f=\sum_i f_ie_i, \qquad g=\sum_k g_ke_k, \qquad (1)$$

то $(Af,g)=\sum_{i,k}(Ae_i,e_k)f_i\overline{g}_k$ и, следовательно, оператор A определяется матрицей $a_{ik}=(Ae_i,e_k)$. Если теперь A — самосопряженный оператор в пространстве последовательностей и E_λ разложение единицы для A, то E_λ определяется матрицей. Поэтому спектральное разложение для A можно записать в виде

$$(Af,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d_\lambda\left(\sum_{i,k}e_{ik}(\lambda)f_i\overline{g}_k\right). \qquad (2)$$

В случае пространства функций формулы (1) формально также можно написать, однако в этом случае роль единичных векторов e_i играют δ-функции, сосредоточенные в различных точках пространства. Эти функции не имеют интегрируемого квадрата и, следовательно, не принадлежат пространству Гильберта.

Поэтому формула (2) непосредственно не имеет смысла. Если, однако, в формальном аналоге формулы (2) проинтегрировать достаточное число раз по частям, то эта формула приобретает смысл и в результате получается разложение оператора по обобщенным собственным функциям и аналог равенства Парсеваля. Для эллиптического оператора отсюда, с помощью приема, неоднократно применявшегося уже другими авторами, получается разложение по обычным собственным функциям.

Кроме метода, в работе содержится много новых результатов. В частности, для эллиптических операторов даны оценки поведения собственных функций на бесконечности. Б. М. Левитан

7738. О линейных уравнениях с частными производными эллиптического типа. Чиммино (Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico. Cimmino Gianfranco), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1952 (1953), **23**, 183—203 (итал.; рез. англ.)

Обзор общего метода доказательства теорем существования решения линейных краевых задач для некоторых классов эллиптических уравнений. Этот метод, применимый и для приближенного решения этих задач, подробно изложен для задачи

$$\Delta u = f(x, y), \quad u|_{FD} = \varphi(x, y) \quad (f \in L_2(D), \quad \varphi \in L_2(FD))$$

в плоской области D с достаточно гладкой границей FD. Он состоит в выборе последовательности полиномов $u_n(x,y)$, для которых

$$\iint_D (\Delta u_n - f)^2 dx\, dy + \int_{FD} (u_n - \varphi)^2 ds \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

(возможность этого выбора показана). Тогда последовательность u_n сходится к искомому решению. Это решение является обобщенным, удовлетворяя уравнению почти всюду (причем первые производные абсолютно непрерывны), а граничному условию — в среднем по контурам, параллельным FD и приближающимся к FD. Исследование основано на применении гильбертова пространства пар функций $(f(A), \varphi(B))$ $(A \in D, B \in FD)$ со скалярным произведением $\iint_D f_1 f_2\, dx\, dy + \int_{FD} \varphi_1 \varphi_2\, ds$.

Доказана также единственность этого обобщенного решения. Кратко освещаются результаты работ автора, Пини и Цвирнера, в которых этот метод применен к линейному эллиптическому уравнению второго порядка на плоскости, к задаче Неймана и смешанной задаче, к бигармоническому уравнению, к краевой задаче для аналитической функции и т. д. К расширению возможностей метода приводит также введение веса в интеграле, стремление к нулю которого является граничным условием.

Замеченные опечатки: на стр. 186, 15 строка сверху, надо поменять местами числитель и знаменатель; в формуле (38) должно быть $\bar{u}_n{}^2$ вместо $\bar{u}_n{}^3$. Библ 15 назв. А. Д. Мышкис

7739. Характеристика эллиптических дифференциальных операторов с максимальной областью определения. Бирман М. Ш., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 177—183 (рез. англ.)

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном пространстве,

$$p = a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\cdots)}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial(\cdots)}{\partial x_i} + c \cdot (\cdots)$$

—дифференциальный оператор эллиптического типа

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых функций, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого компакта, целиком лежащего в Ω.

Дифференциальный оператор q, сопряженный по Лагранжу с p на этом множестве, определяет в L_2 некоторый оператор Q_0. Оператор $P = Q^*{}_0$ называется максимальным оператором, порожденным p.

Используя известные оценки О. А. Ладыженской нормы в пространстве $W^2{}_2$ решения эллиптического уравнения через норму в L_2 свободного члена, автор показал, что оператор P является замыканием в $L_2(\Omega)$ оператора, порожденного дифференциальным оператором p на множестве $C^\infty(\Omega)$.

В случае достаточно гладких коэффициентов устанавливается, что в множестве U решений уравнения $Pu = 0$ множество $C^2(\bar{\Omega}) \cap U$ плотно в смысле метрики $L_2(\Omega)$.

В работе указано, что без каких-либо изменений в схеме рассуждений можно доказать аналогичные теоремы и для сильно эллиптических систем. В. М. Бабич

7740. Теорема единственности для продолжения решений эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных и неравенства второго порядка. Ароншайн (A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. Aronszajn N.), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 3, 235—249 (англ.)

Пусть измеримая функция u определена на области D n-мерного евклидова пространства E_n. Если для точки $x_0 \in D$ выполняется соотношение

$$\int_{|x - x_0| < r} |u|^p dx = O(r^{p\alpha + n}),$$

то точка x_0 называется нулем функции $u(x)$ порядка $\alpha > 0$ в смысле p. Если соотношение имеет место при любом $\alpha > 0$, то x_0 есть ноль бесконечного порядка. Пусть $A(u)$ — линейный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, главная часть которого имеет дважды непрерывно дифференцируемые коэф. фициенты, удовлетворяющие условию Липшица (остальные коэффициенты измеримы и ограничены). Теорема. Если $u \in W^2{}_2(D)$ удовлетворяет неравенству

$$|A(u)| \leqslant M \left[\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + |u|^2 \right],$$

где M — положительная постоянная, и если в некоторой точке $x_0 \in D$ функция имеет нуль бесконечного порядка при $p = 1$, то $u(x) \equiv 0$.

Теорема доказывается для функций, заданных также и на достаточно гладких многообразиях. В качестве приложения может быть получена теорема единственности решения задачи Коши для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Пусть граница области D из класса $C^{(4,1)}$ (четвертые производные удовлетворяют условию Липшица). Рассматривается уравнение

$$\mathrm{Det}\{\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j\} = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Рассматриваются решения этого уравнения, для которых матрица $\{\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j\}$ определенно-положительная или определенно-отрицательная.

Формулируется следующее утверждение: Если два решения $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат классу $C^{(4,1)}$ на части границы D, $u = v$; $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n}$, то $u = v$ везде в области D.

Указывается, что основной результат может быть распространен на системы вида

$$|Au_k| < M\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right|^2 + |u_l|^2\right) (k = 1, \ldots, m).$$

А. И. Кошелев

7741. Новый взгляд на первую краевую задачу. Дуб (A new look at the first boundary-value problem. Doob J. L.), Appl. Probability. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., 1957, 21—33 (англ.)

Излагается стохастический подход к первой краевой задаче (задаче Дирихле) в ее абстрактной постановке; работа содержит очень полезное обоснование этого подхода и формулировку основных утверждений, тогда как доказательства автор обещает привести в другом месте. Пусть множество R открыто в компактном метрическом пространстве $R \cup R'$ ($R \cap R' = \Delta$; штрихом обозначается граница). Пусть некоторые открытые множества, содержащиеся в R вместе со своим замыканием, объявлены регулярными, причем каждое открытое $H \subseteq R$ является объединением монотонной последовательности регулярных множеств, содержащихся в H вместе со своим замыканием. Пусть для любого регулярного D и для любого $z \in D$ задана мера $\mu(z; D, \cdot)$ борелевских подмножеств D', причем $\mu(z, D, D') = 1$ и выполняются некоторые естественные требования, из которых мы отметим только, что если функция f непрерывна на D', то функция

$$u(z) = \int_{D'} f(\zeta)\,\mu(z, D, d\zeta) \qquad (1)$$

принимает на D' граничные значения f (в обычном смысле), а если от f требовать только борелевость, то функция u регулярна на каждом открытом множестве, где она конечна. При этом u называется регулярной в некотором открытом множестве. $H \supseteq R$, если она непрерывна в H и для любого регулярного D ($D \cup D' \supseteq H$) имеет место формула (1), в которой f заменено на u. Если считать регулярные функции обобщением гармонических, то можно естественно ввести субрегулярные функции и построить аналог метода Перрона решения первой краевой задачи. Функция f, определенная на R', называется резолютивной, если этот метод приводит к определенной регулярной функции u_f (т. е. когда верхняя грань нижних функций совпадает с нижней гранью верхних функций). Возникают задачи о представлении u_f в виде (1) (где D надо заменить на R), о характеристике класса резолютивных функций и о характере приближения u_f к f. Для гармонических функций в области с гладкой границей основную роль играют некасательные приближения к границе, но как быть в общем случае? Для этого фиксируется некоторая последовательность регулярных областей $R_1 \subseteq R_1 \cup R'_1 \subseteq R_2 \subseteq R_2 \cup R'_2 \subseteq R_3 \subseteq \ldots$; $R = \bigcup_1^\infty R_n$; после этого для любой точки $z_0 \in R$ строится случайная последовательность $\omega_{z_0} = (z_1, z_2, \ldots)$ так, что $z_1 = \ldots = z_{N-1} = z_0$ (где $N = \min\{n \mid z_0 \in R_n\}$), $z_N \in R'_N$ с плотностью вероятности $\mu(z_0, R_N, \cdot)$, $z_{N+1} \in R'_{N+1}$ с плотностью $\mu(z_N, R_{N+1}, \cdot)$ и т. д.

Выделяются классы субрегулярных и регулярных функций u, для которых при любом $z_0 \in R$ существует предел $x(z_0) = \lim u(z_n)$ вдоль почти всех путей ω_{z_0}. Так будет, в частности, если регулярная функция u равномерно суммируема на всех R_n по мере $\mu(z, R_n, \cdot)$ при любом z, причем тогда $u(z_0) = \mathrm{E}\{x(z_0)\}$. Если функция f, определенная на R', резолютивна, то $f(R(\omega)) = \lim\limits_{n\to\infty} u(z_n)$ для почти всех ω, где $R(\omega)$ — совокупность предельных точек ω; при этом $u(z_0) = \mathrm{E}\{f[R(\omega_{z_0})]\}$. Далее обобщается метод Перрона так, что граничное неравенство, входящее в определение верхних и нижних функций, считается выполненным при любом z_0 для почти всех путей ω_{z_0}. При этом класс резолютивных функций f расширяется, а соответствующие решения u_f допускают представления вида (1) (при $D = R$). Основные результаты и методы переносятся и на тот случай, когда R' вообще не рассматривается, а граничное условие задается некоторой функцией $x(z)$ ($z \in R$) или даже функцией путей (т. е. случайной функцией $x(z)$, $z \in R$) при определенных предположениях. Указана связь данной работы с исследованиями Брело и Шоке по уточнению понятия границы (подобными вопросами занимался также референт в ряде работ 1946—1950 гг.) для уравнения Лапласа и автора (РЖМат, 1957, 664, 1454), связанными и с уравнениями Лапласа и теплопроводности.

А. Д. Мышкис

7742. Об одной краевой задаче. Хуснутдинова Н. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 45—48

Ищется решение уравнения Лапласа

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

удовлетворяющее на границе круга $\rho = R$ условию

$$\lim_{\rho\to R}\int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi)\,\Phi(\varphi)\,d\varphi = (-1)^n\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\frac{d^n\Phi(\varphi)}{d\varphi^n}\,d\varphi,$$

где $g(\varphi)$ — суммируемая функция,

$$u\,\frac{d^i g(0)}{d\varphi^i} = \frac{d^i g(2\pi)}{d\varphi^i} \quad (i = \overline{0, n}),$$

а $\Phi(\varphi)$ — произвольная n раз непрерывно дифференцируемая периодическая функция.

Доказывается, что решение может быть представлено в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{\varphi'}^{(n)}(\rho, \varphi, \varphi')\,g(\varphi')\,d\varphi',$$

где $K_{\varphi'}^{(n)}(\rho, \varphi, \varphi')$ — n-я производная ядра Пуассона $K(\rho, \varphi, \varphi') = (R^2 - \rho^2)/r^2$.

Н. И. Мозжерова

7743. О решениях уравнения $\Delta u = f(u)$ Келлер (On solutions of $\Delta u = f(u)$. Keller J. B.), Communs Pure and Appl. Math., 1957, **10**, № 4, 503—510 (англ.)

Вещественная непрерывная функция $f(u)$ ($-\infty < u < \infty$) объявляется удовлетворяющей условию роста G, если существует функция $h'(u) \geqslant 0$ такая, что $f(u) \geqslant h'(u)$ и

$$\int_0^\infty\left[\int_0^x h'(z)\,dz\right]^{-1/2} dx < \infty.$$

Пусть D — конечная или бесконечная область n-мерного евклидова пространства с границей S и пусть $u(P)$, $P \in D$ — решение уравнения $\Delta u = f(u)$ (1) (Δ — лапласиан). Большая часть статьи посвящена доказательству теоремы 1:

Пусть $f(u)$ удовлетворяет условию G. Тогда существует убывающая функция $g(R)$, $(0 < R < \infty)$, $g(0) = \infty$, $g(\infty) = -\infty$, определяемая только функцией $h'(u)$, такая, что для всякого решения $u(P)$ непрерывного на S, имеет место $u(P) < g[R(P)]$, где $R(P)$ расстояние точки до границы S.

На основании теоремы 1 доказываются также

Теорема 2. Если $f(u)$ удовлетворяет условию G, то не существует целых (т. е. регулярных во всем пространстве) решений уравнения (1).

Теорема 3. Если $f(u)$ — неубывающая и удовлетворяет условию G, то для всякой ограниченной области D существует решение, стремящееся к $+\infty$ при приближении к S.

Кроме того, доказывается

Теорема 4. Пусть $f(u)$ — вещественная непрерывная функция ($-\infty < u < \infty$). Тогда (1) имеет целое (регулярное во всем пространстве) сферически симметричное решение $u(P)$ в том и только в том случае, когда выполнено одно (и только одно) из следующих условий: а) $f(u_1) = 0$ для некоторого u_1; б) $f(u) > 0$

$$(-\infty < u < \infty),\ \int_{u_0}^{\infty} F^{-1/2}(z)\,dz < \infty;\ \text{в)}\ f(u) < 0$$

$$(-\infty < u < \infty),\ \int_{-\infty}^{u_0} F^{-1/2}(z)\,dz < \infty,$$

где

$$F(z) = \int_{u_0}^{z} f(t)\,dt.$$

Х. Л. Смолицкий

7744. Об ограниченности эллиптических операторов в частных производных в норме L_2. Шектер (On estimating elliptic partial differential operators in the L_2 norm. Schechter Martin), Amer. J. Math., 1957, 79, № 2, 431—443 (англ.)

Внутри n-мерной области G с достаточно гладкой границей B рассматривается дифференциальный оператор с непрерывными комплексными коэффициентами порядка m

$$A = \sum_{|\mu| \leqslant m} a_\mu D^\mu,\ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n);\ \mu_k \geqslant 0,$$

$$D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k} \text{ и } D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}.$$

Пусть $C^r(G)$—класс бесконечно дифференцируемых комплекснозначимых функций, определенных внутри G, частные производные которых порядка меньше r обращаются в нуль на границе B. Оператор A — эллиптический, т. е. многочлен

$$\sum_{|\mu| = m} a_\mu \xi^\mu \neq 0$$

для любых действительных векторов $\xi \neq 0$ в любой точке G.

Теорема. Если $n > 2$, то для того чтобы выполнялось для любой $u \in C^r(G)$ неравенство

$$\|u\|_m^2 \leqslant K(\|Au\|^2 + \|u\|^2) \qquad (1)$$

($\|u\|$ — норма в L_2 и $\|u\|_m = \sum_{t \leqslant m} \sum_{|\mu| = t} \|D^\mu u\|$),

необходимо и достаточно, чтобы A был эллиптическим оператором и $m \leqslant 2r$.

Аналогичная теорема справедлива при $n = 2$ в случае вещественности a_μ. Неравенство (1) для первой краевой задачи было получено О. В. Гусевой (РЖМат, 1956, 3018) при вещественных a_μ. Автор рассматривает комплексные корни ξ_n уравнения $\sum a_\mu \xi^\mu = 0$. Число корней с положительными мнимыми частями обозначается через p_1, с отрицательными через p_2. Пусть $q = \max(p_1, p_2)$. Неравенство (1) справедливо тогда и только тогда, когда A эллиптичен и $q \leqslant r$.

Автор указывает, что при $n > 2$ порядок m будет четным. Теоремы доказываются сначала с помощью преобразования Фурье для постоянных коэффициентов и частного вида областей. А. И. Кошелев

7745. Продолжение бигармонических функций зеркальным отображением. Даффин (Continuation of biharmonic functions by reflection. Duffin R. J.), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 313—324 (англ.)

Пусть E^* — такое открытое множество, что если $(x, y, z) \in E^*$, то $(-x, y, z) \in E^*$, и E — пересечение E^* с полупространством $x > 0$. Пусть $w(x, y, z)$ бигармонична, т. е. удовлетворяет уравнению $\Delta^2 w = 0$, в E, и $w/x \to 0$ при $x \to 0$. Доказано, что функция w может быть продолжена на E^* так, что будет бигармонической всюду в E^*, по формуле

$$w(-x, y, z) = -w(x, y, z) + 2x\frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z) - x^2 \Delta w(x, y, z). \qquad (1)$$

Аналогичный результат получен для случая, когда продолжение осуществляется через сферическую поверхность радиуса R из внутренней области во внешнюю. Здесь формула имеет вид

$$w(p') = \frac{R}{r}\left[w(p) - \frac{(R^2 - r^2)^3}{4R^2}\Delta\frac{w(p)}{R^2 - r^2}\right],$$

где точки p и p' сопряжены относительно сферы r — расстояние между p и центром этой сферы.

Кроме того, изучается продолжение из области E бигармонической функции, удовлетворяющей другим граничным условиям на $x = 0$, а также совместное продолжение гармонических и бигармонических функций, описывающих один случай движения вязкой несжимаемой жидкости. Отметим, что в плоском случае формула (1) получена в работе Порицкого (Poritsky H., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 59, 248—279). Ю. А. Шашкин

7746. К вопросу об обратной задаче теории потенциала. Шашкин Ю. А., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 1, 45—46

В обратной задаче потенциала требуется найти форму односвязной области, зная плотность (постоянную) вещества, ее заполняющего, и внешний потенциал. Работа посвящена вопросу об изменении области при изменении заданной плотности и постоянстве внешнего потенциала.

Доказана следующая теорема, справедливая как в плоскости, так и в пространстве:

Пусть области D_1 и D_2 звездные относительно полюса 0, заполнены веществом с постоянными плотностями $\mu_1 > \mu_2 > 0$. Если при этом внешние потенциалы областей тождественно равны, то $D_1 \subset D_2$. В плоском случае, при некоторых ограничениях (аналитичность границы D_1 и достаточная близость D_2 к D_1) аналогичное предложение устанавливается и для переменных плотностей: если $\mu_1(x, y) < \mu_2(x, y)$ при одинаковых внешних потенциалах, то $D_1 \subset D_2$.

Доказательства основываются на применении леммы П. С. Новикова об ортогональности ко всякой гармонической функции плотности (переменной) тела, внешний потенциал которого равен нулю. В. К. Иванов

7747. О решениях линейного уравнения в частных производных второго порядка в гиперболической области с изолированной параболической точкой. Толле (Über Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen. II. Ordnung in einem hyperbolischen

Gebiet mit einem isolierten parabolischen Punkt. Tolle Henning), Math. Nachr., 1957, 16, № 2, 100—116 (нем.)

Линейное уравнение

$$(Au_x + Bu_y)_x + (Bu_x + Cu_y)_y + Pu_x + Qu_y + Fu + G = 0 \quad (1)$$

рассматривается в области D при следующих условиях: а) $K^2 = B^2 - AC > 0$ в D, кроме точки $O \in D$, в которой $K = 0$; б) характеристики уравнения (1) в D являются координатными линиями полярной системы координат (r,φ) с центром в точке O (начале координат), т. е. в

$$D: A = -C = \mp K 2xy/(x^2+y^2);$$
$$B = \mp K(x^2-y^2)/(x^2+y^2). \quad (2)$$

В области D_1, ограниченной характеристиками $\varphi = \varphi_1$; $\varphi = \varphi_2$; $r = r_1$ такой, что $\bar{D}_1 \subset D_2$, причем $D_2 = D_1 \cap$ спектр: $|\varphi| < \pi/2$; $r < r_m$, где r_m подчинено некоторым условиям, ищется решение $u(x,y)$ уравнения (1), принимающее заданные значения $u = u_0(r)$ на характеристике $\varphi = \varphi_0 (\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2)$. Доказывается, что если коэффициенты уравнения (1) в D_2 представимы в виде:

$$K^2 = r^\nu [1 + br^{k_0} + r^{k_1} f(x,y)];\ yP - xQ = r^{\nu+p+1} g_P(x,y);$$

$$xP + yQ = r^{\nu+q} g_Q(x,y);\ P_x - Q_y - F = r^{\nu+t-1} h_R(x,y);$$

$$G = r^{\nu+s-1} h_s(x,y),$$

при постоянных b; k_0, p, t, s, $\nu > 0$; $k_1, q > 1$; h_R и h_s непрерывных, g_P и g_Q однажды, а f' — дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{D}_2$, и если $u_0(r)$ непрерывно дифференцируема, а $u'_0(0) = 0$, то для достаточно малых r_1, в D_1 существует единственное, непрерывно дифференцируемое в $\bar{D}_1$ обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u|_{\varphi=\varphi_0} = u_0(r)$. Обобщенное решение задачи определяется как непрерывно дифференцируемая в $\bar{D}_1$ функция, удовлетворяющая интегральному равенству, полученному интегрированием уравнения (1) на области D_1 и применением формулы Гаусса—Остроградского.

Как и в работах Хака и Хельвига (РЖМат, 1955, 1769; 1957, 4014), идея доказательства теоремы существования состоит в том, что после преобразования этого интегрального равенства к интегральному уравнению Вольтерра, в плоскости (r,φ) решение задачи находится методом последовательных приближений, сходимость которого для самого решения и для его первых производных устанавливается для достаточно малых r_m. Автор указывает, что несколько обобщив метод доказательства, можно получить аналогичные результаты для уравнения (1), в котором коэффициенты A, B и C удовлетворяют условию (2) лишь в сколь угодно малой окрестности точки O. И. Л. Кароль

7748. К вопросу о решении задачи Коши для гиперболических линейных систем.Острецов Б. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 197—204

Задача Коши для линейной гиперболической системы

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_0,\ldots,k_n} A_{ij}^{k_0,\ldots,k_n}(t) \frac{\partial^{k_0+\ldots+k_n} u_s}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

$$(i = 1,\ldots,m;\ 0 \leqslant k_0 + \ldots + k_n \leqslant n_j;\ k_0 < n_j),$$

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_i^k(x_1,\ldots,x_n) \quad (k = 0,\ldots,n_i - 1;\ i = 1,\ldots,m)$$

в соответствующих предложениях гладкости сводится к аналогичной задаче с двумя независимыми переменными. Для этого с помощью результатов А. В. Игнатьевой (Уч. зап. МГУ, 1957, 9, вып. 186) строятся функции $\varphi_{iN}^k(z; p_1,\ldots,p_n)$ $(z = \Sigma_i^n x_i p_i$, p_i — параметры), для которых

$$\varphi_i^k(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \varphi_{iN}^k(z; p_1,\ldots,p_n)\, d\Omega$$

$$(\Omega: \Sigma p_i^2 = 1),$$

после чего решается задача Коши

$$\frac{\partial^{n_i} u_{iN}}{\partial t_i^n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_0,\ldots,k_n} A_{ij}^{k_0,\ldots,k_n}(t) p^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \times$$

$$\times \frac{\partial^{k_0+\ldots+k_n} u_{jN}}{\partial t^{k_0} \partial z_1^{k_1+\ldots+k_n}},$$

все

$$\left.\frac{\partial^k u_{iN}}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_{iN}^k(z; p_1,\ldots,p_n).$$

Последнюю задачу можно решить при помощи последовательных приближений. Решение исходной задачи получается как

$$u_i(t, x_1,\ldots,x_n) = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega u_{iN}(t, \sum x_i p_i; p_1,\ldots,p_n) d\Omega$$

Замеченная опечатка: в формуле (1) должно быть $N \to \infty$ вместо $n \to \infty$. А. Д. Мышкис

7749. Оценки типа Фридрихса — Леви для смешанных задач в теории линейных гиперболических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Томе (Estimates of the Friedrichs—Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equations in two independent variables. Thomée Vidar), Math. scand., 1957, 5, № 1, 93—113 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \alpha_i(x,t) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x,t) u_k = f_i(x,t) \quad (i = 1,\ldots,$$

$$\ldots, n;\ \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n)$$

в плоской области V, кусочно-гладкая граница которой нигде не касается характеристик. На каждом куске S_j границы заданы соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} l_{jk}^i(x,t) u_i = g_{jk}(x,t) \quad (k = 1,\ldots,k_j),$$

причем их можно разрешить относительно тех u_i, для которых характеристики с ростом t входят с S_j в V. Предполагается, что если какие-либо S_l и S_j примыкают друг к другу и $0 < k_l < n$, $0 < k_j < n$, то их проекции на ось не перекрываются. Доказана априорная оценка (при определенных невысоких требованиях гладкости)

$$\sum_i \int_V u_i^2 dV + \sum_{ij} \int_{S_j} u_i^2 dS \leqslant C\left[\sum_i \int_V f_i^2 dV + \right.$$

$$\left. + \sum_{j,k} \int_{S_j} g_{jk}^2\, dS\right],$$

где C не зависит от u, f и g. Существенность требований, наложенных на границу, показана на примерах.

Далее выведена аналогичная априорная оценка решений краевой задачи для линейного гиперболического уравнения

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)u+\ldots=f(x,t)\quad(a_1<\ldots<a_n),$$

$$\sum_{p,q} m_{jk}^{pq}(x,t)\frac{\partial^{p+q}u}{\partial t^p\,\partial x^q}=q_{jk}(x,t)\quad(x,t)\in S_j;$$

$$k=1,\ldots k_j;\ p+q\leqslant n-1,$$

причем граничные условия также должны удовлетворять определенному требованию разрешимости (на кусках S_j, ограничивающих V «снизу», ставятся условия типа Коши). В качестве примера рассмотрена «стандартная» смешанная задача, в которой на каждом S_j заданы производные от u по нормали порядка $\leqslant k_j-1$ (случай $n=3$ был рассмотрен автором ранее; РЖМат, 1956, 7367), и некоторая другая аналогичная задача.

А. Д. Мышкис

7750. Начальная задача для нелинейной гиперболической системы уравнений с частными производными и двумя независимыми переменными. Накамори (Iniciatavalora problemo por nelinea hiperbola sistemo de laupartaj diferencialaj ekvacioj de du sendependaj variantoj. Nakamori Kanzi), Yokohama Math. J., 1956, 4, № 2, 81—94 (эсперанто)

Уточняются известные теоремы о существовании, единственности и оценке решений для задачи Коши

$$\frac{\partial u_j}{\partial x}+\lambda_j(x,y,u)\frac{\partial u_j}{\partial y}=f_j(x,y,u);\quad u_j(0,y)=\varphi_j(y)$$

$$(j=1,\ldots,n).$$

Теорема существования доказана при помощи принципа неподвижной точки с указанием области существования решения. В теоремах об оценке правые части системы заменяются на (скалярную) функцию F, для которой $S(f(x,y,u))<F(x,y,S(u))$, где функция S (применявшаяся ранее Камке) заранее задана и удовлетворяет определенным требованиям; все функции λ_j также заменяются на одну, равно как и φ_j. При этом старое решение связано с измененным решением неравенством $S(u(x,y))\leqslant U(x,y)$. Теоремы о сравнении применяются в свою очередь к доказательству теоремы существования решения. Единственность решения доказана в предположении неравенства вида

$$S(f(x,y,u')-f(x,y,u^2))\leqslant G(x,y,S(u^1-u^2)).$$

Автор стремится снизить предположения (в особенности, гладкости), накладываемые на участвующие функции, идя в этом отношении дальше Фридрихса, в работе которого (Friedrichs K., Amer. J. Math., 1948, 70, 558—559) рассмотрены аналогичные вопросы. Так, в некоторых теоремах не требуется единственности решения начальной задачи, а решение может быть обобщенным.

А. Д. Мышкис

7751. Интегралы энергии смешанной задачи для гиперболических дифференциальных уравнений высшего порядка. Пейзер (Energy integrals for the mixed problem in hyperbolic partial differential equations of higher order. Peyser Gideon), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 5, 641—653 (англ.)

Рассматривается смешанная задача для линейного гиперболического дифференциального уравнения порядка m с переменными коэффициентами для случая двух независимых переменных. Предполагается, что коэффициенты уравнения m раз непрерывно дифференцируемы, начальные и граничные условия, содержащие производные порядка i от искомой функции, имеют $m-i-1$ обобщенных производных, а правая часть уравнения квадратично суммируема. Существование и единственность обобщенного решения доказываются с помощью выведенной автором априорной оценки—энергетического неравенства. Существование решения в классическом смысле доказывается с помощью теорем вложения С. Л. Соболева (при этом порядок условий дифференцируемости, накладываемых на данные задачи, повышается на 2 единицы).

Е. Д. Гарбер

7752. О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости. Карапетян К. И., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 6, 963—966

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+a_0\frac{\partial u}{\partial t}+bu=f$$

$$(\mu_{ij},\ a_i,\ a_0-\text{функции } x,\ t).$$

Причем предполагается, что в некоторой окрестности, лежащей в полупространстве $t>0$, наименьшее характеристическое число $\tilde{\rho}(t,x)$ матрицы $\|\mu_{ij}\|$ положительно, а при $t=0$ в некоторых точках оно может обратиться в ноль.

При ряде ограничений, из которых важную роль играет требование, ограничивающее скорость убывания $\tilde{\rho}(t,x)$ при $t\to+0$, доказывается корректность задачи Коши при заданиии $u(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ при $t=0$.

Сначала находится u_ε-решение задачи Коши для «неособой» гиперплоскости $t=\varepsilon(>0)$, затем с помощью оценок энергетического типа показывается сходимость u_ε при $\varepsilon\to+0$ к решению задачи Коши с данными при $t=0$.

В конце статьи приведено уравнение

$$u_{tt}-t^2u_{xx}+\gamma u_x=0,$$

для которого можно доказать корректность задачи Коши для $\gamma<1/11$ и установить отсутствие корректности ее для $\gamma>49$. Подробные доказательства в статье не приведены.

В. М. Бабич

7753. Элементарное решение ультрагиперболических уравнений. Фурес-Брюа (Solution élémentaire d'équations ultra-hyperboliques. Fourès-Bruhat), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 3, 277—288 (франц.)

Находится элементарное решение для ультрагиперболического оператора

$$\Box u=\sum_{\alpha=1}^{n_1}\frac{d^2u}{(dx^\alpha)^2}-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{d^2u}{(dx^i)^2}\quad n_1+n_2=n.$$

При нечетных n_1 и n_2 этим решением является обобщенная функция $F(x)$ с носителем на характеристическом конусе $\sum_{\alpha=1}^{n_1}(x^\alpha)^2-\sum_{i=1}^{n_2}(x^i)^2=0$, определенная формулой

$$\int_{R_n}E(x)\varphi(x)dx=\int_0^\infty\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\sum_{p=0}^{n/2-2}\alpha_p\lambda_1^{p+1}\left[\frac{d^p\varphi}{d\mu^p}\right]d\lambda d\Omega_1\,d\Omega_2,$$

где R_n — n-мерное пространство, $x^\alpha=\mu_1 p_\alpha$, $x^i=\lambda_1 p_i$, $\sum_{\alpha=1}^{n_1}p^2{}_\alpha=1$, $\sum_{i=1}^{n_2}p^2{}_i=1$, Ω_1, Ω_2 — единичные сферы в

R_{n_1}, R_{n_2} соответственно, $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ — элементы площади поверхности на Ω_1, Ω_2, $\alpha_k = (K_1K_2[n_2-2]\ldots[n_2-2(k+1)]^{-1}$, K_1, K_2 — площади сфер Ω_1, Ω_2, $\varphi(x) = \varphi(\lambda_1\mu_1, p_\alpha, p_i)$, $x \in R_n$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, наконец $[\varphi]$ для произвольной такой функции $\varphi(x)$ обозначает $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, p_\alpha, p_i)$, т. е. сужение функции φ на характеристический конус.

Отсюда для других случаев (n_1 или n_2, или оба четны). Элементарное решение получается методом спуска.

Полученные результаты применяются к задаче Коши для ультрагиперболических уравнений. М. А. Наймарк

7754. О решениях нелинейных волновых уравнений. Келлер (On solutions of nonlinear wave equations. Keller J. B.). Communs Pure and Appl. Math., 1957, 10, № 4, 523—530 (англ.)

Рассматривается решение задачи Коши для нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - c_2\Delta u = f(u), \qquad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad (2)$$

где x — точка одномерного, двумерного или трехмерного пространства. Пусть $u_0(x, t)$ — решение задачи для случая $f \equiv 0$ и начальных условий (2), и $C(x_0, t_0)$ — обратный характеристический конус с вершиной в (x_0, t_0), $t_0 > 0$.

Доказывается теорема сравнения: Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1), (2) и $u'(x, t)$ — решение аналогичной задачи, получающейся из (1), (2) заменой f, φ, ψ на f', φ', ψ'. Пусть $f(u) \geqslant f'(u')$ как только $u \geqslant u'$. Если в $C(x_0, t_0)$ имеет место $u_0 > u'_0$, то $u \geqslant u'$ в $C(x_0, t_0)$. Если $u_0 \geqslant u'_0$ в $C(x_0, t_0)$ и f' удовлетворяет условию Липшица $-\infty < u' < \infty$, то $u(x, t) \geqslant u'(x, t)$ в $C(x_0, t_0)$.

Отсюда следует, что если для $|x - x_0| < a$ начальные данные удовлетворяют неравенствам $\varphi(x) \geqslant \varphi'(x)$ $(n = 1)$, $\varphi(x) = \varphi'(x)$ $(n = 2, 3)$, $\psi(x) \geqslant \psi'(x)$ $(n = 1, 2, 3)$, то $u(x, t) \geqslant u'(x, t)$ в $C(x_0, a/c)$.

В случае $\varphi'(x) = \alpha = \text{const}$ и $\psi'(x) = \beta$ const в $|x - x_0| \leqslant a$ в $C(x_0, t_0)$ имеется решение $u'(t)$, не зависящее от x и являющееся решением задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u'}{dt^2} = f'(u'), \quad t > 0, \\ &u'(0) = \alpha, \ \left.\frac{du'}{dt}\right|_{t=0} = \beta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

При некоторых явно выписываемых предположениях относительно $f'(u')$ α, β для некоторого конечного T, $0 < T < \infty$, имеет место $u'(t) \to +\infty$ при $t \to T$. Это решение назовем неограниченным сверху.

Теорема 1. Если существуют непрерывная и удовлетворяющая условию Липшица функция $f'(u')$ такая, что $f(u) \geqslant f'(u')$, $u > u'$ и постоянные α и β такие, что (3) имеет решение, неограниченное сверху в $(0, T)$ и $\varphi(x) \geqslant \alpha$ $(n = 1)$, $\varphi(x) = \alpha$ $(n = 2, 3)$, $\psi(x) = \beta$ в $C(x_0, T)$, то решение задачи (1), (2) неограничено сверху в $C(x_0, T)$. Аналогичные результаты доказываются для нелинейного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u_{tt} + \frac{k}{t}u_t - c^2\Delta u = f(u)$$

с начальными данными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} \equiv 0$$

в случае $n = 2$, $k = \text{const} > 1$.

Примечание референта. На стр. 527 имеется ошибка. Всюду вместо $\beta^2 + \int_\alpha^z f(s)ds$ должно быть

$$\beta^2 + 2\int_\alpha^z f(s)ds.$$

Х. Л. Смолицкий

7755. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня с разрывным коэффициентом. Усольцев С. А., Уч. зап. Алма-Атинск. гос. пед. ин-та, 1957, 8, 207—231

Рассматривается уравнение теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. В результате замены переменной $x = \int_0^y \frac{dy}{a(y)}$ это уравнение приводится к уравнению $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Требуется определить решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $v(x, 0) = f(x)$ и условиям сопряжения:

$$v(x_i - 0, t) = v(x_i + 0, t), \ v'_x(x_i - 0, t) = \lambda_i v'x(x_i + 0, t),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Решение поставленной задачи ищется в классе функций, удовлетворяющих неравенству $|v(x, t)| < Ae^{c(x)}$ при $0 < t < T$ $(c \geqslant 0)$. С помощью комплексной формы обобщенного интеграла Фурье автор получает основную формулу:

$$v(x, t) = v_0(x, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j - 1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t v'_x(x_j + 0, \tau) \exp\left(-\frac{(x - x_j)^2}{4(t - \tau)}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}},$$

где

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp\left(-\frac{(x - u)^2}{4t}\right) du.$$

В этой формуле неизвестными функциями являются $v'_x(x_j + 0, \tau)$. Используя свойства разрывности производной теплового потенциала простого слоя, автор получает систему интегральных уравнений

$$\varphi_i(t) = \omega_i(t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \sum_{j=1}^{n'} b_{ij} \frac{\varphi_j(\tau)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{a_{ij}^2}{4(t - \tau)}\right] d\tau,$$

где

$$\varphi_i(t) = v'_x(x_i + 0, t), \quad \omega_i(t) = \frac{2}{\lambda_i + 1} v'_{0x}(x_i, t), \quad b_{ij} = -\frac{(\lambda_j - 1)(x_i - x_j)}{\lambda_i + 1}, \quad a_{ij} = |x_i - x_j|.$$

В работе строится матрица резольвент. С помощью этой матрицы решение системы уравнений (1) записывается в явном виде. Е. И. Ким

7756. Исследование поведения решений уравнения параболического типа при стремлении временной переменной к бесконечности. Кшижанский (Recherches concernant l'allure des solutions de l'équation du type parabolique lorsque la variable du temps tend vers l'infini. Krzyzanski Miroslaw), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 23, № 1—2, 28—32 (франц.)

Результаты, полученные автором ранее (РЖМат, 1958, 361), переносятся на случаи уравнения

$$\mathfrak{L}[u] \equiv a(x, t)u''_{xx} + b(x, t)u'_x + c(x, t)u - u_t' = 0$$

с непрерывными коэффициентами $(0 < a < \text{const}$, $|b| < \text{const}$, $c \leqslant 0)$, рассматриваемого в квадранте

$Q: 0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, в предположении разрешимости первой краевой задачи с непрерывными краевыми данными в каждой полосе $0 \leqslant x \leqslant k$, $t \geqslant 0$. Утверждается, что если $u \leqslant M = \text{const}$ на границе Q, $|u| \leqslant A \exp B x^2$ и $0 \leqslant \mathfrak{L}[u] \leqslant A \exp B x^2$, то $u \leqslant M$ всюду в Q. Если $\mathfrak{L}[u] = 0$, $|u| \leqslant A \exp B x^2$, $\sup |u(x, 0)| < \infty$ $u(0, t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$ и в Q существует некоторая функция $V(x, t)$, играющая роль барьера, то равномерно $u(x, t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$. Барьер строится явно, если $\sup c < 0$ или если $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, $0 \leqslant -c \leqslant A \exp B x^2$. Приведены условия, достаточные для того, чтобы решения уравнения

$$a(x) v''_{xx} + b(x) v'_x + c(x) v - v'_t = f(x),$$

удовлетворяющие условиям $|v| \leqslant A \exp B x^2$, $\sup |v(x,0)| < \infty$, $v(0, t) \underset{t \to \infty}{\to} l$, стремились при $t \to \infty$ к ограниченному решению уравнения.

$$a(x) w'' + b(x) w' + c(x) w = f(x); \quad w(0) = l.$$

Имеются и некоторые другие аналогичные результаты. Доказательства не приведены. А. Д. Мышкис

7757. Решение смешанной задачи для квазилинейной нормальной параболической системы. Салманова Д., АзербССР Элмлэр Акад. аспирантларынын 5. Элми конфрансыныи, асэрлэри, Тр. 5-й Научн. конференции аспирантов АН АзербССР. Баку, АН АзербССР, 1957, 187—194

Для системы дифференциальных уравнений

$$Lu_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{\partial u_i}{\partial y} = \lambda f_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_N) \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где λ — параметр в области D, ограниченной системой кривых Γ: отрезком AD оси $y=0$; кривой $AC: x = \varphi_1(y)$, кривой $BD: x = \varphi_2(y)$ ($\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y)$, $0 \leqslant y \leqslant h$) и отрезком CB характеристики $y = h$, ищется решение $u(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ системы (1), исчезающее на Γ. Задача приводится к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$u_i(x, y) = -\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G(x, y, \xi, \eta) f_i(\xi, \eta, u_1, \ldots, u_N)\, d\xi\, d\eta = U(u), \tag{2}$$

где $G(M, P)$ — функция Грина уравнения $Lu = 0$ для области D, причем граница D такова, что

$$\iint_D |G(M, P)|^q\, d\xi d\eta \leqslant A,$$

где A не зависит от точки M при $M \in D$. Решение системы (2) ищется в полном метрическом пространстве $L_p^N \subset L_p(D)$ метрикой:

$$\rho(u, v) = \left\{ \sum_{i=1}^N \iint_D |u_i - v_i|^p\, d\tau \right\}^{1/p}.$$

Показывается, что для $u \in L_p^N$, $U(u) \in L_p^N$ и для оператора $U(u)$ в L_p^N имеет место принцип сжатых отображений при $\lambda = 1$ для достаточно малой mes D, или при достаточно малом λ и при дополнительных условиях:

а) $f_i(M, 0, \ldots, 0) \in L_p(D)$,

б) $$\left| f_i(M, u_1, \ldots, u_N) - f_i(M, v_1, \ldots, v_N) \right| \leqslant \sum_{j=1}^N A_j \left| u_j - v_j \right|,$$

где A_i не зависит от i и от точки M при $M \in D$. Далее, вводя в L_p^N норму элемента u: $\| u \| = \rho(u, 0)$ (0—нулевой элемент), автор устанавливает полную непрерывность оператора $U(u)$ в L_p^N и применимость принципа неподвижной точки Шаудера к рассмотренной краевой задаче для системы (1), доказывая этим существование и единственность решения этой задачи.

Примечание референта. В работе много опечаток. Условия, при которых имеют место доказываемые неравенства, оговорены недостаточно, обозначения запутаны (например, элемент пространства, L_p^N и оператор (2) обозначены одинаково). Известные результаты, используемые в работе, не формулируются, ссылки на литературу отсутствуют. Все это весьма затрудняет чтение и уяснение сути работы.

И. Л. Кароль

7758. Ядерные функции уравнений диффузий. I. Ямабэ (Kernel functions of diffusion equations. I. Yamabe Hidehiko), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 2, 201—214 (англ.)

Область D d-мерного евклидова пространства называется регулярно открытой, если она совпадает с открытым ядром своего замыкания. Для регулярно открытой области D с границей ∂D (которая, вообще говоря, негладкая) дается способ построения функции Грина $K(x, y, t)$ (по терминологии автора, ядерной функции (kernel function) для уравнения диффузии

$$\partial u / \partial t = \Delta u \tag{1}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial D} = 0. \tag{2}$$

Автор показывает, что

$$K(x, y, t) = \lim_{n \to \infty} (E_{t/n^*})^n(x, y),$$

где $(E_t^*)^n(x, y)$ означает n-кратную итерацию по области D фундаментального решения уравнения (1).

Л. Н. Слободецкий

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

7759. Зависимость амплитуды вынужденных вертикальных колебаний свай и шпунта от параметров вибратора. Шехтер О. Я., Тр. н.-и. ин-та оснований и фундаментов, 1955, сб. 27, 58—79

Изучаются вертикальные периодические колебания сваи или шпунтины, снабженной вибропогружателем: сопровождающий эти колебания процесс погружения

сваи не рассматривается. Движение сваи описывается уравнением

$$m\ddot{z} + R_1(z) + R_2(\dot{z}) = m_0\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где m — масса установки m_0, ε и ω — соответственно масса, эксцентриситет и угловая скорость вращения дебалансных грузов вибратора, φ_0 — постоянный сдвиг фаз. Рассмотрено в основном четыре различных закона изменения сил сопротивления грунта R_1 и R_2:

1) $R_1 = a\left(z - \frac{4}{3}bz^3 + \frac{4}{5}bz^5\right)$, $\quad R_2 = \alpha\dot{z}$;

2) $R_1 = Rz$, $\quad R_2 = \{\dot{z}^p$;

3) $P_1 = Rz$, $\quad R_2 = F\,\mathrm{sign}\dot{z}$;

4) $R_1 = \begin{cases} cz + Q, & z > 0 \\ Q & z < 0 \end{cases}$ $\quad R_2 = 0$,

где a, b, c, α, β, R, p, F и Q — постоянные.

В случаях 1) и 2) периодические решения уравнения (1), соответствующие установившимся вынужденным колебаниям сваи, разыскивались приближенно; для прочих случаев приводятся точные решения, причем в случае 3) дополнительно предполагается, что:

$$\dot{z} < 0 \quad \text{при } 2\pi n < \omega t < \pi(2n+1),$$

$$\dot{z} > 0 \quad \text{при } (2n+1)\pi < \omega t < 2(n+1)\pi,$$

где $n = 0,1,2,\ldots$, а в случае 4) предполагается, что колебания имеют период, равный периоду возмущающей силы $2\pi/\omega$. По полученным формулам построены резонансные кривые, которые затем сравниваются с экспериментальными зависимостями. Опыты проводились с вибратором весом 700 *кг* со статическим моментом эксцентриков $m_0 g\varepsilon$ до 660 *кгсм*, при числах оборотов вибратора до 1700 в 1 мин. и диаметрах сваи от 12 до 31 *см*. Обнаружилось, что при сравнительно малых $m_0 g\varepsilon$ экспериментальные значения амплитуды колебаний хорошо согласуются с вычислительными на основании линейного закона сопротивления грунта; при сравнительно больших $m_0 g\varepsilon$ необходимо привлечение нелинейной теории сопротивления.

Предельные значения амплитуд колебаний сваи, полученные опытным путем при достаточно больших ω, составляют 0.6÷0.8 от теоретических значений этих величин. И. И. Блехман

7760. Характеристики излучения вытянутого эллипсоида вращения. Белкина М. Г. В сб.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М., «Сов. радио», 1957, 126—147

Методом разделения переменных в системе координат вытянутого эллипсоида вращения найдено электромагнитное поле от диполя, находящегося на оси идеально проводящего эллипсоида и параллельного этой оси. По выведенным формулам произведены вычисления характеристик излучения для ряда частных случаев и дана физическая интерпретация полученных результатов. Л. А. В.

7761. О решении задачи Стефана сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Меламед В. Г., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 577—580

Рассматривается задача Стефана для ограниченной области:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < \xi(t)); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (\xi(t) < x < l); \qquad (2)$$

$$\alpha_1 u_{1x}|_{x=\xi} - \alpha_2 u_{2x}|_{x=\xi} = \xi'(t),\ u_1 = u_2 = 0 \text{ при } x = \xi(t); \qquad (3)$$

$$u_1(0,t) = \Phi_1(t),\ u_2(l,t) = \Phi_2(t),\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad (4)$$

(a_1^2, a_2^2, α_1 и α_2 — постоянные).

Полагая $u_1 = v_1 + \Phi_1(t)\frac{\xi - x}{\xi}$, $\quad u_2 = v_2 + \Phi_2(t)\frac{x - \xi(t)}{l - \xi(t)}$, автор ищет решение в виде:

$$v_1(x,t) = \frac{2}{\xi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\xi(t)},$$

$$v_2(x,t) = \frac{2}{l - \xi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin\frac{k\pi(l-x)}{l - \xi(t)}. \qquad (5)$$

Из (1) — (4) получается уравнение для координаты фронта $\xi(t)$ и бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $\{A_k(t)\}$ и $\{B_k(t)\}$.

Доказывается, что: 1) решение бесконечной системы уравнений может быть получено путем предельного перехода при $n \to \infty$ из решения укороченной системы, состоящей из $2n+1$ уравнения, 2) погрешность, допускаемая при решении укороченной системы, имеет порядок $\frac{1}{n}$; дано обоснование метода разделения переменных. Приведены результаты численных расчетов.

В статье содержатся ошибки: 1) предполагается существование $\varphi''(x)$, используется в § 2 существование $\varphi'''(x)$ (коэффициенты Фурье $A_k \sim 1/k^3$), 2) предполагается непрерывность $\Phi'_1(t)$, $\Phi'_2(t)$, используется в § 3 существование $\Phi_1''(t)$ и $\Phi_2''(t)$. А. А. Самарский

7762. Некоторые применения оперативного исчисления Я. Микусинского к системам автоматического управления со случайными возмущениями. Потапенко А. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 129—134

Используя операторное исчисление Я. Микусинского, автор получил выражение для корреляционной матрицы случайного процесса, определяемого дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}X + AX = F_1, \qquad (1)$$

где $X = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{Vmatrix}$, $A = \|a_{ik}\|$, $F_1 = \begin{Vmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{Vmatrix}$

Здесь $x_i(t)$ — неизвестные функции, a_{ij} — некоторые постоянные, $f_i(t)$ — функции, принадлежащие классу K (во всяком конечном интервале имеется конечное число точек разрыва и $\int_0^t |f(\tau)|\,d\tau$ ограничен).

В качестве примера рассмотрен гироскопический маятник на неподвижном основании. А. Г. Корман

7763. К устойчивости нелинейных авторегулируемых систем. Бедельбаев А. К., Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1957, № 6 (10), 51—59 (рез. каз.)

Рассматривается система регулирования, описываемая дифференциальными уравнениями

$$\eta_{ls} = \sum_{k=1}^{n} P_{sk}(t)\eta_k + h_s(t)f(\sigma),\ \sigma = p_1(t)\eta_{i1} + \ldots + p_n(t)\eta_{in},$$

где $f(0) = 0$; $\sigma f(\sigma) > 0$, $\sigma \neq 0$.

В первой части работы для собственно устойчивой при $t\in[t_0,\infty)$ системы регулирования с выключенным сервомотором дается общий метод построения функции Ляпунова (в виде квадратичной формы $Q(t,\eta_1,\ldots,\eta_n)$), который иллюстрирует на примерах когда $P_{sk}(t)=C_{sk}+\mu q_{sk}(t)$ (C_{sk} — постоянные. $q_{sk}(t)$—ограниченные функции времени, μ — параметр, подлежащий определению) или $\lim_{t\to\infty}P_{sk}(t)=C_{sk}=\text{const}$.

Во второй части работы с помощью функции Ляпунова

$$V=Q(t,\eta_1,\ldots,\eta_n)+\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma$$

устанавливается довольно широкий критерий асимптотической устойчивости «в большом» невозмущенного неустановившегося или установившегося движения регулируемой системы.

Приводится пример, иллюстрирующий полученный результат.

Примечание референта. Утверждение автора о том, что в случае отсутствия асимптотической устойчивости регулируемого объекта при выключенном сервомоторе «безнадежна всякая попытка получить устойчивые режимы при сколь угодно медленно действующем сервомоторе», является ошибочным (см., например, Малкин И. Г., Прикл. матем. и механ., 1951, 15, № 1; Спасский Р. А., РЖМат, 1958, 5711).

Р. А. Спасский

7764. К теории оптимальных процессов в линейных системах. Гамкрелидзе Р. В., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 1, 9—11

Решается задача о нахождении оптимальных процессов в линейных системах с одним управляющим параметром. Решение опирается на общий метод исследования задач оптимального регулирования, развитый в статье В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Л. С. Понтрягина (РЖМат, 1957, 8685).

При заданной системе уравнений

$$\dot{x}=Ax+\bar{b}u \tag{1}$$

(x — n-мерный вектор, A — матрица, $\bar{b}$ — вектор, u — скалярная величина, стесненная условием

$$|u|\leqslant 1; \tag{2}$$

требуется определить функцию $u(t)$ так, чтобы точка $x(t)$, движущаяся по траектории (1), перешла из заданного положения ξ_0 в другое заданное положение ξ_1 за минимальное время.

В предположении невырожденности уравнения (1), т. е. при условии, что $\bar{b}$ не лежит в инвариантных подпространствах преобразования A, выводятся уравнения для определения оптимального управления $u(t)$. Основной вывод здесь таков: все оптимальные управления $u(t)$ и соответствующие им оптимальные траектории $x(t)$, выходящие при $t=0$ из точки ξ, содержатся в управлениях и соответствующих им траекториях, получаемых при решении системы уравнений

$$\dot{x}=Ax+\bar{b}u,\quad x(0)=\xi,\quad \dot{\psi}=-A'\psi,\quad u=\operatorname{sign}\bar{\psi}\cdot\bar{b}. \tag{3}$$

Начальное значение $\bar{\psi}(0)$ решения $\psi(t)$ подчиняется условию

$$\psi(0)\,[Ax(0)+\bar{b}\,u(0)]\geqslant 0. \tag{4}$$

Эти условия выражают здесь общий принцип максимума, сформулированный в цитированной выше статье.

Решается задача синтеза системы, т. е. вычисления оптимального управления u как функции от x. Из результатов автора вытекает существование единственной функции $u(x)$, обеспечивающей оптимальное управление в точку $\xi_1=0$ из любой точки $\xi=x$, лежащей в области M, из которой можно попасть в начало координат допустимым управлением u (т. е. при условиях (1)). M является открытым и выпуклым множеством. Функция $u(x)$ принимает лишь значения —1, 0, 1, поэтому для синтеза системы достаточно знать поверхности в пространстве $\{x\}$, возле которых функция $u(x)$ меняет знак (поверхности переключения). Дается параметрическое представление поверхности в случае действительных собственных значений λ матрицы A. Указывается, что в случае комплексных λ аналогичное параметрическое представление невозможно, однако уравнения (3), (4) позволяют и в этом случае определять поверхности переключения с наперед заданной точностью.

Н. Н. Красовский

7765. Применение понятия фазового пространства для исследования систем автоматического регулирования. Стебаков С. А., Тр. 2-го Всес. совещ. по теории автомат. регулирования, Т. 1, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1955, 149—165

Излагаются общие соображения о применении геометрических рассмотрений в фазовом пространстве к исследованию поведения динамической системы.

Ю. И. Неймарк

7766. Расширенные уравнения движения нелинейных неголономных систем. Новоселов В. С., Уч. зап. ЛГУ, 1957, № 217, 84—89

Данная работа является продолжением предыдущих работ автора в области применения нелинейных неголономных координат к исследованию механических систем с нелинейными неголономными связями. Автор ставит своей целью получение таких уравнений движения подобных неголономных систем, из которых можно было бы не только найти само движение системы, но и определить силы реакций неголономных связей.

В. В. Добронравов

7767. Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике. Новоселов В. С., Уч. зап. ЛГУ, 1957, № 217, 50—83

Реферируемая работа по существу является обобщением цикла работ референта по построению аналитической динамики в так называемых «линейных неголономных координатах».

Результаты данных исследований собраны в основном в большой работе референта «Аналитическая динамика в неголономных координатах» (Уч. зап. Моск. ун-та, 1948, 11, вып. 122), которая неоднократно цитируется в реферируемой статье. Обобщение состоит в том, что в реферируемой статье последовательно разрабатывается аппарат нелинейных неголономных координат и применяется в аналитической динамике по двум направлениям: во-первых, показывается, какой вид будут иметь в нелинейных неголономных координатах все уравнения и соотношения, выражающие основные классические положения механики голономных систем; а затем приводится обобщение ряда данных положений и на случай механических систем с нелинейными неголономными связями.

Таким образом, в работе дается определение нелинейных неголономных связей в механических системах; устанавливается понятие нелинейных неголономных координат; выводятся уравнения движения голономных механических систем в нелинейных неголономных координатах; записывается в нелинейных неголономных координатах принцип Гамильтона — Остроградского; выводятся в нелинейных неголономных координатах

канонические уравнения движения и уравнение Гамильтона — Якоби; находятся выражения интегральных инвариантов и формулируется теорема Пуассона — все для голономных систем. Так же выводятся уравнения в вариациях Пуанкаре.

Далее, для механических систем с нелинейными неголономными связями, на базе постулата Н. Г. Четаева о линеаризуемости уравнений связей относительно вариаций, выводятся уравнения движения механических систем типа систем С. А. Чаплыгина. Уравнения подобных систем приводятся к каноническому виду, находятся выражения интегральных инвариантов для них и выводится уравнение Гамильтона — Якоби в обобщенном виде. Попутно автор останавливается на общих вопросах развития механики неголономных систем, высказывает свое мнение о некоторых ее исходных положениях, затрагивает при этом проходившую несколько лет тому назад дискуссию по поводу некоторых результатов работ Вольтерра и референта. В. В. Добронравов

7768. Сведение задачи неголономной механики к условной задаче механики голономных систем. Новоселов В. С., Уч. зап. МГУ, 1957, 217, 28—49

Автор рассматривает механические системы с нелинейными, неголономными относительно обобщенных скоростей связями и притом реономными связями, т. е. связями вида

$$F_k(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 (i = 1, 2, \ldots, s; k = 1, 2 \ldots, r).$$

Исходя из постулированных в 1931—1933 гг. Н. Г. Четаевым соотношений, которым должны удовлетворять вариации координат

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

автор выводит сначала известные уравнения Рауса—Феррерса для данных нелинейных неголономных систем, полученные ранее Н. Г. Четаевым из принципа Гаусса (Н. Г. Четаев, Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те, 1932—1933, 6, сер. 3).

Далее, исключая множители Лагранжа, автор показывает, что движение данной неголономной системы можно рассматривать как частный случай движения некоторой голономной системы под действием соответствующих сил, когда начальные данные этой голономной системы удовлетворяют условиям связей данной неголономной системы при $t=0$.

Исходя из данного положения, далее автор приводит дифференциальные уравнения движения рассматриваемых неголономных систем к каноническому виду, дает при этом обобщение теоремы Пуассона, выводит уравнения в вариациях Пуанкаре, обобщает теорию интегральных инвариантов первого порядка, выводит обобщенное уравнение Гамильтона—Якоби и показывает применимость метода Якоби к интегрированию уравнений движения. Последнее иллюстрируется примером формального характера.

Рецензент считает необходимым отметить, что основной принципиальный результат работы, показывающий, что движение каждой неголономной системы находится в классе частных движений некоторой голономной системы, для случая систем с линейными неголономными связями был получен итальянским ученым К. Агостинелли (см. РЖМат, 1957, 2266). В. В. Добронравов

7769. Термодинамика необратимых процессов. Случай, когда вековое уравнение имеет двойной корень. Попов (Sur la thermodynamique des processus irréversibles—cas de racines doubles de l'équation séculaire. Popoff K.), Изв. Матем. ин-т Българ. АН, 1956, 2, № 1, 13—25 (франц.; рез. болг., русск.)

Для системы

$$d^2x_1/dt^2 = g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \varphi(x_1, x_2),$$
$$d^2x_2/dt^2 = g_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \psi(x_1, x_2),$$

вековое уравнение которой имеет двойной корень, устанавливается существование интегралов вида

$$x_1 = C_1 u + \xi_2(u; v) + \xi_3(u, v) + \ldots$$
$$x_2 = C_2 u + \eta_2(u, v) + \eta_3(u, v) + \ldots,$$

где $u = e^{-\sqrt{g_{11}}t}$ $v = -\sqrt{g_{11}}\, te^{-\sqrt{g_{11}}t}$, ξ, η обращаются в нуль при $u = v = 0$. П. И. Кузнецов

7770. Некоторые методы гидродинамики. Милн-Томсон (Some hydrodynamical methods. Milne-Thomson L. M.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 3. 167—186 (англ.)

Обзор некоторых математических методов, применяемых в различных вопросах современной гидродинамики.

Автор обсуждает применение в гидродинамике тензоров, комплексного переменного и кватернионов. Рассматриваются некоторые проблемы и возникающие при их решении трудности в таких задачах гидродинамики, как вычисление присоединенных масс, движение жидкости со свободной поверхностью, волновые движения тяжелой жидкости, движение твердого тела в неограниченной жидкости и вблизи свободной поверхности.

Указывается на наличие аналогий между различными задачами естествознания, при математической формулировке этих задач и приводятся примеры таких аналогий. Библ. 41 назв. Э. Л. Блох

7771. Введение функций кватернионов в пространственные задачи механики сплошной деформирующейся среды. Мишику М., Ж. прикл. Акад. РНР, 1956. 1, № 2, 93—112

В качестве аппарата для пространственных задач гидродинамики и теории упругости рассматриваются функции кватернионов, причем автор опирается на результаты Г. К. Моисила и Р. Фультера. Алгебраические операции над кватернионами интерпретируются как неевклидовы перемещения. Рассматриваются свойства кватернионных рядов и моногенных функций и доказывается аналог интегральной формулы Коши.

Как иллюстрация применения аппарата рассматриваются краевые задачи для движения идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что определение поля скоростей сводится к отысканию моногенной функции по ее скалярной части или нормальной скалярной производной на контуре.

Примечание референта. Чтение работы затруднительно, ввиду весьма конспективного ее изложения. Е. Д. Гарбер

7772. Задача Коши — Пуассона для поверхности раздела двух текущих потоков. Сретенский Л. Н., Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1955, № 6, 505—513

Рассматривается задача о гравитационных волнах, возникающих на горизонтальной поверхности раздела двух текущих жидкостей. Движение потоков предполагается двухразмерным.

Задача заключается в определении потенциалов добавочных скоростей

$$\varphi_1(x, y, t)\ (y < 0) \text{ и } \varphi_2(x, y, t)\ (y \geqslant 0),$$

являющихся решениями уравнения Лапласа и удовлетворяющих дополнительным условиям сопряжения давлений:

$$\rho_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - g\eta_1\right) = \rho_2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - g\eta\right) \quad (1)$$

и кинематическим условиям

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \qquad (2)$$

на линии раздела потоков $y = 0$. Здесь $\eta(x, t)$ — ордината поверхности раздела в возмущенном состоянии.

Кроме того, задаются начальные значения потенциалов скоростей на линии раздела

$$\varphi_1(x, 0, 0) = f_1(x); \quad \varphi_2(x, 0, 0) = f_2(x).$$

Сначала разыскивается класс частных решений уравнения Лапласа

$$\varphi_1(x, y, t) = F_1(t)\, e^{R(y+ix)}, \quad \eta = RH(t)\, e^{iRx},$$

$$\varphi_2(x, y, t) = F_2(t)\, e^{-R(y-ix)},$$

удовлетворяющих условиям (1), (2). Функции $F_1(t)$, $F_2(t)$ и $H(t)$ определяются из условий (1), (2). Найденные функции используются для построения интеграла Фурье, дающего формальное решение задачи Коши—Пуассона, удовлетворяющего условиям (3).

Найденный интеграл является сходящимся при очень жестких ограничениях, налагаемых на характер стремления к нулю функций f_1 и f_2 при $|x| \to 0$.

Подробно анализируется случай, когда

$$f_1(x) = e^{-h^2 x^2}, \quad f_2(x) \equiv 0.$$

В этом случае решение является сходящимся. Исследован ряд свойств полученного волнового движения. В частности, устанавливается, что фронт волны, как и в классической задаче Коши—Пуассона, распространяется с постоянным ускорением. Однако изучаемое явление обладает также рядом свойств, отличающих его от явления распространения волн в обычной задаче. Так, например, автор устанавливает почти строгую периодичность колебания уровня жидкости в данной точке, что не имеет места в обычной задаче Коши—Пуассона.

Н. Н. Моисеев

7773. Применение теории Штурма — Лиувилля к одному классу смешанных краевых задач. Карп (An application of Sturm—Liouville theory to a class of two-part boundary-value problems. Karp Samuel N.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, **53**, № 2, 368—381 (англ.)

Рассматривается бесконечный плоский волновод $(-\infty < x < \infty, 0 < y < 2a)$, в который вставлена перегородка, параллельная стенкам $(y = a, -\infty < x < 0)$. Стенки волновода и перегородка считаются идеально проводящими. Предлагается, что для вещества, заполняющего волновод $\mu = \text{const}$, а $\varepsilon = \varepsilon(y)$, причем диэлектрическая постоянная $\omega(y)$ является четной функцией разности $y - a$.

Пусть электрическое поле имеет только одну компоненту E_z, тогда в силу симметрии задачи относительно плоскости $y = a$ для функции $u(x, y) = E_z(x, y)$ получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2(y)\, u = 0, \quad k^2 = \varepsilon(y)\, \mu \frac{\omega^2}{c^2};$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, a) = 0, \quad -\infty < x < 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, a) = 0 \quad 0 < x < \infty$$

Обозначим через $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ собственные значения, а через $\{\psi_n(y)\}$ и $\{\varphi_n(y)\}$ собственные функции краевых задач

$$\text{I} \quad \begin{cases} \varphi'' + [\lambda + k^2(y)]\varphi = 0, \\ \varphi(\lambda, 0) = 0, \varphi'(\lambda, a) = 0, \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} \varphi'' + [\mu + k^2(y)]\psi = 0, \\ \psi(\mu, 0) = \psi(\eta, a) = 0, \end{cases}$$

числа $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots$$

Предположим, что $\lambda_0 < 0$, в то время как $\mu_0 > 0$. Ограниченное при $x \to \pm\infty$ решение исходной задачи будет в этом случае иметь вид

$$u(x, y) = \begin{cases} [c_0^{(1)} \exp(ix\sqrt{-\lambda_0}) + \\ \quad + d_0^{(1)} \exp(-ix\sqrt{-\lambda_0})]\, \varphi_0(y) + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \exp(-x\sqrt{\lambda_n'})\, \varphi_n(y), & 0 < x < \infty, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} \exp(x\sqrt{\mu_n})\, \psi_n(y), & -\infty < x < 0, \end{cases}$$

$c_n^{(1)}$, $c_n^{(2)}$ и $d_0^{(1)}$ — неопределенные постоянные. Записывая это решение в виде контурного интеграла

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{i\nu x} \varphi(-\nu^2, y)\, A(\nu)\, d\nu,$$

где $\varphi(\lambda, y)$ — решение уравнения

$$\varphi'' + [\lambda + k^2(y)]\varphi = 0,$$

удовлетворяющее условиям:

$$\varphi(\lambda, 0) = 0, \quad \varphi'(\lambda, 0) = 1,$$

а C — контур, идущий вдоль действительной оси и обходящий снизу точки $\pm\sqrt{-\lambda_0}$, автор получает следующее выражение для функции $A(\nu)$:

$$A(\nu) = \frac{\exp\left[-\frac{i\nu a}{\pi}\left(\psi(2) - \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right]}{\left(1 + \frac{\nu^2}{\lambda_0}\right)\left[\prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{\nu}{i\sqrt{\lambda_n}}\right)\exp\left(\frac{-i\nu}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}}\right)\right]} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[\prod_0^{\infty}\left(1 + \frac{y}{i\sqrt{\mu_n}}\right)\exp\left(\frac{iy}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}}\right)\right]},$$

где ψ — логарифмическая производная гамма-функции.

Д. П. Костомаров

7774. О некоторых уравнениях катодной защиты трубопроводов. Остапенко В. Н., Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 4, 442—451 (рез. англ.)

Пусть $v(x, y)$, $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$ — потенциалы тока, удовлетворяющие уравнению Лапласа в полуплоскости $y > 0$ и полосах $-h_1 < y < 0$, $-h_2 < y < -h_1$, соответ-

ственно при граничных условиях

$$k\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0+0} = k_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\Big|_{y=0-0};\quad k_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\Big|_{y=-h_1+0} = k_2\frac{\partial v_2}{\partial y}\Big|_{y=-h_1-0};\quad \frac{\partial v_2}{\partial y}\Big|_{y=-h_2+0}=0$$

Предполагается, что $v(x, y)$ и $v_2(x, y)$ имеют логарифмические особенности в точках $(0, b)$ и $(0, \beta)$ соответственно $(0<b, -h_2<\beta<-h_1)$.

Защитная разность потенциалов $\Phi(x)$, препятствующая действию коррозии, определяется соотношением

$$\Phi(x) = v(x, 0+0) - v_2(x, -h_1-0).$$

Для функций $v(x, 0+0)$ и $v_2(x_1-h_1-0)$ автор получает систему интегро-дифференциальных уравнений, которую решает с помощью преобразования Фурье.

В работе получена формула, выражающая функцию $\Phi(x)$, которая содержит в качестве параметров силу тока, потребляемую защитной станцией, и физические характеристики среды.

Решение задачи проводится приближенным методом. Оценка погрешности в работе не дана. М. С. Ага

7775. Сейши в прямоугольном порту. Кравченко, Мак-Наун (Seiche in rectangular ports. Kravtchenko Julien, McNown John S.), Quart. Appl. Math., 1955, **13**, № 1, 19—26 (англ.)

Изучаются волны, индуцированные внутри акватории порта волнами, приходящими из открытого моря. Предполагается, что порт имеет форму параллелепипеда глубины h и соединен с морем каналом той же глубины.

Вдоль канала распространяются стоксовские волны, поэтому на стыке канала и бассейна (область S) авторы ставят условие

$$V_n = A\frac{V_0}{K}\sin\frac{2\pi t}{T}\,\frac{\mathrm{ch}\,[k(z+h)]}{\mathrm{ch}\,kh},$$

при этом между T и K принимается связь:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = gk\,\mathrm{th}(kh).$$

Поэтому решение задачи о вынужденных периодических движениях жидкости в акватории, порта взятое в виде

$$\varphi = \frac{V_n}{A}F(x,y),$$

автоматически удовлетворяет условию постоянства давления.

Функция F определяется из уравнения

$$\Delta F + k^2F = 0$$

с граничными условиями $\partial F/\partial n = V_0$ на S и $\partial F/\partial u = 0$ вне S.

Решение ищется в виде суммы

$$F = f + U,$$

где U — решение задачи $\Delta U + k^2U = f_1$, $\partial u/\partial n = 0$ всюду на границе области, $f_1 = -(\Delta f + k^2 f)$. Функция f_1 строится так, чтобы она удовлетворяла неоднородным граничным условиям для F и чтобы $\partial f_1/\partial u = 0$ на границе области.

Тогда функция U находится в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи $\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$, $\partial\Phi/\partial u = 0$ на границе области.

Дается оценка быстроты убывания коэффициентов ряда представляющего решение. Ряды для u сходятся как $\sum\frac{1}{n^5}$.

Полученное решение описывает только нерезонансный случай: частота приходящих волн должна быть отлична от частоты собственных колебаний жидкости.

Подробно исследуется форма взволнованной поверхности. Н. Н. Моисеев

7776. Неустановившийся процесс истечения газа из цилиндрического баллона. Дулов В. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 132—145 (рез. англ.)

Рассматривается задача о неустановившемся истечении газа из цилиндрического сосуда через отверстие, диаметр которого меньше диаметра сосуда. Автор улучшает ранее применявшиеся методы (Станюкович К. П., Неустановившееся движение сплошной среды. М., 1955) и получает достаточно точную рабочую формулу для определения времени истечения газа.

К. П. Станюкович

7777. Завихренный поток жидкости, обтекающий правильный многоугольный цилиндр. Висванадха-Сарма (Rotational flow of a liquid past a regular polygonal cylinder. Viswanadha Sarma L. V. K.), Proc. Indian Acad. Sci., 1957, **A46**, № 3, 224—231 (англ.)

Рассматривается плоская задача обтекания твердого тела завихренным потоком жидкости, функция тока которого для невозмущенного состояния имеет вид: $\psi = Uy - \frac{1}{2}\omega y^2$. Для решения задачи искомое течение представляется в виде суммы невозмущенного завихренного и возмущенного потенциального течений. Последнее определяется обычным методом, после чего вычисляются гидродинамические силы, действующие на обтекаемый контур, представляющий собой правильный многоугольник.

Без вывода приводятся результаты для случая, когда обтекаемый контур является криволинейным многоугольником, образованным гипертрохоидой. При решении задачи возмущенное движение предполагается бесциркуляционным.

Вызывает сомнение результат § 6 для $n=2$, когда главный вектор гидродинамических сил не обращается в нуль при $\omega=2$. Э. Л. Блох

7778. О единственности решения приближенных граничных задач динамики несжимаемой жидкости с переменной вязкостью. Регирер С. А., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 3, 384—386

Рассматриваются уравнения нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости при переменной вязкости. Искомыми являются вектор скорости $\mathbf{v}$, гидродинамическое давление p и температура T. Коэффициент вязкости $\nu(x, y, z, t)$ считается заданной непрерывной и ограниченной функцией вместе с производными первого и второго порядков по координатам в замкнутой области $D+B$, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью B. В начальный момент $(t=0)$ задаются $\mathbf{v}$ и T внутри D, а при $t>0$ на граничной поверхности $\mathbf{v}$ и T принимают заданные непрерывные значения. При этих условиях, используя способ, примененный Д. Е. Долидзе (РЖМат, 1955, 2225), автор доказывает единственность регулярной скорости и температуры внутри конечной области D. p определяется с точностью до аддитивной функции, зависящей только от времени.

Доказательство легко распространяется на случай внешней бесконечной области, а также на случай разомкнутой граничной поверхности. Д. Е. Долидзе

7779. О теореме единственности, приложимой к некоторым задачам дифракции упругих волн. Розо (Sur un théoréme d'unicité applicable à certains problèmes de diffraction d'ondes élastiques. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 21, 1780—1782 (франц.)

В двумерном случае доказывается теорема единственности решения внешней граничной задачи для установившихся упругих колебаний при ослабленном условии излучения, имеющем следующий вид

$$\lim_{R\to\infty}\int\left|\frac{\partial\Theta_1}{\partial r}-i\tau\theta_1\right|^2 ds=0,\ \lim_{R\to\infty}\int\left|\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}-i\sigma\Omega_1\right|^2 ds,$$

где Θ_1, Ω_1 — потенциалы дифрагированных волн расширения и вращения, τ, σ — соответствующие волновые числа, а интегралы берутся по окружности радиуса R, $R\to\infty$, заключающей внутри себя границу $f(x, y)=0$ области решения задачи. Н. А. Ростовцев

7780. Дифракция упругих плоских волн в однородной среде, заделанной вдоль полуплоскости. Розо (Diffraction d'ondes élastiques planes dans un milieu homogène encastré suivant un demi—plan. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 22, 1888—1890 (франц.)

Решается задача о дифракции упругих плоских волн в однородном пространстве с разрезом вдоль полуплоскости $y=0$, $x>0$, на которой заданы значения разрывов потенциалов дифрагированных волн расширения и вращения:

$$[\Theta_1]=\Theta_1(x,+0)-\Theta_1(x,-0)=f(x),$$
$$[\Omega_1]=\Omega(x,+0)-\Omega_1(x,-0)=h(x).$$

Предполагается, что волновое число, характеризующее пространство, комплексно. Условие излучения принимается в ослабленной форме, введенной в предшествующей работе (реф. 7779). Указывается, что при некоторых условиях относительно поведения при $x\to 0$ и $x\to\infty$ функций $f(x)$ и $h(x)$ гёльдеровского класса задача приводится к системе двух интегральных уравнений, решение которых должно быть предметом следующей публикации. Н. А. Ростовцев

7781. Функция Грина для периодических структур в теории дифракции с приложением к среде с параллельными пластинами. Хейнс (The Green's function for periodic stuctures in diffraction theory with an application to parallel plate media, I. Heins Albert E.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 4, 401—426 (англ.)

В первой части работы для двумерного уравнения $\Delta u+k^2u=0$ строится функция Грина $G(\xi, \eta, \xi', \eta')$ с периодическими граничными условиями

$$G(\xi,-\beta,\xi',\eta')=e^{-ikp}G(\xi,c-\beta,\xi',\eta');$$

$$\frac{\partial G}{\partial\eta}(\xi,\eta,\xi'\eta')\Big|_{\eta=-\beta}=e^{-ikp}\frac{\partial G}{\partial\eta}(\xi,\eta,\xi',\eta')\Big|_{\eta=c-\beta}$$

(где p и β — действительные параметры, c — пространственный период) и логарифмической особенностью в точке $\xi=\xi'$, $\eta=\eta'$:

$$G(\xi,\eta,0,\eta')=\sum_{(a)}^{\infty}\frac{\exp\{i\sigma_n(\eta-\eta')\mp\Delta_n\xi/c\}}{2\Delta_n}+$$
$$+\sum_{(a)}^{\infty}\frac{\exp\left\{i\sigma_n(\eta'-\eta)\mp\Delta_n'\frac{\xi}{c}\right\}}{2\Delta_n'}+$$
$$+\begin{cases}-\dfrac{\exp\{ikp(\eta-\eta')/c\}\sin\left[k\sqrt{c^2-\rho^2}\dfrac{\xi}{c}\right]}{k\sqrt{c^2-\rho^2}}+\\ +\sum\limits_{(a)}\exp\{i\sigma_n(\eta-\eta')\}\dfrac{\sin w_n\xi}{w_nc}-\\ -\sum\limits_{(b)}\exp\left\{i\sigma_n(\eta'-\eta)\right\}\dfrac{\sin w_n'\xi}{w_nc}\\ 0\end{cases}\begin{matrix}\\ \\ \\ \xi>0\\ \xi<0\end{matrix}$$

где Δ_n, Δ_n', w_n, и w_n' — действительные величины, равные

$$i\Delta_n=\sqrt{k^2c^2-(kp+2n\pi)^2}\ (n>M),$$
$$i\Delta_n'=\sqrt{k^2c^2-(kp-2n\pi)^2}\ (n>N),$$
$$w_nc=\pm\sqrt{k^2c^2-(kp+2n\pi)^2}\ (0<n\leqslant M),$$
$$w_n'c=\pm\sqrt{k^2c^2-(kp-2n\pi)^2}\ (0<n\leqslant N);$$

$\sum_{(a)}$ и $\sum_{(b)}$ — конечные суммы от 0 до M и от 0 до N соответственно, верхний знак в первых двух суммах соответствует $\xi>0$, нижний $\xi<0$, $\sigma_n^2=k^2-w_n^2$.

Вторая часть работы посвящена решению задачи дифракции плоских волн на бесконечной системе параллельных полуплоскостей с граничным условием первого рода. С помощью функции Грина строится интегральное уравнение типа Винера — Хопфа для тока I на проводящей полуплоскости:

$$0=A\exp\{ikx\cos\nu\}+B\exp\{ikx\cos(2\alpha-\nu)\}+$$
$$+\sum_{-M}^{N}F_n\{i\gamma_nx\}+\int_0^{\infty}G(x,0,x',0)I(x')\,dx',\ x>0,$$

где ν — угол падения плоской волны, α — угол, образуемый линией, проходящей через концы полуплоскостей, с осью x,

$$\gamma_n=-\frac{\sin\alpha}{c}w_n+\frac{\cos\alpha}{c}(2n\pi+kp).$$

Строится решение этого уравнения, находятся выражения для коэффициентов B и F_n, а также коэффициенты отражения и прохождения для различных типов возбуждения (из открытого полупространства и из полупространства, занятого полуплоскостями).

Ю. Н. Днестровский

7782. К исследованию упруго-пластических продольных колебаний стержней переменного сечения методом интегральных соотношений академика А. А. Дородницина. Кабулов В. К., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1957, № 11, 11—15

Для уравнения продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial N}{\partial x}+m(x)\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=p(x,t),$$

где $N=F[E\varepsilon-\omega(\varepsilon)]$, $\varepsilon=\partial u/\partial x$, описан метод численного интегрирования, состоящий в том, что функции $m(x)v(x,t)$ и $\varepsilon(x,t)$ ($v=\partial u/\partial t$) на участке интегрирования $x_0<x<x_k$ предварительно аппроксимируются линейными агрегатами типа

$$\varepsilon(x,t)=a_0(x)\varepsilon_0+a_1(x)\varepsilon_1+\ldots+a_k(x)\varepsilon_k,$$

где функции ε_i зависят лишь от времени t, а коэффициенты $a_i(x)$ суть полиномы Лагранжа: $a_i(x_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=0,1,\ldots,k)$. Тогда, для соответственных промежутков времени, вычисление $\varepsilon_i(t)$ приводится к решению некоторой системы линейных дифференциальных уравнений (с постоянными коэффициентами) второго порядка, решаемых одно за другим. При решении надлежит иметь в виду, что значения коэффициентов изменяются при переходе из упругой области в пластическую и обратно. Указывается, что расчеты легко автоматизируются и могут выполняться на вычислительных машинах.

Н. А. Ростовцев

7783. Представление уравнений упругого равновесия моногенными функциями кватернионов. Мишику (Reprezentarea ecuatiilor echilibrului elastic prin functii monogene de cuaternioni. Misicu M.), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. si fiz., 1957, **9**, № 2, 457—470 (рум.; рез. русск., франц.)

С помощью кватерниона

$$\varphi = -\chi\theta + \omega, \quad \chi = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu},$$

где θ — объемное расширение, ω — вихрь вектора смещения, уравнения статики изотропного упругого тела при отсутствии массовых сил записаны в виде $\nabla\cdot\varphi = 0$ (∇ — оператор Гамильтона). Для записи граничных условий вводятся операции дифференцирования типа

$$\frac{\partial}{\partial n_x} = n_y\frac{\partial}{\partial z} - n_z\frac{\partial}{\partial y}$$

(n — нормаль). Формулы Вольтерра для определения вектора смещения также записаны с помощью операций над кватернионами. Искомый кватернион рассматривается как функция радиуса-вектора.

В динамическом случае уравнения теории упругости записываются с помощью операций дифференцирования

$$D_t = -\frac{\partial}{\partial t'} + \nabla, \qquad D_l = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t'} + \nabla,$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \sqrt{-\frac{\rho}{\mu}}\,\frac{\partial}{\partial t}$$

над кватернионами

$$\varphi' = -\chi\theta + \Omega, \quad \Omega = \omega + \omega',$$

где ω' — вспомогательный вектор. Граничные условия в динамическом случае требуют существенного обобщения операций дифференцирования над соответствующими кватернионами. Введением комплексного кватерниона автору удается в динамическом случае записать граничные условия в терминах дифференцирования моногенных функций кватернионов. Библ. 10 назв.

И. С. Аржаных

7784. Динамическая задача для упругого полупространства в плоском случае. Бородачев Н. М., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7 (а), 55—59

Приводятся результаты общего решения методом интегральных преобразований задачи о колебаниях упругого полупространства $y \geqslant 0$, при условии, что при $t \leqslant 0$ полупространство находилось в покое, а в момент времени $t=0$ на границе полупространства начинает действовать некоторый источник упругих возмущений, не зависящий от переменной z.

Показано применение общего решения к рассмотрению частных задач. В. И. Моссаковский

7785. Функции-потенциалы перемещений для уравнений упругого равновесия. Соломон (Functii-potential de deplasare pentru ecuatiile echilibrului elastic. Solomon Liviu), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. si fiz., 1957, **9**, № 2, 415—431 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются уравнения статики изотропного однородного упругого тела при наличии массовых сил и ставится вопрос о представлении вектора смещения через решения уравнения Пуассона (в однородном случае через гармонические функции). Показано, что все известные формулы общих решений этого типа можно получить единообразным способом, разлагая вектор смещения на два слагаемых, из которых одно соответствует уравнению Ляме с отсутствующим членом grad div **u** или rot rot **u**, а второе слагаемое является необходимой поправкой.

Библ. (20 назв.) неполная. В частности, отсутствуют ссылки на работы референта. И. С. Аржаных

7786. Двумерные задачи теории упругости для различных сред. Хардиман (Two-dimensional problems in elasticity involving different media. Hardiman N. J.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 28, 584—597 (англ.)

Методом Н. И. Мусхелишвили рассмотрены решения ряда плоских задач о напряжениях в неограниченной упругой изотропной плоскости, ослабленной круговым отверстием, в которое впаяно упругое изотропное круговое кольцо из другого материала при условии, что: а) внутреннее кольцо свободно от внешних усилий при всестороннем или одноосном растяжении плоскости на бесконечности усилиями T; б) заданы внешние усилия или перемещения на внутреннем контуре кольца и усилия на бесконечности. Анализа напряженного состояния возле отверстия в статье не проводится.

Следует заметить, что большинство задач, рассмотренных в статье, давно решено и опубликовано в советской литературе и составляет содержание гл. V монографии референта (Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, 1951, или немецкий перевод: Sawin G. N., Spanungserhöhung am Rande von Löchern, Berlin, 1956) Г. Н. Савин

7787. Контакт с трением между двумя упругими телами любой формы. Пачелли (Contatto con attrito tra due corpi elastici di forma qualunque: compressione e torsione. Pacelli Mauro), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, **10**, № 3—4, 155—184 (итал.)

Рассматривается решение контактной задачи при одновременном сжатии и кручении в предположении, что на одной (внутренней) части контактной площади заданы перемещения, а на другой — напряжения, определяемые с силой, сжимающей штамп. Контактная площадка и ее внутренняя часть предполагаются эллиптическими. К. В. Соляник-Красса

7788. Новые методы интегрирования динамических уравнений теории упругости и электромагнетизма. Збрана (Un nuovo, procedimento per l'integrazione delle equazioni dell'elastodinamica e dell'elettromagnetismo. Sbrana Francesco), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte I, 1955, **24**, 142—159 (итал.)

В работе автора (Ann. mat. pura ed appl., 1949, sez. 4, **30**, 191—200) изучены взаимно обратные преобразования

$$\iiint_{\Sigma} U(Q,t)\frac{\exp(\omega r)}{r(P,\ Q)}\,d\sum_Q = u(P,\ t;\ \omega), \qquad (1)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{i}{4\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\omega\exp(\varepsilon\omega^2)u(P,\ t;\ \omega)d\omega = \gamma u(P,\ t), \qquad (2)$$

где $\omega = c + i\lambda$, $c \geqslant 0$, $-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty$, $\gamma = 1$, если $P \in \Sigma$, $\gamma = 0$, если $P \in \Sigma$.

Посредством этих формул в данной работе установлены некоторые уравнения, содержащие интегралы по граничной поверхности и дифференцирование как по координатам, так и по времени, связывающие объемное расширение и его изображение (в смысле формулы (1)), а также вихрь и его изображение. Анало-

гично установлена связь вектора смещения с его изображением. Рассмотрены, кроме того, уравнения Максвелла.

В приложении указаны вычисления, связанные с предельным переходом (2), необходимые для использования установленных формул. И. С. Аржаных

7789. Механика материалов с нелинейной наследственностью. Грин, Ривлин (The mechanics of nonlinear materials with memory. Green A. E., Rivlin R. S.), Arch. Ration Mech. and Analysis, 1957, **1**, № 1, 1—21 (англ.)

Методами тензорного исчисления исследуются общие формы связей между напряжениями σ_{ij} и градиентами перемещений $\partial x_l/\partial x_r$, $\partial x_j/\partial x_s$ в анизотропной и изотропной упругих средах с учетом влияния фактора времени.

Используя идею Вольтерра (Volterra V., Theory of functionals, London, 1930) описания наследственных явлений с помощью функционалов, авторы конструируют зависимость, имеющую в тензорной символике вид

$$\sigma_{ij} = f^*\left[g^t_{pq_0}(\tau)\right]\delta_{ij} + \left(\frac{\partial x_l}{\partial X_r}\frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3}g_{rs}\delta_{ij}\right) f_{rs}\left[g^t_{pq_0}(\tau)\right]$$

В случае непрерывности функционалов f^* и f_{rs} в $0 \leqslant \tau \leqslant t$, последние могут быть аппроксимированы с любой степенью точности соответствующими полиномами кратных интегралов типа Вольтерра (см. цит. книгу). Библ. 13 назв. М. И. Розовский

7790. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Ворович И. И., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 2, 203—206

Рассматривается система приближенных нелинейных уравнений тонких оболочек в перемещениях, предложенная Х. М. Муштари (Изв. физ.-матем. общ. Казанского ун-та, 1938, **11**, № 3) для определения напряженных состояний с большим показателем изменяемости. Предполагается, что: 1) контур срединной поверхности состоит из конечного числа дуг с непрерывно вращающейся касательной, 2) внешние массовые силы $X, Y, Z \in L_p$, $p>1$, 3) срединная поверхность оболочки является ограниченной и достаточно гладкой областью Ω, 4) край (края) оболочки — защемленный.

Доказывается, что при выполнении этих условий: а) система Х. М. Муштари имеет по меньшей мере одно обобщенное решение — решение уравнений методом Бубнова—Галеркина согласно началу возможных перемещений, б) функции прогиба w обобщенных решений лежат в некоторой сфере пространства H_{12} (скалярное произведение $(w_1 \cdot w_2)$ в H_{12} определяется как работа изгибных напряжений от w_1 при деформации изгиба, обусловленной w_2; при этом функции w должны иметь в Ω непрерывные вторые производные и удовлетворить геометрическим краевым условиям).

Если внешние силы $X=\lambda X_0$, $Y=\lambda Y_0$, $Z=\lambda Z_0$, то система имеет только одну ветвь обобщенных решений $w(\lambda)$, такую, что $\| w(\lambda) \|_{H_{12}} 0$ при $\lambda \to 0$. Единственное решение существует также при пологих оболочках, если X, Y, Z достаточно малы по норме в L_p. Н. А. Алумяэ

7791. Напряженное состояние в упругом полупространстве, вызванное действием мгновенного источника тепла. Новацкий (The state of stress in an elastic semi-space due to an instantaneous source of heat. Nowacki W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 4, **5**, № 3, 165—173 (англ.; рез. русск.)

Определяется напряженное состояние в упругом полупространстве $z>0$ под действием мгновенного источника тепла, помещенного в начале координат. Рассматриваются случаи, когда на границе полупространства выполняется одно из двух краевых условий:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \text{ или } T|_{z=0} = 0.$$

В первом случае создаваемое источником температурное поле имеет вид

$$T = \frac{w}{(\pi\theta)^{3/2}} e^{-R^2/4\theta}$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, w — величина, пропорциональная мощности источника.

Составляющие тензора напряжений σ_{ij} представляются в виде суммы

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}.$$

Величины $\bar{\sigma}_{ij}$ определяются по формулам

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial i \partial j} - \nabla^2\Phi\delta_{ij}\right), \; i, j = x, y, z,$$

где

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a_t w}{4\pi R}\frac{2}{\pi}\int_0^{R/\sqrt{\theta}} e^{-\eta^2} d\eta$$

— частное решение уравнения для термоупругого потенциала

$$\nabla^2\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t T,$$

ν — коэффициент Пуассона, a_t — коэффициент теплового расширения. Величины $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ определяются из требования, чтобы составляющие полного тензора напряжений удовлетворяли краевым условиям:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \; \sigma_{rz}|_{z=0} = 0.$$

Случай нулевой граничной температуры исследуется аналогично.

В заключение рассматривается напряженное состояние, которое вызывается непрерывно действующим источником тепла. Д. П. Костомаров

7792. О некоторой квазистационарной трехмерной проблеме теории упругости. Новацкий (A quasi-stationary thermo-elastic problem in three dimensions. Nowacki W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 4, **5**, № 3, 155—163 (англ.; рез. русск.)

Определяется напряженное состояние в упругом полупространстве, под действием источника тепла, перемещающегося с постоянной скоростью w по границе полупространства. Источник помещается в начало движущейся системы координат, ось z которой направлена перпендикулярно границе раздела, ось x — в направлении движения. В такой системе координат задача является стационарной и уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\nabla^2 T = -\frac{v}{k}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Температура на границе полагается равной нулю.

Используя известное выражение для температурного поля, создаваемого равномерно движущимся

источником тепла мощности w в неограниченном пространстве

$$T = \frac{w}{4\pi\lambda}\frac{e^{-\mu(x+R)}}{R},$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mu = v/2k$, λ — коэффициент теплопроводности, автор находит температурное поле в рассматриваемом случае, как поле диполя

$$T = -\frac{w}{4\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-\mu(x+R)}}{R}\right).$$

Для определения тензора напряжений применен метод, описанный в реф. 7791. Д. П. Костомаров

7793. Теория дифракции от параболоида вращения. Фок В. А. В сб.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М., «Сов. радио», 1957, 5—56

Статья посвящена строгой теории дифракции на параболоиде вращения. Вначале подробно изложена теория параболических функций, являющихся решениями волнового уравнения в системе координат параболоида вращения.

Рассмотрены различные свойства этих функций: представление в виде рядов и интегралов, рекуррентные соотношения, асимптотическое выражение, связь функций с целыми значками и полиномов Лагерра и т. д.

Указаны также важные для теории дифракции разложения сферической и плоской скалярных волн по параболическим функциям. Дана также теория решений уравнений Максвелла в параболических координатах. Наиболее существенной частью этой теории является введение параболических потенциалов P и Q, связанных не с самими полями, а с их компонентами Фурье по углу φ. Параболические потенциалы позволяют формулировать предельные условия без помощи уравнений в конечных разностях.

Введены также вспомогательные потенциальные функции, которые, будучи связаны простыми соотношениями между собой и с потенциалами P и Q, значительно упрощают выражения для полей и облегчают их вычисление, когда найдены параболические потенциалы.

Вторая часть работы посвящена решению задачи об излучении диполя, находящегося в фокусе идеально-проводящего бесконечного параболоида вращения.

Потенциалы поля отраженной волны выражаются как в виде интегралов, так и в виде рядов двух типов, имеющих разные области сходимости. Произведено исследование поля в волновой зоне, при этом, в частности, из общих выражений выведены формулы, соответствующие приближению геометрической оптики и содержащие также первые поправочные члены. А. А. Ф.

7794. Дифракция электромагнитных волн на диске. Белкина М. Г. В сб.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М., «Сов. радио», 1957, 148—174

Методом разделения переменных в системе координат сплюснутого эллипсоида вращения решены следующие задачи: 1) найдено поле электрического диполя, находящегося на оси вращения идеально проводящего эллипсоида и параллельного ей; 2) найдено поле магнитного диполя, находящегося на оси вращения идеально проводящего диска и перпендикулярного к ней. Для ряда частных случаев проведены численные расчеты. Полученные результаты позволяют оценить «затеняющее» действие диска и сравнить его с проводящей сферой. Задача о рассеянии плоской волны на диске позволяет (благодаря принципу двойственности) сравнить строгое решение «классической» задачи о дифракции плоской волны на круговом отверстии в плоском экране с приближенным решением по методу Гюйгенса — Кирхгофа.

Строгая теория дифракции электромагнитных волн на диске уже рассматривалась в литературе. Данная статья отличается от ранее опубликованных работ как наличием новых численных результатов, так и употреблением новых потенциалов Φ и Ψ, не применявшихся ранее к данной задаче и связанных с составляющими Π_x и Π_z магнитного вектора Герца формулами

$$\Pi_x = \Phi(r, z), \quad \Pi_z = \Psi(r, z)\cos\varphi,$$

где z — ось вращения диска. Эти потенциалы имеют некоторые вычислительные преимущества.

Примечание референта. Употребляемая в статье система координат ξ, η, φ является левой, в то время как основные формулы статьи написаны (ошибочно) так, как если бы система была правой. Поэтому в некоторых формулах данной (и предыдущей) статьи следует изменить знаки (т. е. заменить φ на $-\varphi$). Численные результаты остаются справедливыми, поскольку они относятся к амплитудным характеристикам полей. Л. А. В.

7795. Характеристики излучения сферических поверхностных антенн. Белкина М. Г., Вайнштейн Л. А. В сб.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М., «Сов. радио», 1957, 57—125

Исследованы электромагнитные поля различных излучателей (вибраторов и щелей), помещенных на поверхности идеально проводящей сферы или вблизи нее. На основе классической теории дифракции и электродинамической теоремы взаимности выведены строгие формулы для поля элементарных излучателей, находящихся на сфере. Для значений параметра ka (k — волновое число, a — радиус сферы) в интервале $1 \leqslant ka \leqslant 10$ по этим формулам произведены расчеты и даны графики. Для $ka > 10$ путем асимптотического суммирования дифракционных рядов получены приближенные формулы.

По асимптотическим формулам для ряда значений ka в интервале $10 \leqslant ka \leqslant 100$ построены графики. Сравнение результатов, полученных по строгим и асимптотическим формулам при $ka = 10$, показывает, что при $ka \geqslant 10$ асимптотические формулы дают удовлетворительную точность. А. А. Ф.

7796. О распространении электромагнитных волн в ионизированном газе, находящемся во внешнем магнитном поле. Де-Сочо (Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico. De Socio Marialuisa), Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena, 1953—1954 (1954), 7, 68—77 (итал.)

Рассматривается распространение плоских электромагнитных волн в ионизированном газе, подвергающемся влиянию однородного магнитного поля.

Задача заключается в определении совместных решений уравнений Максвелла для ионизированного газа

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = i\varepsilon\omega\mathbf{E} + Ne\mathbf{v},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -i\mu\omega\mathbf{H}$$

и уравнение для макроскопической скорости $\mathbf{v}$ движения среды

$$(i\omega + \nu)\mathbf{v} + \omega_0[\mathbf{h}\times\mathbf{v}] = \frac{e}{m}\mathbf{E}.$$

Здесь $\mathbf{h}$ — единичный вектор, параллельный напряженности внешнего магнитного поля, которая пропорциональна ω_0; ε, μ, N, ν — постоянные характеристики, среды. Причем ищутся решения, имеющие вид плоских волн. Автором применением ряда векторных операторов получена общая формула для скорости распространения плоской волны в произвольном направлении, из которой как частные случаи получаются ранее известные результаты.

Показано, что электрическое и магнитное поле волны, распространяющейся в ионизированном газе, находящемся во внешнем магнитном поле, всегда имеет определенную поляризацию. Д. З. Авазашвили

7797. О двух стационарных задачах термоупругости. Новацкий (Nowacki Witold), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 5, 579—592 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматривается напряженное состояние в упругом пространстве и упругом полупространстве, вызванное действием температурного поля.

В первой задаче температурное поле описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

и граничными условиями:

$$-2\lambda[\partial T/\partial z]_{z=0} = Q \text{ при } 0 < r < a,$$

$$[\partial T/\partial z]_{z=0} = 0 \text{ при } r > 0 \qquad (2)$$

и $T = 0$ на бесконечности.

В случае бесконечного упругого пространства компоненты напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ определяются из уравнения

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial_i \partial_j} - \nabla^2 \Phi\, \delta_{ij}\right),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а упругий потенциал Φ определяется из уравнения

$$\nabla^2\Phi = \vartheta_0 T, \qquad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t,$$

ν — отношение Пуассона, α_t — коэффициент термического расширения.

В случае упругого полупространства к условиям (2) на плоскости $z = 0$ добавляется предположение, что в этой плоскости отсутствуют напряжения. Компоненты напряженности (σ_{ij}) в полупространстве ищутся в виде суммы

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}$$

и при условии, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\bar{\sigma}_{rz} + \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = 0 \text{ и } \bar{\sigma}_{zz} + \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 0 \text{ при } z = 0.$$

Для определения $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ используются их выражения через функцию Лява φ, которая удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0.$$

Во второй задаче температурное поле описывается уравнением (1) и граничными условиями:

$$T = V \quad \text{при } z = 0 \text{ и } 0 < r < a, \qquad (3)$$

$$\partial T/\partial z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } r > a,$$

$$T = 0 \text{ на бесконечности.}$$

Состояние напряженности для бесконечного пространства в этом случае также находится с помощью упругого потенциала Φ, а состояние напряженности полупространства — так же как и в первой задаче.

С помощью функции Грина рассмотрены общие случаи, когда граничные условия имеют вид

$$-2\lambda[\partial T/\partial z]_{z=0} = Q(x, y) \text{ в области } \Gamma,$$

$$[\partial T/\partial z]_{z=0} = 0 \text{ вне области } \Gamma, —$$

для первой задачи, и

$$T = V(x, y) \text{ при } z = 0 \text{ в области } \Gamma,$$

$$\partial T/\partial z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ вне области } \Gamma,$$

$$T = 0 \text{ на бесконечности, —}$$

для второй. При определении компонент дополнительного напряжения $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$* в первой задаче при этом используется функция Галеркина χ, удовлетворяющая уравнению:

$$\nabla^2\nabla^2\chi = 0.$$

Во всех рассмотренных случаях показано, что компоненты напряжения σ_{xz}, σ_{yz} и σ_{zz} равняются нулю.

Полученные в работе выводы справедливы также для случая упругого слоя, ограниченного плоскостями, на которых выполняются условия (2) или (3).

В. И. Беляев

7798. О линейных тепловых задачах с одной движущейся границей. Редозубов Д. В., Ж. техн. физики, 1957, **27**, № 9, 2149—2157

С помощью преобразования Римана—Меллина автор находит несколько частных решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с одной подвижной границей

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(y(t), t) = \psi(t), \quad u(x, 0) = 0.$$

Эти решения выражаются через известные функции для частных случаев $y(t) = \beta t^\sigma$ $(\sigma = \frac{1}{2}, 1)$ и специального вида $\psi(t)$.

Все результаты автора следуют из работы Нордона (Nordon J., C. r. Acad. sci., 1949, **223**, № 2, 167), в которой найден весь класс автомодельных решений уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ вида $u(x, t) = t^m f(z)$, где $z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}$, а функция $f(z)$ выражается через функции Вебера $D_{-2m-1}(z\sqrt{2})$ и $\mathrm{Re}D_{2m}(iz\sqrt{2})$.

Для некоторых частных значений m отсюда следуют результаты автора.

В работе имеются неточности (например, в постановке задач (1) и (2) отсутствует условие $u_1(x, 0) = f_1(x)$ и др.).

А. А. Самарский

7799. К вопросу об единственности решения одномерной задачи Стефана в случае однофазного начального состояния теплопроводящей среды. Рубин-

штейн Л. И., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 3, 387—390

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}=\frac{\partial U_1}{\partial t},\ 0<x<y(t);\ a^2\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}=\frac{\partial U_2}{\partial t},\ y(t)<x<1; \quad (1_1)$$

$$U_1(0,t)=f_1(t)\leqslant 0,\ U_2(x,0)=\varphi(x)\geqslant 0;\ U_2(1,t)=f_2(t)\geqslant 0; \quad (1_2)$$

$$U_1(y(t),t)=U_2(y(t),t)=0; \quad (1_3)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}U_1(y(t),t)-\frac{\partial}{\partial x}U_2(y(t),t);\ y(0)=0. \quad (1_4)$$

Предполагается, что $f_i(t)$, $\varphi(x)$ таковы, что при $0\leqslant t\leqslant T$ $\frac{\partial}{\partial x}U_i\geqslant 0$ $(i=1,2)$ всюду в области их существования и, кроме того, что $|f_i(t)|$ — неубывающие функции от $t(0\leqslant t\leqslant T)$.

Доказана при этих условиях единственность решения задачи (1_1-1_4).

Существование решения задачи (1_1-1_4) доказано автором ранее (Докл. АН СССР, 1948, 62, № 2).

А. А. Самарский

7800. К стационарному распространению тепла сквозь оболочку, разделяющую две среды с однородными температурами. Синьорини (Sulla propagazione stazionaria del calore attraverso a un involucro separante due ambienti a temperatura uniforme. Signorini Antonio), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, **21**, № 1-2, 78—86 (итал.)

Исходя из классических соотношений для стационарного распространения тепла в твердом теле

$$\begin{cases}\operatorname{div} q=0, & q=-\varkappa\operatorname{grad} u\\ q_n=-\gamma(u-U),\end{cases}$$

где u — температура, $\varkappa$ — коэффициент внутренней теплопроводности в произвольной точке P тела c; γ — коэффициент теплообмена на поверхности σ тела c, n — внешняя нормаль, а U — внешняя температура, получена непосредственная приближенная оценка для количества тепла Q, которое в условиях стационарного распространения проходит за единицу времени сквозь оболочку, разделяющую две среды с однородными температурами:

$$\frac{W^2}{I_w}\leqslant\frac{Q}{\Delta}\leqslant\frac{1}{\Delta^2}L_\varphi.$$

Здесь

$$I_v=\int_c\frac{v^2}{\varkappa}dc+\int_\sigma\frac{v_n^2}{\gamma}d\sigma,$$

$$L_\varphi=\int_c\varkappa(\operatorname{grad}\varphi)^2dc+\int_\sigma\gamma(\varphi-v)^2d\sigma \text{ и } W=\int_{\sigma_0}w_n d\sigma_0,$$

где v — произвольный вектор, φ — произвольный скаляр, а w — произвольный вектор, соленоидальный в c, удовлетворяющий условию, чтобы $W\neq 0$. Через Δ обозначена разность внешних температур.

Полученное двойное неравенство рассмотрено далее применительно к случаю, когда γ постоянно на внутренней и внешней поверхностях оболочки, а коэффициент внутренней теплопроводности $\varkappa$ принимает постоянные значения на поверхностях, заключенных между внутренней и внешней поверхностями оболочки. Показано, что нижний и верхний предел, указанные для Q, совпадают с точным значением в случае тонкой оболочки. Оценка Q рассмотрена также для электростатики, когда γ_0 и γ_1, соответствующие внутренней и внешней поверхностям оболочки, обращаются в бесконечность.

В. И. Беляев

7801. Об основном уравнении теории нейтронной диффузии. Алонсо (Consideraciones sobre la ecuacion fundamental para la difusion de neutrones. Alonso Marcelo), Rev. Soc. cubana cienc. fís. y mat., 1955, 3, № 4, 99—102 (исп.)

Из элементарных соображений выводится основное уравнение теории нейтронной диффузии, описывающее распределение потока нейтронов по пространству и энергии при допущении непрерывного замедления. Отмечаются некоторые частные случаи, допускающие упрощение уравнения. Самостоятельного научного значения работа не имеет.

Ю. Н. Днестровский

7802. Одномерная задача диффузии с коэффициентом диффузии, являющимся линейной функцией концентрации: сведение к уравнению первого порядка. Парсонс (One-dimensional diffusion with the diffusion coefficient a linear function of concentration: reduction to an equation of the first order. Parsons D. H.), Quart. Appl. Math., 1957, **15**, № 3, 298—303 (англ.)

Задача сводится к решению уравнения

$$2\frac{d}{dy}\left(D\frac{dc}{dy}\right)+y\frac{dc}{dy}=0$$

с краевыми условиями

$$c\to c_1 \qquad \text{при } y\to-\infty$$

$$c\to c_2 \qquad \text{при } y\to+\infty$$

Коэффициент диффузии предполагается линейной функцией концентрации

$$D=D^*\left\{1+\frac{1-b}{1+b}\left[\frac{{}^1/_2(c_1+c_2)-c}{{}^1/_2(c_1-c_2)}\right]\right\},$$

D^* и b — постоянные.

Производя замену переменных

$$y=2\sqrt{D^*}\frac{1}{\sqrt{1+b}}ue^{-w}$$

$$c=c_2+\frac{c_1-c_2}{1-b}(1-e^{-2w}),$$

автор получает следующую задачу:

$$\frac{d^2w}{du^2}+u\frac{dw}{du}-2(1+u^2)\left(\frac{dw}{du}\right)^2+u(3+u^2)\left(\frac{dw}{du}\right)^3=0, \quad (2)$$

$$w\to-{}^1/_2\log b \text{ при } u\to-\infty$$

$$w\to 0 \qquad \text{при } u\to+\infty.$$

Уравнение (2) подстановкой $p = -\frac{dw}{du}$ сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{du} + up + 2(1+u^2)p^2 + u(3+u^2)p^3 = 0. \quad (3)$$

Исследуются свойства решений уравнения (3) и делаются замечания относительно численного решения исходной задачи. Д. П. Костомаров

См. также: 7399, 7417, 7482, 7638, 7666, 7825, 7826, 7827, 7896, 7898, 7910, 7914, 8150

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

7803. Интегральные уравнения. Трикоми (Integral equations. Tricomi Francesco Giacomo. New York—London, Interscience, 1957, VIII, 238 pp., ill., 52 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 423, 9 (англ.)

7804. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости. Мамедов Я. Д., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 33—34

Задача о продольном изгибе стержня переменной жесткости была исследована качественными методами нелинейного функционального анализа референтом (РЖМат, 1957, 3310) и И. А. Бахтиным и референтом (РЖМат, 1956, 8859).

Автор продолжает исследование нелинейного интегрального уравнения, к которому сводится задача о продольном изгибе сжатого стержня. Это уравнение имеет вид

$$\varphi(s) = P\rho(s)\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt\left\{1 - \left[\int_0^1 \frac{\partial K(s,t)}{\partial s}\varphi(t)\,dt\right]^2\right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где P—нагрузка, $\rho(s)$—переменная жесткость, а

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1-t) \text{ при } s \leqslant t, \\ t(1-s) \text{ при } t \leqslant s. \end{cases}$$

В дополнение к известным результатам автор показывает, что при нагрузках, близких к критической силе Эйлера и больших, чем эта сила, положительные решения уравнения (1) могут быть получены методом последовательных приближений при специальном выборе нулевых приближений.

Утверждается, что прогиб $y(s) = y(s; P)$ вместе со своей второй производной $y''_{s^2}(s, P)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями нагрузки. М. А. Красносельский

7805. Аналитическое исследование возмущенного линейного интегрального уравнения. Рыбин П. П., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 75—78

Рассматривается интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds + \mu\int_a^b \Gamma(x, s, \varphi(s))\,ds, \quad (1)$$

параметр μ достаточно мал, $K(x, s)$ — регулярное ядро, $\Gamma(x, s, \varphi)$ разложима в ряд в окрестности точки $\varphi = \varphi_0$ с непрерывными коэффициентами.

Автор, предполагая существование решения $\varphi_0(x)$ уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$, $\mu = 0$, изучает поведение решения в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, $\mu = 0$ по μ при фиксированном значении λ_0.

Применяя метод Некрасова—Назарова, он доказывает существование решения аналитического относительно параметра μ в случае

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, s, \varphi_0(s))\,q(x)\,ds\,dx = 0,$$

где $q(x)$ — собственная функция союзного ядра $K(s, x)$. Причем рассматривается случай однозначной и многозначной разрешимости.

Доказывается теорема: Если λ_0 — характеристическое число ядра $K(x, s)$ и (ранг предполагается равным единице)

$$\int_a^b\int_a^b A_1(x,s)\,q(x)\,dx\,ds \neq 0,$$

то уравнение (1) имеет единственное голоморфное решение $\varphi(x, \lambda_0, \mu)$, разлагающееся в ряд по степеням μ и стремящееся к $\varphi_0(x)$ при $\mu \to 0$.

Далее автор рассматривает уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds + \mu\int_a^b [A_0(x,s) + A_1(x,s)\varphi(s) + A_2(x,s)\varphi^2(s)]\,ds$$

и доказывает существование особого решения, т. е. решения $\varphi(x, \mu)$ такого, что $\lim_{\mu \to 0}\varphi(x, \mu) = \infty$.

К. Т. Ахмедов

7806. Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи. Сахнович Л. А., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 4, 666—669

Рассматривается вольтерровский оператор

$$Kf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)\,dt$$

($0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l$) с достаточно гладким ядром: существуют ограниченные производные $\partial^{j+k}K(x,t)/\partial x^j\,\partial t^k$ ($j, k = 0, 1, 2$) и $d^2\{\partial^2 K(x,t)/\partial x^2 \mid_{t=x}\}/dx^2$. Доказана (в основных чертах) теорема: Если $K(x, x) \equiv 0$ и $\partial K(x,t)/\partial x \mid_{t=x} \equiv 1$ (автор указывает, что это условие может быть заменено более общим $\partial K(x,t)/\partial x \mid_{t=x} \neq 0$), то существует (очевидно, обратимое) преобразование вида

$$f(x) = Vg(x) =$$

$$= \left[g(x) + \int_0^x N(x,t)\,g(t)\,dt\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^x g(t)\,dt\right],$$

осуществляющее в пространстве $L^2(0, l)$ линейную эквивалентность оператора K с оператором повторного интегрирования $K = VI^2V^{-1}$, где $I^2g(x) =$

$$= \int_0^x (x-t)\,g(t)\,dt.$$

Доказательство по существу состоит в построении оператора K^{-1}, обратного к K, в форме интегро-дифференциального оператора $\Lambda y(x) = L(x) + y$

$+\int_0^x M(x, t)\, y(t)\, dt$, где $L = d^2/dx^2 + q(x)$, и построении преобразования собственных функций Λ в собственные функции оператора d^2/dx^2; указывается (без доказательства), что последнее преобразование строится теми же методами (В. А. Марченко), которые используются при преобразовании L в d^2/dx^2.

Результат применен к одному вопросу единственности обратной задачи (определение уравнения по решению) для некоторых специальных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. М. К. Фаге

7807. Об одном интегральном уравнении. Джавадов М. Г., Тр. 5-й Научн. конференции аспирантов АН АзербССР, Баку, АН АзербССР, 1957, 151—157

Пусть $\rho(\lambda)$ — возрастающая функция с ограниченной вариацией, G — множество функций $g(t, \lambda)$, удовлетворяющих условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \max_t \left| g(t, \lambda) \right| d\rho(\lambda) < +\infty.$$

Множество G есть пространство Банаха, если под нормой понимать число

$$\| g \| = \int_{-\infty}^{+\infty} \max_t \left| g(t, \lambda) \right| d\rho(\lambda).$$

Доказывается полнота G.

Основной результат:

Теорема. Если $\rho(\lambda)$—возрастающая функция с ограниченной вариацией, $F(t, \lambda)$, $K(t, \lambda, \tau, \mu)$ — непрерывные функции своих аргументов и удовлетворяются условия:

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \max_t \left| F(t, \lambda) \right| d\rho(\lambda) < +\infty;$$

2) $K(t, \lambda, \tau, \mu)$ удовлетворяет условию

$$|K(t, \lambda, \tau, \mu)| \leqslant \alpha(\lambda, \mu)$$ и для всякого $g(t, \lambda) \in G$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda, \mu) \max_t \left| g(t, \lambda) \right| d\rho(\mu) d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant k \int_{-\infty}^{+\infty} \max_t \left| g(t, \lambda) \right| d\rho(\lambda),$$

где k — некоторое число, то интегральное уравнение

$$A(t, \lambda) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, \lambda, \tau, \mu) A(\tau, \mu) d\rho(\mu) + F(t, \lambda)$$

имеет непрерывное относительно t и λ решение $A(t, \lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \max_t \left| A(t, \lambda) \right| d\rho(\lambda) < +\infty.$$

Т. И. Вигранеко

7808. Об одном интегральном уравнении теории дифракции упругих волн. Розо (Sur une équation intégrale de la théorie de la diffraction des ondes élastiques. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 23, 2013—2014 (франц.)

Рассматривается интегральное уравнение типа Винера—Хопфа:

$$i\tau\cos\varphi \exp(i\tau x\cos\varphi) + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 (G_2 - G_1)}{\partial x^2} + \sigma^2 G_2 \right\} f(x')\, dx' = 0 \quad (1)$$

$$(x > 0),$$

где

$$G_1 = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\tau | x - x' |), \qquad G_2 = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sigma | x - x' |),$$

$$\mathrm{Im}\sigma > 0, \ \mathrm{Im}\tau > 0.$$

Неизвестная функция $f(x)$, определенная для $x > 0$, продолжается нулем для $x < 0$. Обозначим через $g(x)$ функцию, равную нулю для $x > 0$ и равную интегралу в (1) для $x < 0$. Пусть $|f(x)| < Ce^{-\eta x}$ $(\eta >)$ для x достаточно больших, $|g(x)| < Ce^{kx}$ $(k > 0)$ для $x < 0$ достаточно малых и, вводя преобразование Фурье, получим

$$\bar{g}(w) = \frac{\tau\cos\varphi}{w - \tau\cos\varphi} + \frac{i}{2}\left\{ \frac{w^2}{\tau}\left(1 - \frac{w^2}{\tau^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sigma\left(1 - \frac{w^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \bar{f}(w), \quad (2)$$

справедливое в полосе

$$-\min(k, \mathrm{Im}\tau) < \mathrm{Im}w < \min(\eta, \cos\varphi, \mathrm{Im}\tau), \ (\cos\varphi > 0).$$

Функция $\Phi_+(w) = \bar{g}(w)$ голоморфна в $\mathrm{Im}w \geqslant 0$, $\Phi_-(w) = \bar{f}(w)$ голоморфна в $\mathrm{Im}w \leqslant 0$. Полагая $\psi_+(w) = (w+i)^{1/2}\Phi_+(w)$, $\psi_-(w) = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{4}(w - i)^{1/2}\Phi_-(w)$.

Тогда из (2) на вещественной оси имеем

$$\psi_+(u) = \frac{\tau\cos\varphi (u + i)^{1/2}}{u - \tau\cos\varphi} + T(u)\psi_-(u), \quad (3)$$

где

$$T(u) = \frac{2i}{\sigma^2 + \tau^2}\left[\frac{u^2}{\tau}\left(1 - \frac{u^2}{\tau^2}\right)^{-1/2} + \sigma\left(1 - \frac{u^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} \right](1 + u^2)^{1/2}.$$

Таким образом решение уравнения (1) свелось к решению задачи Гильберта (3). Изучая свойства функции $\Phi_-(w)$, можно показать, что $f(x)$ равна нулю для $x < 0$, $f(x) = O(x^{-1/2})$ для $x > 0$ в окрестности нуля, $|f(x)| < e^{-\eta x}(\eta > 0)$ для $x > 0$ достаточно больших и, наконец удовлетворяет условию Гельдера. М. М. Смирнов

7809. Об X- и Y-функциях Чандрасекхара. Бабридж (On the X- and Y-functions of S. Chandrasekhar. Busbridge J. W.), Astrophys. J., 1955, 122, № 2, 327—348 (англ.)

Изучены X- и Y-функции, определяемые системой уравнений

$$X(\mu) = 1 + \mu \int_0^1 \frac{\Psi(u)}{\mu + u}\left[X(\mu)X(u) - Y(\mu)Y(u) \right] du$$

$$Y(\mu) = e^{-\tau/\mu} + \mu \int_0^1 \frac{\Psi(u)}{\mu - u}\left[Y(\mu)X(u) - X(\mu)Y(u) \right] du,$$

где $\Psi(u)$ — характеристическая функция, положительная при $0 \leqslant u \leqslant 1$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \Psi(u)du \leqslant \frac{1}{2}.$$

Через эти функции выражаются коэффициенты яркости плоского слоя мутной среды оптической толщины τ, освещаемого параллельными лучами.

Введены новые функции $\xi(\mu) = X(\mu) + Y(\mu)$ и $n(\mu) = X(\mu) - Y(\mu)$, для которых получены линейные интегральные уравнения:

$$\xi(\mu)T(\mu) = 1 + e^{-\tau/\mu} + \int_0^1 \frac{\mu\Psi(u)}{u-\mu}\xi(u)du - e^{-\tau/\mu}\int_0^1 \frac{\mu\Psi(u)}{u+\mu}\xi(u)du,$$

$$n(\mu)T(\mu) = 1 + e^{-\tau/\mu} + \int_0^1 \frac{\mu\Psi(u)}{u-\mu}n(u)du + e^{-\tau/\mu}\int_0^1 \frac{\mu\Psi(u)}{u+\mu}n(u)du.$$

В уравнениях (2) первые интегралы включают ядра типа Коши.

В каждое уравнение входит лишь по одной неизвестной функции.

Уравнения (2) могут быть записаны в форме уравнений Фредгольма, в которой они и используются для доказательства ряда теорем относительно X- и Y-функций. В частности, установлено существование функций $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ для достаточно больших значений τ. Уравнения (1), определяющие функции, которые именуются в статье X- и Y-функциями Чандрасекхара, впервые были получены В. А. Амбарцумяном (Докл. АН СССР, 1943, **38**, № 8). Линейные уравнения (2) ранее были найдены В. В. Соболевым (Докл. АН СССР, 1949, **49**, № 4). Библ. 7 назв.

И. Н. Минин

7810. Теорема существования для системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Гусейнов, Абасов (Коши нувəли гейри-хəтти сингуляр интеграл тənликлəрин системи учун варлыг теореми. Һ. **Гусейнов** Э. И., **Абасов** А. М.), Элми эсəрлəр. Азəрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 6, 3—29 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается система нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши

$$u_i(x) = \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{K_{ij}(x, s, u_1(s), \ldots, u_n(s))}{s-x}\, ds + F_i(x), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Известно, что первым из авторов рассматривалось нелинейное сингулярное интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{K(x, s, u(s))}{s-x}\, ds. \quad (2)$$

В настоящей работе обобщаются все результаты, полученные Гусейновым для уравнения (2) на систему (1). Для этого сначала строится пространство $H^{(n)}_{(\alpha,\beta,\delta)}$ с элементами $u = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$;

$$|u_i(x)| < \frac{K}{|x-a|^\alpha |x-b|^\beta};$$

$$|u_i(x+\Delta x) - u_i(x)| < \frac{K}{|x-a|^\alpha |x+\Delta x-b|^\beta} \times$$

$$\times \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|\ |x+\Delta x-b|}\right)^\delta;$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = \text{const} > 1;$$

$$(0 < \alpha, \beta, \delta,\ \alpha+\delta,\ \beta+\delta < 1),$$

$$0 < \Delta x < \min\left\{\frac{|x-a|}{4}, \frac{|x-b|}{4}\right\};\ x \in (a, b).$$

Вводится метрика

$$\rho(A, \widetilde{A}) = \max_{x\in(a,b)} \left\{ \sum_{i=1}^n |u_i(x) - \widetilde{u}_i(x)|\, |x-a|^{\alpha+\beta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta} \right\}.$$

В первом параграфе легко доказываются основные леммы Гусейнова для n-функций.

Во втором параграфе, применяя метод неподвижных точек, доказывают теорему о существовании по крайней мере одного решения системы (1) в пространстве $H^{(n)}_{(\alpha,\beta,\delta)}$.

К. Т. Ахмедов

7811. О полной непрерывности оператора Урысона. Султанов Р. М. (П. С. Урысон операторунун тамам кəсилмəзлийи һаггында. **Султанов** Р. М.), Элми эсəрлəр Азəрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 2, 19—25 (азерб.; рез. русск.)

Изучается вопрос об условиях, при которых оператор

$$K\varphi(x) = \int_G K[x, s, \varphi(s)]ds,$$

где G — ограниченное измеримое множество n-мерного пространства, действует из $Lp_1(G)$ в $Lp_2(G)$ и является вполне непрерывным оператором. Автор предлагает условия полной непрерывности, несколько более общие, чем указанные Л. А. Ладыженским и референтом (РЖМат, 1955, 3798). К сожалению, доказательство содержит ошибку, которую, как сообщил автор, пока не удалось устранить.

М. А. Красносельский

7812. О положительных решениях некоторых нелинейных интегральных уравнений. Вайнберг М. М., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 61—72

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$F(u(x), x) = \int_B K(x, y, u(y))\, dy + f(x). \quad (1)$$

Доказывается, что если $F(u, x)$ — возрастающая функция по $u \in [0, a]$ при каждом $x \in B$, непрерывна по $x \in$ и u, B — ограниченная замкнутая область n-мерного евклидова пространства, $a > 0$ — фиксированное число, $F(0, x) = 0$, $K(x, y, u)$ — монотонно возрастающая функция по u, при фиксированных $x, y \in B$, $K(x, y, 0) = 0$ и непрерывна по совокупности всех аргументов, $f(x)$ — непрерывна, существует непрерывная положительная функция $u_0(x)$ такая, что $u_0(x) \leqslant a$ и $F(u_0(x), x) > f(x) + A(u_0)$, где $A(u)$ — интегральный член уравнения (1), то уравнение (1) имеет положительные решения $V(x)$ и $u(x)$, $V(x) \leqslant u(x)$, которые находятся методом последовательных приближений.

Далее доказывается аналогичная теорема о существовании решений уравнения (1), принадлежащих пространству $L^p(B)$.

Э. С. Цитланадзе

7813. Замечания об одном явлении упругого нелинейного гистерезиса. Хаймович (Observatii asupra unui fenomen de hysteresis elastic neliniar. Haimovici Adolf), Studii si cercetari stiint. Acad. RPR Fil. Jasi. Mat., 1956, 7, № 1, 9—13 (рум.; рез. русск., франц.)

Предлагается записывать связь между моментом $M(t)$ и углом кручения $\omega(t)$ стержня с учетом наследственности в виде

$$\omega(t)=\left[k(t)+\int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\,M(\tau)\,d\tau\right]M(t)+$$
$$+\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)\,M(\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

Пользуясь теоремой Банаха о неподвижной точке, автор устанавливает достаточные условия разрешимости уравнения (1) относительно $M(t)$.

Доказано, что если k, ω, f и φ удовлетворяют условиям

$$0<\sup\omega(t)=\Omega<+\infty,\quad \sup M(t)=\mu,\quad K=\inf|k(t)|$$
$$K'=\sup|k'(t)|,\ -\infty<t<+\infty;\qquad K>0,\quad \mu=\alpha K A^{-1},$$
$$0\leqslant\alpha<1,\quad A\Omega<\alpha K\,[(1-\alpha)K-B],$$
$$\text{где } A=\int_0^\infty f(\theta)\,d\theta,\quad B=\int_0^\infty\varphi(\theta)d\theta,$$

то $M(t)$ принадлежит к классу ограниченных функций.

Если к тому же k, ω, f и φ непрерывны, то уравнение (1) допускает решение в классе непрерывных функций. Библ. 4 назв. М. И. Розовский

7814. О положительных решениях одного класса нелинейных уравнений в функциональном пространстве. Мамедов Я. Д. (Элми эсэрлэр Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 3, 15—19 (рез. азерб.)

Л. А. Ладыженским и референтом (РЖМат, 1955, 3839) на базе теории М. Г. Крейна конусов в банаховых пространствах развиты методы исследования задачи о собственных векторах и о спектре вогнутых операторов, оставляющих инвариантным конус. В качестве приложений были получены усиления известных теорем П. С. Урысона о положительных собственных функциях и о спектре нелинейного интегрального оператора

$$K\varphi(x)=\int_G K[x,\ s;\ \varphi(s)]\,ds.$$

Автор показывает, что указанный выше метод применим к установлению аналогичных теорем о собственных функциях и спектре для операторов

$$A\varphi(x)=\Phi\{x;\int_G K[x,\ s;\ \varphi(s)]\,ds\}.$$

более сложного вида. М. А. Красносельский

7815. О многозначном продолжении решения одного класса нелинейных интегральных уравнений. Насибов (Бир синиф гейрихэтти интеграл тэнликлэрин hэлл эринин чохгиймэтли давамы hаггында. Нэсибов С. М.), Элми эсэрлэр. Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 8, 3—8 (азерб.; рез. русск.)

Автор рассматривает уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_c^1 K_1(x,s)\,f_1(s,\varphi(s),\overline{\varphi}(s))\,ds+$$
$$+\overline{\lambda}\int_0^1 K_2(x,s)\,f_2(s,\varphi(s),\overline{\varphi}(s)\,ds, \qquad (1)$$

$K_1(x,s)$, $K_2(x,s)$ — комплексные функции вещественных аргументов, $0\leqslant x,s\leqslant 1$, причем если

$$K_1(x,s)=H_1(x,s)+iH_2(x,s);\qquad K_2(x,s)=H_3(x,s)+$$
$$+iH_4(x,s),$$

то $H_j(x,s)$ $(j=1,4)$ — регулярные ядра в смысле теории линейных интегральных уравнений. Функции $f_1(x,u,v)$, $f_2(x,u,v)$ непрерывны по x $(0\leqslant x\leqslant 1)$ и аналитические по последним аргументам. Следуя А. Э. Стапану, автор для исследования многозначной продолжимости решения уравнения (1) по параметру λ применяет метод Э. Шмидта.

Строится уравнение функционального разветвления

$$\eta=\sum_{m=1}^{\infty}L_m\eta^m+\sum_{m=0}^{\infty}\eta^m\sum_{n+k>1}L_{mnk}\,\mu^n\overline{\mu}^k. \qquad (2)$$

Таким образом, в зависимости от числа решений уравнения (2) в окрестности $\mu=0$ получаются соответствующие решения уравнения вида

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\eta^m V_{00}^m(x)+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\eta^m\sum_{n+k>1}V_{nk}^m(x)\cdot(\lambda-\lambda_0)^n(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^k,$$

где $V_{00}^m(x)$, $V_{nk}^m(x)$ — вполне определенные функции $m,n,\ k=0,1,\ldots$. Автор не делает ссылку на известные работы, посвященные вопросам продолжения решения по параметру. К. Т. Ахмедов

7816. Об условиях существования периодических решений линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Яковлева Г. Ф., Уч. зап. физ.-матем. фак. Кирг. ун-та, 1957, вып. 4, ч. 2, 111—127

Пользуясь преобразованием Лапласа, определяемым формулой

$$\varphi(p)=\int_a^\infty e^{-p(x-a)}f(x)\,dx, \qquad (1)$$

автор без всяких изменений хорошо разработанный проф. А. И. Лурье операционный метод разыскания периодического решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n порядка с постоянными коэффициентами применяет к интегро-дифференциальному уравнению вида

$$L_n(z)+\int_a^x\sum_{j=1}^{l}P_j(x-t+a)e^{-\beta_j(x-t+a)}M_m(t)dt=f(x), \qquad (2)$$

в котором $L_n(z)$ и $M_m(z)$ — дифференциальные операторы порядка n и m, $z(x)$ — неизвестная функция, $P_j(x)$ и $f(x)$ — соответственно заданные: целый полином степени μ_j, периодическая функция периода ω и β_j — постоянное число Рассматривается случай, когда „характеристическое" уравнение $\varphi(p)=0$ ($\varphi(p)$ — знаменатель дроби которой представлено изображение функции $z(x)$, имеет только простые корни. В теоремах 6 и 7 сформулированы полученные результаты о существовании периодических решений уравнения (2). Приведено два примера с подробными решениями. Ф. А. Шелковников

7817. К колебаниям крыла большого удлинения в дозвуковом потоке. Сиразетдинов Т. К., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 1, 43—52

7818. Однозначное продолжение решения одного класса нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Наджафов К. А., Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1957, вып. 17, 5—12 (рез. азерб.)

Рассматривается уравнение

$$F\left[\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \lambda\right] = \\ = \int_0^1 K(x,\ s,\ \lambda) f\left[s,\ \varphi(s), \varphi'(s), \lambda\right] ds, \qquad (1)$$

где $F(\varphi, \varphi', \varphi'', \lambda)$ — аналитическая функция своих аргументов, $K(x, s, \lambda)$ — регулярное ядро в $0 \leqslant x,\ s \leqslant 1$ при фиксированном λ и аналитическая функция λ; $f(s, \varphi, \varphi', \lambda)$ — непрерывная функция относительно s в $[0, 1]$ и аналитическая функция относительно $\varphi, \varphi', \lambda$. Автор, следуя Н. Н. Назарову (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1948, вып. 4), предполагает существование решения $\varphi_0(x)$ при $\lambda = \lambda_0$.

Полагая затем $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x)$, представляет решение уравнения (1) в виде ряда

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \psi_i(x), \qquad (2)$$

где функции $\psi_k(x)$ определяются из системы рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений

$$\psi_k(x) = \int_0^1 K_1(x, s, \lambda_0)\, \psi_k(s)\, ds + \int_0^1 K_2(x,\ s, \lambda_0)\ \psi'_k(s)\, ds - \\ - \frac{1}{A_{1000}}\left[A_{0100}\psi'_k(x) + A_{0010}\psi''_k(x)\right] + \\ + \widetilde{F}_k\left(x, \psi_1, \psi'_1, \psi''_1, \ldots, \psi_{k-1}, \psi'_{k-1}, \psi''_{k-1}\right). \qquad (3)$$

При этом F_k есть известная функция своих аргументов,

$$K_1(x, s, \lambda_0) = \frac{B_0(x, s, \lambda_0)\, C_{100}(s, \lambda_0)}{A_{1000}(x, \lambda_0)};$$

$$K_2(x, s, \lambda_0) = \frac{B_0(x, s, \lambda_0)\, C_{010}(s, \lambda_0)}{A_{1000}(x, \lambda_0)},$$

а величины A_{lmnp}, B_k, C_{lmn} получаются в результате разложения функций $F(\varphi, \varphi', \varphi'', \lambda)$, $K(x, s, \lambda)$, $f(s, \varphi(s), \varphi'(s), \lambda)$ в ряды по степеням μ.

При помощи подстановки

$$\psi_k(x) = \int_0^x (x - s)\, \omega_k(s)\, ds$$

система (3) преобразуется в систему интегральных уравнений вида:

$$\omega_k(x) = \int_0^1 H(x, s, \lambda_0)\, \omega_k(s)\, ds + \Phi_k(x, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1}).$$

$$(k = 1, 2, \ldots) \qquad (4)$$

Полагая, что 1 не является собственным числом ядра $H(x, s, \lambda_0)$, $\Gamma(x, s, \lambda)$ есть резольвента $H(x, s, \lambda_0)$, автор в заключение формулирует теорему:

Теорема. Если 1 не является собственным числом ядра $H(x, s, \lambda_0)$, то при выполнении условий

$$\left|\sum_{\nu,p,q,l}^{0,\infty} \frac{B_\nu C_{p,q,l}}{A_{0010}}\right| < A, \quad \left|\sum_{p,q,k,l}^{0,\infty} \frac{A_{p,q,k,l}}{A_{0010}}\right| < B,$$

$$|\Gamma(x, s, \lambda_0)| < C,$$

где A, B и C — постоянные числа, решение уравнения (1) продолжается однозначно в окрестности $\lambda = \lambda_0$, и это решение имеет вид:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \varphi_n(x).$$

Т. И. Вигранеико

7819. Об одном методе решения интегро-дифференциального уравнения. Лобачев С. В., Тр Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 3—5

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi(x) = \int_a^b T(x, y, \varphi(y), \varphi'(y))\, dy \qquad (1)$$

и вспомогательное уравнение

$$\psi(x) = \Sigma_{i=1}^{n} T(x, y_{i-1}, \psi(y_{i-1}),\ \psi'(y_{i-1}))\,(y_i - y_{i-1}). \qquad (2)$$

где $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = b$.

Методом сжатых отображений доказывается

Теорема 1. Положим, что:

а) $T(x, y, u, v)$ непрерывна по x, y $(a \leqslant x, y \leqslant b)$ и $|u| \leqslant l$, $|v| \leqslant l$, допускает частную производную T'_x, причем

$$|T(x, y, 0, 0)| < N; \quad |T'_x(x, y, 0, 0)| < N;$$

б) $$|T(x, y, u_2, v_2) - T(x, y, u_1, v_1)| < L_1 |u_2 - u_1| + \\ + L_2 |v_2 - v_1|;$$

$$|T'_x(x, y, u_2, v_2) - T'_x(x, y, u_1, v_1)| < \overline{L}_1 |u_2 - u_1| + \\ + \overline{L}_2 |v_2 - v_1|; \quad (l, N, L_1, L_2, \overline{L}_1, \overline{L}_2 \text{ — постоянные});$$

в) $2L(b - a) < 1$, где $L = \sup\{\overline{L}_1, \overline{L}_2, L_1, L_2\}$;

г) $$\frac{N(b - a)}{1 - 2L(b - a)} \leqslant l;$$

тогда уравнение (2) имеет единственное решение $\psi(x)$ из пространства непрерывных функций C такое, что $|\psi(x)| \leqslant l$ и $|\psi'(x)| \leqslant l$, и если $\psi_0(x)$ — произвольная непрерывная функция, допускающая производную $\psi_0'(x)$ такая, что $|\psi_0(x)| \leqslant l$, $|\psi'(x)| \leqslant l$, а

$$\psi_m(x) = \sum_{i=1}^{n} T(x, y_{i-1}, \psi_{m-1}(y_{i-1}),\ \psi'_{m-1}(y_{i-1})\,(y_i - y_{i-1}),$$

то последовательность функции $\{\psi_m(x)\}$ равномерно сходится к функции $\psi(x)$. Обозначая решение уравнения (1) при этих же условиях через $\Phi(x)$, автор доказывает близость, в определенном смысле решений, $\Phi(x)$ и $\psi(x)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta < 0$, что при

$$|y_i - y_{i-1}| < \delta \qquad (i = \overline{1, n})$$

$$|\Phi(x) - \Psi(x)| < \varepsilon; \qquad |\Phi'(x) - \Psi'(x)| < \varepsilon.$$

Имеются опечатки.

К. Т. Ахмедов

7820. Об одном способе решения некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений. Кривошеин Л. Е., Уч. зап. физ.-матем. фак. Кирг. ун-та, 1957, **4**, ч. 2, 19—37

Дается несколько вариантов метода автора для решения интегро-дифференциального уравнения

$$L[y] = f(x) + \lambda\int_a^b K(x, t)\, P[y]\, dt, \qquad (1)$$

где

$$L[y] = y^n(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{n-1}(x),$$

$$P[y] = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\, y^{(m-i)}(t)$$

при начальных условиях

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \qquad (i = \overline{0,\ n-1}) \quad x_0 \in [a,\ b], \qquad (2)$$

изложенного им ранее в работе (РЖМат, 1958, 4773) для случая, когда исходными данными при построении разрешающих интегральных уравнений служат фундаментальные функции $\{y_i\}$ $(i = \overline{1,\ m})$ уравнения

$$P[y] = 0. \qquad (3)$$

Новым в работе является следующее:

1) Исходными данными могут служить фундаментальные функции $\{y_i\}$ $(i = \overline{1,\ n})$ уравнения

$$L[y] = 0. \qquad (4)$$

Если $n \geqslant m$, решение ищется в форме

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x), \qquad (5)$$

где $C_i(x)$ подчинены условиям

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{(k)}(x) = 0 \qquad (k = \overline{0,\ n-2}), \qquad (6)$$

из которых следует, что $C'_i(x) = \varphi_i(x)\, z(x)$ $(i = \overline{1,\ n})$, где $z(x) = C'_n(x)$, $\varphi_n(x) \equiv 1$.

После подстановки $y(x)$ из (5) в (1) получается разрешающее интегральное уравнение

$$z(x) = F(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i0}\, \varepsilon_i(x,\ \lambda) + \lambda\int_a^b M(x, \eta)\, z(\eta)\, d\eta, \qquad (7)$$

где функции $F(x)$, $\varepsilon_i(x, \lambda)$ $M(x, \eta)$ определяются по формулам, данным в работе, C_{i0} находятся по начальным данным. Если λ — собственное число ядра $M(x, \eta)$, то из третьей теоремы Фредгольма вытекает дополнительная система линейных уравнений относительно C_{i0}. Если $n < m$, разрешающее уравнение имеет вид (7).

2) Если исходными данными служат фундаментальные функции уравнения (3), то в случае $n > m$ автор, пользуясь приемом пополнения фундаментальных функций $\{y_i\}$ $(i = \overline{1,\ m})$ n раз дифференцируемыми функциями $y_{m+1}(x), \ldots, y_n(x)$, так чтобы система функций $\{y_i\}$ $(i = \overline{1,\ n})$ была линейно независимой, освобождается от фактического p-кратного дифференцирования $D[y]$.

3) Показана возможность решения методом автора линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.

4) Построены разрешающие интегральные решения без привлечения фундаментальных функций уравнений (3) и (4).

Пусть $u_1(x) \ldots u_n(x)$ — линейно независимые функции, дифференцируемые k раз ($k = \sup\{n, m\}$) и определенные на интервале $[a, b]$. Если $n > m$, то решение ищется в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, v_i(x),$$

где функция $v_i(x)$ подчиняется условиям

$$\sum_{1=i}^{n} v_i'(x)\, u_i^{(r)}(x) = 0, \qquad (r = \overline{0,\ n-2}),$$

которые аналогичны условиям (6), поэтому дальнейшее решение задачи протекает как в 1-м случае. В работе имеются опечатки, так в формуле (4, 14) пропущен знак суммы у третьего слагаемого в правой части равенства.

В. В. Васильев

См. также: 7679, 7681, 7922

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

7821. Теорема существования минимума для двумерных задач вариационного исчисления в непараметрической форме. Чеккони (Un teorema sull'esistenza del minimo degli integrali doppi del calcolo delle variazioni, in forma non parametrica. Cecconi Jaurés), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 1-2, 45—64 (итал.)

Доказывается следующая основная теорема:

Дано выпуклое открытое и ограниченное множество D. Пусть нижняя грань диаметров компонент границы D^* множества D положительна; пусть функция $F(x, y, z, p, q)$ непрерывна во всех точках $(x, y) \in D + D^*$ при произвольных z, p, q, а производные F_p, F_q непрерывны во всех точках $(x, y) \in D$ при произвольных z, p, q; пусть существуют три таких действительных числа $m > 0$, $L > 0$, H, для которых справедливо неравенство

$$m.(p^2 + q^2) + H < F(x, y, z, p, q)$$

в любой точке $(x, y) \in D$ при произвольном z и для

$p^2 + q^2 > L$; пусть функционал

$$I(z, D) = \iint_D F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \qquad (p = z_x,\ q = z_y)$$

положительно квазирегулярен. Рассмотрим выпуклое и ограниченное множество A пространства (x, y, z), содержащее образ $\varphi[D^*] \equiv [(x, y, z);\ (x, y) \in D^*,\ z = \varphi(x, y)]$ границы D^* при отображении $\varphi(x, y)$; допустим, что не пуст класс W, состоящий из функций $z = z(x, y)$, удовлетворяющих условиям: 1) они непрерывны в $D + D^*$; 2) абсолютно непрерывны в смысле Тонелли на D; 3) совпадают с $\varphi(x, y)$ на D^*; 4) образ $z[D]$ множества D при отображении $z(x, y)$ принадлежит A; 5) интеграл $J(z, D)$ конечен. Тогда в классе W существует функция, реализующая минимум интеграла $J(z, D)$.

Доказательство основано на известной теореме Тонелли о полунепрерывности, теореме Янга о „$\varepsilon - \delta$ решетках" и некоторых результатах Чезари (Cesari L., РЖМат, 1955, 2612). По данному вопросу см. также РЖМат, 1957, 3233. М. К. Керимов

7822. О существовании минимума в двумерных вариационных задачах в параметрической форме. Чеккони (Sulla esistenza del minimo degli integrali del calcolo delle variazioni estesi ad una superficie di forma parametrica. Cecconi Jaurès), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 3-5, 163—191 (итал.)

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задано замкнутое и ограниченное множество A. Пусть Ω — открытое множество с границей Ω^*, причем $\Omega + \Omega^* \subset A^0$ ($(A)^0$ обозначает множество внутренних точек A). Пусть Σ — ориентированная поверхность Фреше типа двумерной сферы, все точки которой принадлежат A и которая покрывает Ω. Предположим, что A — выпукло, а Ω — «достаточно гладкое» множество, т. е. удовлетворяет некоторым перечисленным в статье условиям. Статья в основном посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема. Пусть W — класс всех ориентированных поверхностей Фреше типа двумерной сферы с конечной площадью Лебега, все точки которых принадлежат A. Пусть двойной интеграл $J(\Sigma)$, распространенный по поверхности Σ, на всех поверхностях класса W положительно квазирегулярен. Тогда, если класс W не пуст, то в W существует минимум функционала $J(\Sigma)$. При доказательстве широко используются результаты Чезари (L. Cesari) по теории поверхностей и по вариационному исчислению. М. К. Керимов

7823. Об аналитичности экстремалей вариационных задач с кратными интегралами. Де-Джорджи (Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli. De Giorgi Ennio), Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. sci fis., mat. e natur., 1956, 20, № 4, 438—441 (итал.)

Пусть D — область r-мерного евклидова пространства S_r. Через $K^{(2)}$ обозначим класс функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям: 1) $w(x)$ абсолютно непрерывна на почти всех сигментах, параллельных осям координат и расположенных в D; 2) $w(x)$ и ее частные производные первого порядка суммируемы с квадратом на любом замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в D. Пусть $f(p_1, \ldots, p_r)$ — функция, непрерывная вместе с частными производными до второго порядка в S_r; пусть существуют два числа $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ такие, что $\mu_1 |\lambda|^2 \leqslant \sum_{h,k}^{1,r} f_{hk} \lambda_h \lambda_k \leqslant \mu_2 |\lambda|^2$ для любой точки $p \equiv (p_1, \ldots, p_r) \in S_r$ и для любого вектора $\lambda \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, причем

$$f_{hk}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_h\, \partial p_k}, \qquad f_h(p) = \frac{\partial f}{\partial p_h}.$$

Функция $u^*(x) \in K^2$ называется экстремалью интеграла

$$I(u) = \int f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_r}\right) dx_1, \ldots, dx_r \qquad (1)$$

в области D, если для любого замкнутого и ограниченного множества $C \in D$ и для любой функции $g(x)$, непрерывной вместе с первыми частными производными в S_r и тождественно равной нулю в $(S_r - C)$ имеет место равенство

$$\int_C \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial g}{\partial x_h} f_h\left(\frac{\partial u^*}{dx_1}, \ldots, \frac{\partial u^*}{\partial x_r}\right) dx_1 \ldots dx_r = 0.$$

Автор, основываясь на нескольких приведенных в работе леммах (без доказательств) и на результатах Стампакья (Stampacchia G., Ricerche mat., 1952, 1, 200—226), формулирует теорему: Любая экстремаль интеграла (1) в области D имеет первые частные производные, равномерно удовлетворяющие условию Гёльдера в каждом замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся в D; если $f(p)$ аналитична в S_r, то экстремали аналитичны в D. Библ. 7 назв. М. К. Керимов

7824. Критические точки некоторой специальной функции на многообразиях, вложенных в евклидово пространство. Федорова В. С., Уч. зап. Томск. гос. пед. ин-та, 1956, 15, 458—465

Пусть M^n n-мерное многообразие класса C^3 в евклидовом пространстве E^{n+1}, заданное уравнением $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. В работе изучены критические точки функции

$$f(p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_i^{(0)})^2} - k,$$

где $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in M^n$, $p_0(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, $k \geqslant 0$, определенной на многообразии. Предполагается, что все критические точки невырождены и каждая поверхность уровня не может содержать более одной критической точки. При этих условиях доказано существование двух семейств специальных траекторий, каждое из которых заполняет область IM^n, ограниченную многообразием M^n. Утверждается, что IM^n гомеоморфно многообразию, полученному отождествлением граничных множеств конусообразных тел $S(a_{2l-1})$, построенных в работе.

Указанные результаты обобщают результаты Морса и Байяда (РЖМат, 1954, 3270) и получены тем же методом. С. И. Альбер

7825. О некотором обобщении вариационного метода. Мартынюк А. Е., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 3, 374—377

Автор обобщает результаты С. Г. Михлина (Усп. матем. наук, 1950, 5, вып. 6, 3—51) о сходимости вариационного метода на более широкий класс линейных операторов.

Линейный оператор A, заданный на множестве $D(A)$, плотном в гильбертовом пространстве H, называется положительным в обобщенном смысле, если он представляется в виде $A = A_0 A_1$ (A_0 — самосопряженный, A_1 — замкнутый операторы) и для любого ненулевого $u \in D(A)$ $(Au, A_1 u) > 0$.

A называется положительно-определенным в обобщенном смысле, если

$$(Au, A_1 u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2,\ \gamma > 0; \quad \|A_1 u\|^2 \leqslant C^2 (Au, A_1 u),\ C > 0.$$

Вводится гильбертово пространство H_1 — замыкание $D(A)$ в метрике $[u, v]_1 = (Au, Av)$.

Приводятся (без доказательства) теоремы:

1. Если оператор A положительный в обобщенном смысле, то нахождение решения уравнения $Au=f, f\in H$ равносильно отысканию $u\in D(A)$, доставляющего минимум функционалу

$$\Phi(u)=(Au,\ A_1u)-(Au,\ f)-(f,\ A_1u). \qquad (1)$$

2. Если оператор A положительно-определенный в обобщенном смысле, то всякая минимизирующая последовательность для (1) сходится в H_1 к элементу, реализующему минимум (1). В частности, сходится метод Ритца (автор называет его методом Ритца-моментов; он включает как частные случаи обычный метод Ритца и метод наименьших квадратов).

В качестве приложения устанавливается сходимость метода Ритца-моментов для уравнения

$$Au=\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left[p_{k+1}(x)\frac{d^{k+1}u}{dx^{k+1}}\right]=f(x)$$

при краевых условиях $u(a)=u'(a)=\ldots=u^{(l-1)}(a)=0$; $u^1(b)=u''(b)=\ldots=u^{(l-1)}(b)=0$. Здесь $Au=\frac{du}{dx}$.

В рассуждениях автор всюду следует С. Г. Михлину. Работа содержит ряд опечаток (формулы (10), (12), 14), (16)). Е. Д. Гарбер

7826. О естественных граничных условиях. Соломон (Despre conditiile la limita naturale. Solomon Liviu), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. si fiz., 1957, **9**, № 1, 107—120 (рум.; рез. русск., франц.)

Работа является некоторым уточнением результатов С. Г. Михлина (Прямые методы в математической физике. М.-Л., Гостехиздат, 1950) о естественных граничных условиях для уравнения $Lu=f$ (L — дифференциальный оператор порядка $2k$) с k однородными граничными условиями.

Доказываются теоремы:

1 Пусть L симметричен на линеале N функций, $2k$ раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{\Omega}=\Omega+S$ и удовлетворяющих краевым условиям $\Gamma_h u|_S=0,\ h=r+1,\ldots,k$.

Пусть

$$\Lambda(u,u)+\int_S\sum_{j=r+1}^{k}R_juR_juds>0,\quad u\neq0,\ \text{где}$$

$$\Lambda(u,v)=(Lu,v)-\int_S\sum_{j=1}^{k}R_ju\tilde{R}_jvds.$$

Тогда если существует функция u_0, реализующая на N минимум функционала

$$F(u)=\Lambda(u,u)+\int_S\sum_{j=r+1}^{k}R_ju\tilde{R}_juds-2(u,f),$$

то u_0 удовлетворяет уравнению $Lu=f$ и естественным граничным условиям $R_ju_0|_S=0$; $R_ju_0|_S=0$; $j=1,2,\ldots,r$.

2. Если L симметричен только на функциях из $M\subset N$, удовлетворяющих условиям $R_ju|_S=0,\ j=1,\ldots,r'$. $\tilde{R}_ju|_S=0$, $j=r'+1,\ldots,r$, и если заполнены все остальные условия теоремы 1, то u_0 удовлетворяет уравнению и естественным граничным условиям $R_ju_0|_S=0$, $j=1,\ldots,r$.

В качестве примеров рассматриваются естественные граничные условия для бигармонического уравнения и для второй краевой задачи теории упругости.

Е. Д. Гарбер

7827. Прямые методы решения дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Кабальский (Прямі методи розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними четвертого порядку. Кабальський М. М.), Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956. Київ, 1957, 561 (укр.)

Краткое сообщение о решении дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка методом Ритца. М. К. Керимов

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

7828. Формулы для абсолютных величин действительных чисел. Митринович (Formules sur les valeurs absolues des nombres réels. Mitrinovitch D. S.), Elem. Math., 1957, **12**, № 5, 111—112 (франц.)

7829. Формулы для абсолютных величин действительных чисел. Митринович (Neke formule o apsolutnim vrednostima realnih brojeva. Mitrinović D. S.), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, кн. 7, 39—41 (сербо-хорв.; рез. франц.)

7830. Аппроксимация длины дуги эллипса. Сегедин (Approximate length of arc of an ellipse. Segedin C. M.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 273-275 (англ.)

7831. Метод вычисления телесного угла, опирающегося на круговое отверстие. Найто (A method of calculating the solid angle subtended by a circular aperture. Naito Minoru), J. Phys. Soc. Japan, 1957, **12**, № 10, 1122—1129 (англ.)

7832. О некоторых известных функциях роста и о функции, представляющей их общий вид. Тодорович, Пантич (O nekim poznatim funkcijama rastenja i o funkciji koja pretstavlja njihov uopšteni. oblik. Todorović D., Pantić S.), Шумарство, 1957, **10**, № 5-6, 323—333 (сербо-хорв.; рез. русск., нем.)

7833. Замкнутые кривые эллиптического типа. Уэрли, Бруэр (Elliptic-type closed curves. Worley Will J., Breuer Fred D.), Prod. Engng, 1957, 28, № 8, 141—144 (англ.)

7834. Функции математической физики. Кампе-де-Ферье (Fonctions de la physique mathematique. Ed. Kampé de Fériet J. (Formulaire mathém. usage physiciens et ingrs, № 9). Paris, Centre Nat. Rech. Scient., 1957, 99 p.) (франц.)

7835. Об итерационной задаче. Лоясевич (O zagadnieniu iteracji. Łojasiewicz Stanisław), Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., 1955, № 3, 19—23 (польск.; рез. русск., англ.)

Исследуется функциональное уравнение $f(\alpha, f(\beta,x))=f(\alpha+\beta,x)$ с начальным условием $f(1,x)=g(x)$ и доказывается, что при некоторых предположениях относительно функции $g(x)$ существует единственная функция $f(x)$ и дается ее конструкция. Э. А. Чернышенко

7836. Исследование конечных разностей от x^m. Лихин (Дослідження скінченних різниць від x^m. Ліхін В. В.), Наук. зап. Полтавськ. держ. пед. ін-т, 1955, **8**, 61—66 (укр.)

С помощью производящей функции

$$\Delta^n \frac{1}{X+x} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{1}{X+x+\nu} = \sum_{\nu=n}^{\infty} X^{-\nu-1} \Delta^n x^{\nu} \quad (1)$$

выводится формула, дающая выражение конечных разностей степенной функции посредством кратного суммирования

$$\Delta^n x^{n+p} = n! \sum_{m_1=0}^{n} (x+m_1) \sum_{m_2=0}^{m_1} (x+m_2) \dots \sum_{m_p=0}^{m_{p-1}} (x+m_r). \quad (2)$$

Указывается, что (2) может быть выведена и несколько более элементарным способом, которым в статье предварительно были найдены разности $\Delta^n 1^{n+p}$ и числа Бринклея $\Delta^n 0^m$. Для случая отрицательного показателя устанавливается формула

$$\Delta x^{-m} = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \sum_{\nu_1=0}^{n} \frac{1}{x+\nu_1} \sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} \frac{1}{x+\nu_2} \dots \sum_{\nu_{m-1}=0}^{\nu_{m-2}} \frac{1}{x+\nu_{m-1}}. \quad (3)$$

Из (3) получается выражение для гамма-функции

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^x \Delta^n x^{-m}}{\left(\sum_0^n \frac{1}{x+\nu}\right)^{(m-1)}}, \quad (4)$$

где в знаменателе — сокращенное обозначение кратного суммирования. При $m = 1$ (4) превращается в формулу Эйлера для $\Gamma(x)$. А. Г. Школьник

7837. Ортогональная система Уолша; матрицы Адамара; преобразования ортогональных систем. Андреоли (Sistemi ortogonali de Walsh; matrici di Hadamard; trasformazioni di sistemi ortogonali. Andreoli Giulio. Ricerca, Napoli, 1955, 6, № 1, 3—17) (итал.)

Обобщая метод композиции квадратных матриц, данный Кронекером, и применяя его к матрицам Адамара (матрицам, элементы которых по модулю $\leqslant 1$, и определители, составленные из абсолютных значений элементов матриц, имеют максимальное значение $n^{n/2}$), автор получает ортогональные системы, которые являются обобщением ортогональных систем Уолша.

J. Favard

Перевод из Math Revs, 1956, 17, № 5, 478.

7838. О квазиортогональных полиномах. Тихара (On quasi-orthogonal polynomials. Chihara T. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 765—767 (англ.)

Последовательность полиномов $\{q_n(x)\}$ ($q_n(x)$ — степени n) называется квазиортогональной с индексом (k,r), если

$$\int_a^b q_m(x)\, q_n(x)\, d\alpha(x) = 0$$

при $m \neq n \pm jr$, $j = 0,1,\dots,k$. В случае индекса $(1,1)$ получаются обычные квазиортогональные полиномы Рисса. Доказывается: 1) Последовательность $\{q_n(x)\}$ является квазиортогональной тогда и только тогда, когда $q_n(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{nj} p_{n-jr}$, где $p_n(x)$ — ортогональные полиномы, соответствующие весу $\alpha(x)$ на (a, b) 2) Имеет место рекуррентное соотношение

$$A_n(x)\, q_{n+1}(x) + B_n(x)\, q_n(x) + C_n(x)\, g_{n-1}(x) = 0,$$

где A_n, B_n, C_n — полиномы степеней kr, $kr+1$, kr.

Г. К. Энгелис

7839. Определение области существования некоторых неявных функций. Рябов Ю. А., Тр. Всес заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 11, 12—35

Исследуется вопрос об области существования положительной неявной функции $u(\varepsilon)$, определяемой уравнением

$$F \equiv u - f(u, \varepsilon) = 0 \qquad (u \geqslant 0,\ \varepsilon \geqslant 0). \quad (1)$$

Предполагается, что функция $f(u,\varepsilon)$ дважды дифференцируема; $f(u, \varepsilon)$ и $f'_u(u, \varepsilon)$ при $u > 0$, $\varepsilon > 0$ положительны и монотонно возрастают при возрастании u и ε; $f(0, 0) = 0$.

При указанных условиях система

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv u - f(u,\varepsilon) = 0 \\ F'_u &\equiv 1 - f'_u(u,\varepsilon) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

имеет единственное положительное решение $(\bar{u}, \bar{\varepsilon})$. Доказывается, что при $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ уравнение (1) однозначно определяет неотрицательную функцию $u = u(\varepsilon)$ такую, что $u(0) = 0$ и $u(\bar{\varepsilon}) = \bar{u}$; при $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ уравнение (1) не имеет положительного решения. Производная F'_u при $u = u(\varepsilon)$, оставаясь положительной при $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, убывает до нуля при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. В геометрической интерпретации, которая дается этой теореме, последнее означает, что кривая $y = f(u, \varepsilon)$ касается прямой $y = u$ в точке, для которой $u = \bar{u}$.

Далее рассматривается система n уравнений

$$F_s \equiv u_s - f_s(u_1, \dots, u_n;\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = 0,\ u_s \geqslant 0, \quad (3)$$
$$\varepsilon_j \geqslant 0,$$

в предположении, что f_s дважды дифференцируемы и что f_s и $\frac{df_s}{du_j}$ обращаются в нуль при $u_1 = \dots = u_n = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_k = 0$ и монотонно возрастают при возрастании аргументов. Доказывается, что если система (3) удовлетворяется при $u_s = \tilde{u}_s$ ($s = 1, \dots, n$) и $\varepsilon_j = \tilde{\varepsilon}_j$ ($j = 1, \dots, k$), то эта система при $\varepsilon_j \leqslant \tilde{\varepsilon}_j$ определяет единственное неотрицательное решение $u_s = u_s(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ ($s = 1, \dots, n$), обращающееся в нулевое при $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_k = 0$. При этом якобиан $D_n = \frac{d(F_1, \dots, F_n)}{d(u_1, \dots, u_n)}$ при $u_s = u_s(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ монотонно убывает с возрастанием $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ и при некоторых значениях $\varepsilon_j = \bar{\varepsilon}_j$ достигает своего наименьшего значения, равного нулю. При $\varepsilon_j > \bar{\varepsilon}_j$ система (3) не имеет положительного решения.

Если функции f_s зависят от одного параметра ε,

$$F_s \equiv u_s - f_s(u_1, \dots, u_n;\ \varepsilon) = 0 \quad (s = 1, \dots, n), \quad (4)$$

то значения $\bar{\varepsilon}$, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$, обращающие в нуль F_s и D_n, определяются однозначно. Само решение

$$u_s = u_s(\varepsilon). \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon} \quad (s = 1, \dots, n) \quad (5)$$

может быть получено методом последовательных приближений, а в случае, если f_s разлагаются в ряды, то и с помощью степенных рядов с неопределенными коэффициентами.

В заключение рассматриваются уравнения вида (4), но в предположении, что переменные и параметр могут принимать любые действительные значения

$$x_s - \varphi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n). \qquad (6)$$

Оценка области существования неявных функций $x_s = x_s(\mu)$ производится с помощью мажорирующих функций f_s, таких что

$$f_s(|x_1|, \ldots, |x_n|; |\mu|) \geqslant \varphi_s(x_1, \ldots, x_n; \mu),$$

$$\frac{df_s}{d|x_k|}(|x_1|, \ldots, |x_n|; |\mu|) \geqslant \frac{d\varphi_s}{dx_k}(x_1, \ldots, x_n; \mu);$$

и если система (4) для мажорирующих функций определяет неявные функции в промежутке $(0, \bar{\varepsilon})$, то функции $x_s(\mu)$, определяемые системой (6), во всяком случае существуют при $|\mu| \leqslant \varepsilon$.

Примечание референта. Вместо двукратной дифференцируемости функции $f(u, \varepsilon)$ в (1) и функций $f_s(u_1, \ldots, u_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ в (3) видимо достаточно существования непрерывных частных производных 1-го порядка. А. Г. Школьник

7840. Определение минимума некоторых иррациональных функций. Лауренти (Determinazione del minimo di talune funzioni irrazionali. Laurenti Fernando), Archimede, 1957, **9**, № 6, 258—262 (итал.)

7841. Выпуклые функции и теорема о конечных приращениях. Лоясевич (Funkcje wypukle a twierdzenie o przyrostach skończonych. Łojasiewicz Stanisław), Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., 1955, № 3, 15—18 (польск.; рез. русск., англ.)

Если функция $f(x)$ имеет строго монотонную производную (строго выпукла), то промежуточная точка ξ в теореме о конечных приращениях

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

определяется однозначно; производная $f'(x)$ в рассматриваемом случае допускает однозначное обращение, причем обратная функция $g(t)$ непрерывна, в силу чего

$$\xi = g\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

и ξ оказывается непрерывной функцией от концов a и b. Автор доказывает обратную теорему в следующей форме: Если функция $f(x)$ имеет производную в промежутке (a, b), причем существует функция $h(x, y)$, определенная для $a < x < y < b$, непрерывная по каждому переменному, такая, что $x < h(x, y) < y$ и

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'[h(x, y)],$$

то функция $f(x)$ либо линейная, либо строго выпуклая. А. Г. Школьник

7842. Учебное пособие для преподавания обобщенного закона о среднем. Стейнбреннер (A teaching aid for the generalized law of the mean. Steinbrenner Arthur H.), School. Sci. and Math., 1958, 58, № 1, 9 (англ.)

Дается геометрическая интерпретация теоремы о среднем

$$\frac{F(b) - F(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}, \quad a \leqslant x_1 \leqslant b.$$

В. К. Захаров

7843. Обобщенные многочлены и ряды Тейлора. Бондарев А. Л., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 3—18

Формула Тейлора с остаточным членом обобщается на случай разложения по „обобщенным степеням" — функциям $u_m(x)$ $(m = 1, \ldots, n)$, на которое налагаются следующие условия: 1) $u_m(x)$, как и данная функция $f(x)$,—непрерывны на $[a;b]$ и n-кратно дифференцируемы при $a \leqslant x < b$; 2) $u_m^{(p)}(a) = 0$ $(0 \leqslant p < m \leqslant n)$; 3) $u_m^{(m)}(a) \neq 0$ $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$; 4) $u_n(x) \neq 0$ $(a < x < b)$.

Доказывается, что при этих условиях на отрезке $[a;b]$ имеет место формула

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} A_m u_m(x) + R_n(x),$$

где

$$A_m = \frac{f^{(m)}(a) - \sum_{p=0}^{m-1} A_p u_p^{(m)}(a)}{u_m^{(m)}(a)}$$

и

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c) - \sum_{p=0}^{n-1} A_p u^{(n)}_p(c)}{u_n^{(n)}(c)} u_n(x) \quad (a < c < b).$$

Разложение это сохраняется и в комплексной плоскости, при этом остаточный член имеет следующий вид:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{z - a}{t - a}\right)^n \frac{f(t) - \sum_{m=0}^{n-1} A_m u_m(t)}{t - z}\, dt.$$

В этом случае $f(z)$ и $u_m(z)$ $(m = 1, \ldots, n-1)$ предполагаются аналитическими внутри круга $|z - a| < R$ и на его окружности C. Чтобы функции $u_m(z)$ удовлетворяли поставленным выше требованиям 1)—3), необходимо и достаточно, чтобы a было нулем кратности m функции $u_m(z)$:

$$u_m(z) = (z - a)^m \varphi_m(z),$$

где $\varphi_m(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z - a| \leqslant R$ и $\varphi_m(a) \neq 0$.

Из обобщенной формулы Тейлора при $\varphi_m(z) = [\varphi(z)]^{-m}$ получается формула Бюрмана — Лагранжа:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!}\left[\frac{z - a}{\varphi(z)}\right]^m \left\{f'(a)[\varphi(a)]^m\right\}^{(m-1)} + R_n, \qquad (1)$$

а при $\varphi_m(z) = F^{(n-m)}(1) f^{(m)}(z) - F^{(n-m)}(0) f^{(m)}(a)$, где $F(z)$ — многочлен степени n, — формула Дарбу:

$$f(z) = f(a) + \frac{1}{F^{(n)}(0)} \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} \{F^{(n-m)}(1) f^{(m)}(z) - F^{(n-m)}(0) f^{(n)(a)}\}(z - a)^m + R_{n+1}. \qquad (2$$

(Подстановка вместо $\varphi_m(z)$ указанных выражений дает коэффициенты формул (1) и (2) в рекуррентной форме).

Из обобщенных степеней составляются обобщенные многочлены $\sum_{m=0}^{n} B_m u_m(z)$ и обобщенные степенные ряды $\sum_{m=0}^{\infty} B_m u_m(z)$. Обобщенный многочлен Тейлора функции $f(z)$ $\sum_{m=0}^{n-1} A_m u_m(z)$ обладает экстремальным свойством: он является единственным среди обобщенных полиномов той же степени, представляющих $f(z)$ с точностью до обобщенной степени с показателем не ниже n. Имеет место свойство единственности разложения функции в обобщенный степенной ряд: Если ряд $\sum_{m=0}^{\infty} B_m u_m(z)$ равномерно сходится в круге $|z-a| \leqslant R$ к функции $f(z)$, то он является обобщенным рядом Тейлора этой функции.

В качестве примера приложения обобщенной формулы Тейлора рассматривается применение ее к разложению рациональной дроби на элементарные.

А. Г. Школьник

7844. Доказательство теоремы о якобианах. Ямабэ (A proof of a theorem on Jacobians. Yamabe Hidehiko), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 725—726. (англ.)

Пусть $F(x) - C^1$-отображение из d-мерного евклидова пространства E^d в другое d-мерное пространство. Пусть $x^1, \ldots, x^d$ — координаты x, а $f^1(x), \ldots, f^d(x)$ — координаты $F(x)$. Известно, что если якобиан $\det J(z) = \det(\partial f^i(x)/\partial x^j)_{x=z} \neq 0$, то $F(x)$ — взаимно однозначное и открытое отображение вблизи z. В реферируемой заметке дается простое доказательство этого факта.

Э. А. Чернышенко

7845. Одна теорема о регулярности функций нескольких переменных. Лоясевич (Pewne twierdzenie o regularności funkcji wielu zmiennych. Łojasiewicz Stanisław), Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., 1957, № 14, 21—24 (польск.; рез. русск., англ.)

Доказывается, что если функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$ принадлежат классу регулярности $C^n (n \geqslant 1)$ в области G (т. е. имеют в этой области непрерывные производные до n-го порядка включительно), и в точках, где $g(x_1, \ldots, x_m)$ обращается в нуль, обращается в нуль и $f(x_1, \ldots, x_m)$, причем в этих точках не равны нулю одновременно все производные $\frac{\partial g}{\partial x_i}$, то частное $f(x_1, \ldots, x_m)/g(x_1, \ldots, x_m)$ (дополненное предельными значениями в точках обращения в нуль знаменателя) есть функция класса C^{n-1} в области G. В качестве следствия выводится: Если $\varphi(x)$ из класса C^n, то

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} & (x \neq y), \\ \varphi'(x) & (x = y) \end{cases}$$

принадлежит классу C^{n-1}.

А. Г. Школьник

7846. Еще один взгляд на интеграл вероятностей. Николас (Another look at the probability integral. Nicholas C. P.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 739—741 (англ.)

Замечание по поводу вывода формулы $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

А. М. Яглом

7847. Асимптотическое исследование интеграла от некоторой функции, имеющей предельное значение в угловой точке. У Чжи-цюань, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta Sci. Natur., 1956, № 1, 159—167 (кит.)

Изучаются асимптотические свойства интеграла от некоторой функции, имеющей предельное значение в угловой точке. Доказана, например, такая теорема:

Пусть вещественная функция $F(u,\lambda)$ определена на $-\infty \leqslant a < u < b \leqslant +\infty$, $\lambda > 0$, и удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(u,\lambda)$ есть непрерывная функция от u на $a < u < b$, $\lambda > 0$, при $u = \varphi(\lambda)$ принимает максимальное значение и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = \xi \qquad (a < \xi < b).$$

2) Пусть $F_u(u,\lambda) \leqslant 0$ $(\varphi(\lambda) < u < b)$, $F_u(u,\lambda) \geqslant 0$ $(a < u < \varphi(\lambda))$ и существуют $F_u(\xi+0,\lambda)$ и $F_u(\xi-0,\lambda)$. Далее, при целом положительном k и таких постоянных $p > 1$, $U > 0$, $V > 0$, что $|u| \geqslant U$ и $\lambda > V$, имеет место

$$|uF_u(u,\lambda)| \geqslant \log|u| + \log_2|u| + \ldots + \log_k|u| + p\log_{k+1}|u|,$$

где $\log_2|u| = \log\log|u|$, $\log_{i+1}|u| = \log\log_i|u|$,

3) $F_u(u,\lambda) \sim F_u(\xi+0,\lambda) \to -\infty$ $(\lambda \to \infty, u \to \xi, u > \varphi[\lambda])$,

$F_u(u,\lambda) \sim F_u(\xi-0,\lambda) \to +\infty$ $(\lambda \to \infty, u \to \xi, u < \varphi(\lambda))$.

Тогда при $\lambda \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\int_a^b \exp\left\{F(u,\lambda)\right\} du \sim \exp\left\{F(\varphi(\lambda),\lambda\right\} \times \times \left(\frac{F_u(\xi+0,\lambda) - F_u(\xi-0,\lambda)}{F_u(\xi+0,\lambda)\,F_u(\xi-0,\lambda)}\right).$$

О Жен Хеи

7848. Об одном применении дельта-функции. Квальвассер В. И., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, вып. 7 (а), 97—99

С помощью дельта-функции Дирака показывается, что функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ t, & \text{если } t \geqslant 0, \end{cases}$$

представляется интегралом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz, \quad \mathrm{Re}\, z = a > 0.$$

А. П. Прудников

7849. О свойствах некоторых дробных интегралов. Руни (On some properties of certain fractional integrals. Rooney P. G.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1956, Sec. 3, 50, June, 61—70 (англ.)

Рассматриваются интегралы вида

$$I_{r,s}f(x) = \frac{x^{-r-s}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-t)^{r-1} t^s f(t)\,dt,$$

$$R_{r,s}f(x) = \frac{x^s}{\Gamma(r)} \int_x^\infty (t-x)^{r-1} t^{-r-s} f(t)\,dt,$$

где f принадлежит к одному из функциональных пространств Лоренца $\Lambda(\alpha,p)$ или $M(\alpha,p)$ (РЖМат, 1954, 3990К). Показанно, что при некоторых ограничениях интегральные преобразования, определяемые этими формулами, существуют почти для всех $x > 0$ и при-

надлежат к тому же классу, что и функция f. Полученные результаты используются для вывода некоторых свойств обобщенных преобразований Лапласа $W_{k,m}f(s)$ и $M_{k,m}f(s)$ с ядрами, содержащими гипергеометрические функции Уиттекера. Н. Н. Лебедев

7850. Об одном представлении полного нормального эллиптического интеграла третьего рода. Фемпл (О једној редукцији и потпуног нормалног елиптичког интеграла треће врсте. Фемпл Станимир), Зб. радова Српска АН, 1957, кн., 55, 73—76 (сербохорв.; рез. франц.)

Известно, что полные нормальные эллиптические интегралы третьего рода могут быть выражены в виде комбинации полных и неполных нормальных эллиптических интегралов первого и второго рода. В недавней работе (РЖМат, 1958, 1291) автор сформулировал ряд условий, которым должны удовлетворять модуль и параметр интеграла третьего рода, чтобы этот интеграл мог быть представлен только через полные интегралы первого рода с тем же модулем.

В настоящей заметке, при тех же условиях, найдена другая совокупность интегралов третьего рода, которые могут быть представлены таким же образом.

Резюме автора

7851. О некоторых оценках в теории форм Тёплица и ортогональных многочленов. Геронимус Я. Л., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 1, 25—27

Рассматриваются формы Тёплица $T_n = \sum_{i,k=0}^{n} c_{i-k}x_i\bar{x}_k$ ($c_{-n} = \bar{c}_n$; $\Delta_n = |c_{l-k}|^n_0$; $n = 0,1,\ldots$), определенно-положительные, т. е.

$$\{\Delta_n\}_0^\infty > 0. \qquad (1)$$

Принимаются обозначения:

$$h_n = \Delta_{n+1}/\Delta_n\ (n = 0,1,\ldots); \quad \lim_{n\to\infty} h_n = h \geqslant 0; \quad \mu_n = h_n - h.$$

При условии (1) имеет место представление

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\,d\sigma(\theta) \quad (k = 0,1,\ldots),$$

где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста. Величина h_n может быть также представлена в виде $h_n = 1/a_n^2$, где многочлены $\{P_n(z) = a_n z^n + \ldots\}_0^\infty$ — ортонормальны на единичной окружности относительно обложения $d\sigma(\theta)$.

Даются различные оценки роста ортонормальных многочленов $\{P_n(z)\}$, связанные с величиной μ_n. В предположении, что $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, дана таблица оценок для μ_n, выраженных через структурные характеристики веса $p(\theta) = \sigma'(\theta)$. Работа является дальнейшим продолжением ряда работ автора.

Б. А. Рымаренко

7852. О некоторых вопросах, связанных с теорией интегральных многочленов. Божоров (Върху някои въпроси, свързани с теорията на интегралните полиноми. Божоров Е.), Годишник Хим.-технол. ин-т, 1955 (1956), **2**, № 2, 151—161 (болг.; рез. русск., нем.)

В теории интегральных многочленов вида

$$F(z) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,p(z+t)\,dt,$$

где $P(z)$ — многочлен, большую роль играет условие, что нули многочлена $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где $f(z)$ — интегрируемая на $[0,1]$ функция, связанная некоторым соотношением с $\varphi(z)$, лежат в области $|z| \leqslant 1$.

В связи с этим доказывается ряд теорем о нулях многочлена с действительными коэффициентами $u(z)$.

I. Если нули $u(z)$ лежат в области $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \geqslant 1$, $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \geqslant 1$, то $\min\limits_{\mathrm{Re}(z) < 1} |u(z)| = |u(1)|$.

II. Если нули $u(z)$ лежат в области $\mathrm{Re}(z) > 2|z|^2/(1+|z|^2)$ то $\min\limits_{|z|=1} |u|(z) = |u(1)|$.

III. Если нули $u(z)$ лежат в области $\mathrm{Re}(z) > 1$, $\mathrm{Re}(z) > 2|z|^2/(1+|z|^2)$, то $\min\limits_{|z|<1} |u(z)| = |u(1)|$.

IV. Если нули $u(z)$ лежат в области $Re(z) > 1$, $\mathrm{Re}(z) > 2|z|^2/(1+|z|^2)$, а $v(z)$ — многочлен с действительными неотрицательными коэффициентами и $|u(1)| > |v(1)|$, но многочлен $u(z) \pm v(z)$ не имеет нулей в области $|z| \geqslant 1$.

В работе имеется ряд опечаток. Б. М. Гагаев

7853. Об одном утверждении академика А. А. Маркова. Рехтман-Ольшанская П. Г., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 181—187

Статья посвящена условиям для чисел α'_k, α''_k $(k = 0,1,\ldots,n-1)$, чтобы существовала функция $f(x) \geqslant 0$ $(0 < x < l)$, для которой

$$\alpha'_k < \int_0^l f(x)\,dx < \alpha''_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Требуемые условия без доказательства указаны А. А. Марковым в 1895 г. Автор доказывает условия А. А. Маркова с помощью метода выпуклых тел и некоторых неравенств А. А. Маркова для определителей. Н. И. Ахиезер

7854. Сходимость к волновой матрице Мёллера. Кук (Convergence to the Møller wave-matrix. Cook J. M.), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 1, 82—87 (англ.)

Рассматривается асимптотическое поведение волнового пакета, рассеивающегося под влиянием потенциала

Вводится унитарный оператор $U(s,t) = e^{iKs}e^{iH(t-s)}e^{-iKt}$ где K — замыкание $-\nabla^2$, гамильтониан H — замыкание суммы $K + V$ (V — оператор умножения на вещественную функцию $V(x,y,z)$. $U(s,t)$ преобразует функцию, представляющую пакет в момент t, в функцию, которая представляет его в момент s. Асимптотическое поведение пакета определяется поведением $U(0,t)$ при больших $|t|$.

При условии

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V(x,y,z)^2\,dx\,dy\,dz < \infty$$

доказывается, что „волновая матрица Мёллера" $U(0, \pm\infty)$ существует как сильный предел $U(0,t)$ при $t \to \pm\infty$. А. А. Нудельман

7855. Теорема о потоке. Хофсоммер (A flux theorem. Hofsommer D. J.), Appl. Scient. Res., 1957, **6**, № 6, 446—448 (англ.)

Двойной поверхностный интеграл

$$E = \frac{L}{\pi}\iint r^{-4}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{A}_1\mathbf{r}\cdot d\mathbf{A}_2, \qquad (1)$$

выражающий величину светового потока, падающего на поверхность из некоторого поверхностного источника ($d\mathbf{A}_1$ и $d\mathbf{A}_2$ — ориентировочные элементы поверхности источника и освещаемой поверхности, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий элементы $d\mathbf{A}_1$ и $d\mathbf{A}_2$), с помощью

двукратного применения теоремы Стокса преобразуется в двойной криволинейный интеграл

$$E = -\frac{L}{2\pi} \oint \oint \log r ds_1 ds_2, \qquad (2)$$

показывающий, что величина E не зависит от формы поверхностей A_1 и A_2, а только от их границ. Рассматриваются примеры применения (2). А. Г. Школьник

7856. Об одном интегральном представлении эйлеровой константы *C*. **Римский-Корсаков Б. С.**, Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 11, 36—41

Двумя способами получено следующее интегральное представление эйлеровой константы C:

$$C = \text{V.P.} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\psi(z) - \ln z}{z-1} dz \qquad (0 < a < 1),$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Э. А. Чернышенко

7857 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Учебное пособие для начинающих. Могенсен (Differential-og intergralregning. En vejledning for begyndere. Mogensen Poul. Gyldendal. 1957, 80 s., ill., kart., 11.85 kr.), Dansk bogfortegnelse, 1957, 107, № 1-3, 33 (датск.)

7858 К. Лекции по математическому анализу. 4-е дополненное издание. Буцано (Lezioni di analisi matematica. 4ed. compl. rif., Buzano Piero, Torino, Ed. Levrotto e Bella, 1956, XVI, 595 p., 5000 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 674, 363 (итал.)

7859 К. Лекции по математическому анализу. Михэилэ (Lectii de analiza-matematică. Mihăilă N. Bucuresti, Inst. perfect. a cadrelor didact., 1957, 309 p., il., 14 lei.—Litogr.), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 18, 633 (рум.)

7860 К. Понятие непрерывности функции. Точки разрыва. Консультация для студ. 1-го курса. Майстрова Т. Л. Всес. заочн. политехн. ин-т. М., 1955, 16 стр., илл., беспл.

7861 Д. Метод критических областей для двумерных интегралов и его применение к задаче теории антенны. Бергхёйс (The method of critical regions for twodimensional integrals and its application to a problem of antenna theory. Berghuis Johan. Thesis. Techn. Hogeschool Delft, 1955, 79 pp.) (англ.)

Изучается интеграл

$$\iint_D g(w, x, y) \exp[if(w, x, y)]\, dx\, dy$$

в том случае, когда параметр w будет большим и положительным. Дается приложение к следующей задаче в теории антенны: найти потенциал вертикального диполя, помещенного в пограничный слой двух бесконечных сред разной магнитной проницаемости, каждая из которых заполняет полупространство. Математические методы основаны главным образом на работе Ван-дер-Корпута. A. E. Heins

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 5, 476

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

7862. Сумма некоторого ряда, содержащего биномиальные коэффициенты. Хеселден (The sum of a certain series involving binomial coefficients. Heselden G. P. M.), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 280—282 (англ.)

7863. Суммирование рядов методом Лотоцкого. Агнью (The Lototsky method for evaluation of series. Agnew Ralph Palmer), Michigan Math. J., 1957, 4, № 2, 105—128 (англ.)

В реферируемой работе ряд $\sum a_i$ с частными суммами s_n называется суммируемым методом Лотоцкого к s (Л-суммируемым к s), если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{nk} s_k}{n!} = s,$$

где p_{nk} — коэффициент при x^k в многочлене $p_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)$ (об этом методе суммирования см. РЖМат, 1955, 2733), где он именуется „p-методом").

В работе излагается в новой редакции ряд результатов цитированной работы Лотоцкого, а также показывается следующее:

1. Расходящийся ряд $0! - 1/z + 2!/z^2 - 3!/z^3 + \cdots$ Л-суммируем к значению $ze^z \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ для каждого z такого, что $\mathrm{Re}\, z \geqslant \log 2$.

Последовательность s_n суммируется методом Эйлера—Кноппа r-го порядка к s ((E, r)-суммируема к s), если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} s_k = s.$$

2. Если некоторая последовательность суммируется методом (E, r), $r > 0$ к s, то эта же последовательность Л-суммируема также к s (для $r = \frac{1}{2}$ это установлено в работе Лотоцкого). Если $r \leqslant 0$ или r не действительно, то только что приведенное утверждение не имеет места.

Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k/k!$ имеет конечный радиус сходимости. Обозначим аналитическое продолжение его суммы вдоль положительной действительной оси (в предположении его существования) через $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k/k!\right)^*$. Если $\int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!}\right)^* dt = s$, то будем говорить, что ряд $\sum a_i$ суммируем методом B^* к s. (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1951, стр. 241.)

3. Всякий Л-суммируемый ряд B^*-суммируем к тому же значению. Л-метод суммирования совместен с экспоненциальным методом суммирования Бореля, с интегральным методом суммирования Бореля.

И. И. Огиевецкий

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

7864. Многочлены Бесселя. I. Чаттерджи (On Bessel polynomials. I. Chatterjee C. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 67—70 (англ.)

Изучаются свойства нулей многочленов Бесселя

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k,$$

где n — целое положительное число. Затем приводится несколько рекуррентных соотношений и неравенств для этих многочленов. А. П. Прудников

7865. Несколько интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра. Бхонсле (Some integrals involving associated Legendre functions. Bhonsle B. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 2, 89—93 (англ.)

С помощью почленного интегрирования вычисляется несколько интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра, например

$$\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\mu} P_{\nu}^{\mu}(x) J_n(2xt)\,dx$$

$$(\operatorname{Re}\mu < 1, \quad \operatorname{Re}\sigma > -1)$$

и т. п. А. П. Прудников

7866. О представлении одного определенного интеграла, содержащего функции Бесселя, при помощи гипергеометрических рядов. Хенрич (On the representation of a certain integral involving Bessel functions by hypergeometric series. Henrici Peter), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 2, 151—156 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении интеграла

$$f(a, b, c) = \int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(bt) J_{\lambda}(ct)\,dt,$$

где a, b, c — произвольные положительные параметры, $\operatorname{Re}(\mu+\nu+1) > -1$. Показано, что известный результат Бейли (Bailey W. N., Proc. London Math. Soc., 1936, **40**, 37 — 48) о представлении данного интеграла в виде произведения двух гипергеометрических рядов при условии $c > a+b$ допускает обобщение на случай любого соотношения между параметрами.

При $a=b=c$ и $\mu=\nu=\pm\lambda$ интеграл может быть выражен в замкнутой форме через гамма-функцию, а именно

$$\int_0^{\infty}\left[J_{\mu}(at)\right]^3 dt = \frac{2\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{1}{6}\right)}{3a\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{5}{6}\right)\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\infty}\left[J_{\mu}(at)\right]^2 J_{-\mu}(at)\,dt = \frac{4\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{1}{6}\right)\sin\frac{3\mu+1}{3}\pi}{3^{3/2}a\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{5}{6}\right)\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$\operatorname{Re}\mu > -1.$$

Н. Н. Лебедев

7867. Неравенства для функции Бесселя $I_n(x)$. Моран (Inequalities for the Bessel function $I_n(x)$. Moran P. A. P.), Quart. J. Math., 1957, **8**, № 32, 287—290 (англ.)

Устанавливаются неравенства вида

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\operatorname{ch}\left(x\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) < I_0(x) <$$

$$< \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\operatorname{ch}\left(x\cos\frac{2k-2}{2N}\pi\right) \qquad (1)$$

и аналогичные неравенства для функций $I_n(x)$ с целым положительным индексом.

Полученные формулы дают очень близкие верхнюю и нижнюю границы для функции $I_0(x)$, причем для фиксированного x точность оценок быстро возрастает с увеличением числа N. Например, при $x=1$ и $N=3$ из (1) следует: $1{,}26602090 < I_0(1) < 1{,}26611085$, в то время как точное значение, найденное из таблиц, будет $I_0(1) = 1{,}26606588$.

При данном N точность оценок тем выше, чем меньше x. Н. Н. Лебедев

7868. Вариант построения теории обобщенных гамма-функций на базе преобразования Лапласа. Римский-Корсаков Б. С., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, **57**, 121—141

Рассматривается функциональное уравнение

$$\varphi(p+1) = f(p)\varphi(p), \qquad (1)$$

где $f(p)$ — заданная функция p, принадлежащая к классу функций с логарифмической производной, представимой в виде преобразования Лапласа от оригинала $h(t)$, ограниченного на $(0, \infty)$.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $\varphi(1)=1$, называется обобщенной гамма-функцией $\Gamma_{f(u)}(p)$. Логарифмическая производная этой функции допускает представление в виде

$$\Psi_{f(u)}(p) = \frac{\Gamma'_{f(u)}(p)}{\Gamma_{f(u)}(p)} = \int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-pt}}{1-e^{-t}}\right]h(t)\,dt + \ln f(1), \qquad (2)$$

$$\operatorname{Re}(p) > 0.$$

Устанавливается ряд свойств рассматриваемых функций (интегральные представления, разложения в бесконечные произведения, асимптотические разложения, теорема умножения и т. д.), которые в частном случае $h(t)=1$, $f(p)=p$ переходят в известные соотношения теории гамма-функции. Н. Н. Лебедев

7869. Функции, обратные функциям Бесселя. Определение нулей. Голд (Inverse Bessel functions: Solution for the zeros. Gold Louis), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 2, 167—171 (англ.)

Предлагается новый метод вычисления нулей функций Бесселя, основанный на использовании рядов, дающих обращение этих функций. Например, если

$$y = J_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{1!^2} + \frac{(x/2)^4}{2!^2} + \dots$$

— функция Бесселя нулевого порядка, то обратная функция

$$x = J_0^{-1}(y) = 2(1-y)^{1/2} + \frac{1}{4}(1-y)^{3/2} + \frac{47}{3^2 2^6}(1-y)^{5/2} + \dots,$$

и наименьший по величине корень $J_0(x)$ будет $x_{01} = J_0^{-1}(0)$. Указан способ вычисления последующих корней, а также корней функций Бесселя с произвольным целым индексом. Н. Н. Лебедев

7870. Что такое вырожденные гипергеометрические функции и для чего они нужны. Трикоми (Cosa sono e a che servono le funzioni ipergeometriche confluenti. Tricomi Francesco G.), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), 25, 3—14 (итал.; рез. англ.)

Автор обращает внимание на то, что вырожденные гипергеометрические функции, несмотря на их важность, до сих пор еще недостаточно популярны. Цель настоящей статьи — познакомить читателя с основны-

ми свойствами этих функций. Изложенный материал мало отличается от подобного материала другой статьи автора (РЖМат, 1956, 3892). Э. Я. Риекстыньш

7871. Асимптотические соотношения для нулей полиномов Лежандра. Дьёльфе (Relaciones asintotical de los ceros de los polinomios de Legendre. Dieulefait Carlos E.), An. Soc. cient. argent., 1957, **163**, № 1-2, 3—5 (исп.)

Доказывается следующая теорема: Пусть x_{in} ($i = 1, 2, \ldots, n$) нули полинома Лежандра $P_n(x)$, расположенные в порядке возрастания их величин, $F(x)$ — произвольная функция, непрерывная в интервале $(-1, 1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(x_{in})=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Н. Н. Лебедев

7872. Рекуррентная формула для присоединенных функций Лежандра последовательных порядков. Мазуренко (Рекурентна формула для приєднаних функцій Лежандра послідовних порядків. Мазуренко Д. М.), Наук. зап. Полтавськ. держ. пед. ін-т, 1955, 8, 107—108 (укр.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7873. Заметка о трансляциях в L^p. Херц (A note on the span of translations in L^p. Herz C. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 724—727 (англ.)

Пусть $f\in L'\cap L^p$; f обладает винеровым свойством замкнутости (C), если замыкание линейного многообразия, порожденного трансляциями данной функции, совпадает с L^p. Так как $f\in L'$, то преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f имеет смысл. В заметке свойство (C) формулируется при помощи структурных свойств множества нулей $Z(\hat{f})$ преобразования Фурье $\hat{f}$.

Определения. Замкнутое множество принадлежит типу U^q, если единственная ограниченная функция в L^q со спектром, содержащимся в данном множестве, есть нуль-функция.

Функция f имеет свойство (U), если $Z(\hat{f})$ имеет тип U^q, где $1/p + 1/q = 1$.

Замкнутое множество принадлежит типу U^{q*}, если не существует нетривиальная комплексная мера ограниченной вариации со спектром в данном множестве, преобразование Фурье—Стилтьеса которой принадлежит L^q.

Функция f имеет свойство (U^*), если $Z(\hat{f})$ имеет тип U^{q*}, где $1/p+1/q=1$.

Доказаны теоремы:

1. Для $1\leqslant p<\infty$ из (U) следует (C).
2. Для $2\leqslant p<\infty$ из (C) следует (U).
2*. Для $1\leqslant p<\infty$ из (C) следует (U^*).

3. Если для некоторого $\varepsilon>0$, $\hat{f}\in\mathrm{Lip}\varepsilon$, тогда из ($C$) следует ($U$).

4. Альтернативные достаточные условия того, что замкнутое множество T имеет тип U^q, $q\geqslant 2$, суть: а) $|\Lambda^h| = o(h^{r(1-2/q)})$ для каждого компактного подмножества Λ множества T; б) $\dim T < 2r/q$ в предположении, что $q\leqslant 2r/(r-2)$, если $r>2$. Здесь Λ^h — множество точек, отстоящих на расстоянии h от Λ, и $|\Lambda^h|$ — лебегова мера этого множества; $\dim T$ — хаусдорфова размерность множества T. Л. Я. Цлаф

7874. Некоторые тауберовы теоремы для обобщенных преобразований Фурье. Любич Ю. И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 1, 32—35

Обобщаются теоремы 4.1 и 4.2 В. А. Марченко (РЖМат, 1956, 8048) на случай нецелых n, k (числа, характеризующие порядок роста усредняемой функции $\alpha(\lambda)$ и дифференциальные свойства ядра $T(N, \lambda)$). Автор применяет дифференцирование дробного (нецелого) порядка. Б. И. Коренблюм

7875. К двумерному преобразованию Фурье. Гриффит (A note on two dimensional Fourier transforms. Griffith J. L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1956 (1957), **90**, № 3, 134—139 (англ.)

Дано доказательство соотношения

$$F^{-1}\left[\frac{e^{-a\rho}}{\rho}\,\overline{w}(\xi,\eta)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0(a)}\int_{0}^{2\pi}\frac{z}{(z^2+a^2)^{1/2}}\,w(x-z\cos\theta,\ y-z\sin\theta)\,d\theta dz,$$

где через $F_2[w(x, y)]$ обозначено преобразование Фурье от функции $w(x, y)$,

$$F_2[w(x,y)]=\overline{w}(\xi,\eta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\xi x+\eta y)}\,w(x,y)\,dx\,dy,$$

а через $F_2^{-1}\left[\overline{w}(\xi,\eta)\right]=w(x, y)$ — его обращение.

Получены аналогичные формулы для $F_2^{-1}\left[\frac{\mathrm{ch}\,a\rho}{\rho}\overline{w}\right]$,

$$F_2^{-1}\left[\frac{\mathrm{ch}\,a\rho}{\rho}\overline{w}\right],\quad F_2^{-1}\left[\mathrm{ch}\,a\rho\cdot\overline{w}\right],\quad F_2^{-1}\left[\mathrm{ch}\,a\rho\cdot\overline{w}\right]$$

$$F_2^{-1}\left[e^{-a\rho}\cdot\overline{w}\right],\quad F_2^{-1}\left[K_0(a\rho)\,\overline{w}\right];\quad F_2^{-1}\left[\rho^{\nu}K_{\nu}(a\rho)\,\overline{w}\right].$$

Я. С. Уфлянд

7876. Граничные свойства одного класса преобразований Лапласа—Стилтьеса. Нобл (Boundary behaviour of a class of Laplace Stieltjes transforms. Noble M. E.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 2, 156—170 (англ.)

Пусть

$$f(s)=\int_0^{\infty}e^{-su}\,dA(u),\qquad(1)$$

где $A(u)$ есть функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале $[0, U]$, $A(0)=0$. Сходимость интеграла (1) в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s)>0$ эквивалентна условию

$$A(u)=O(e^{\theta u})$$

при $u\to\infty$ для некоторого $\theta>0$, так что после интегрирования по частям получаем

$$\frac{f(s)}{s}=\int_0^{\infty}e^{-su}\,A(u)\,du,$$

при этом интеграл сходится абсолютно и равномерно в некоторой ограниченной замкнутой подобласти полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s)$ 0.

Доказывается теорема: Если выполняются условия: 1) $\varphi(x)$ является наименьшей вогнутой мажорантой для

$$\log\left(\int_x^{x+1} |dA| + 2\right), \quad \int^{\infty} \varphi(u)\, u^{-2} du < \infty;$$

2) $f(s)$ ограничена в области, для которой $\mathrm{Re}(s) > 0$ и $|\mathrm{Im}(s)| < t_0$ и существует $f(it) = \lim_{\sigma \to 0} f_+(\sigma + it)$ для почти всех t в интервале $|t| \leqslant t_0$, интеграл

$$\int_0^t \left\{ f(iu) - A \right\} \frac{\sin \lambda u}{u}\, du$$

стремится равномерно к нулю, когда $\lambda \to \infty$;
3) существуют положительные последовательности $\omega_k \to \infty$, $\Delta_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такие, что $A(u)$ постоянна в интервале $|\omega_k - u| < \Delta_k$ — тогда существует положительное число $c(t_0)$ такое,
что если

$$\liminf \frac{\Delta_k}{\varphi(\omega_k)} > c(t_0),$$

то $A(\omega_k) \to A$ при $k \to \infty$.

Далее рассматриваются некоторые обобщения указанной теоремы. П. И. Кузнецов

7877. Обобщенное преобразование Лапласа — Стилтьеса. Мак-Кроссен (A generalized Laplace—Stieltjes transformation. McCrossen Garner), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 278—285 (англ.)

Пусть F — комплекснозначная функция ограниченной вариации действительного переменного, определенная на каждом замкнутом конечном интервале $[0, T]$, $T \geqslant 0$ за исключением множества изолированных точек; $\{F\}$ — множество функций, определенных выше, и k — целое положительное число. Все интегралы, используемые в статье, суть интегралы Римана или Римана — Стилтьеса. Пусть s — комплексное и

$$M_k(s, t) = \frac{k}{t^k} \left\{ \left[\int_0^t e^{-su}\, dF(u) \right] * t^{k-1} \right\},$$

где $F(u) \in \{F\}$ и $*$ означает свертку.

Если для некоторого s и некоторого k существует предел $\lim_{t \to +\infty} M_k(s, t)$, то этот предел автор обозначает через $f_k(s)$;

$$f_k(s) = \lim_{t \to +\infty} M_k(s, t)$$

и называет его обобщенным преобразованием Лапласа—Стилтьеса порядка k для функции F.

Устанавливается ряд теорем относительно существования предела $f_k(s)$ и его интегральных представлений, например

Теорема 3. Если $f_k(s_0)$ существует и $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, то $f_k(s)$ также существует. Кроме того, $M_k(s, t)$ сходится равномерно к $f_k(s)$ в каждой угловой области $Q_w(s_0)$, определяемой неравенством $|\arg(s - s_0)| \leqslant w$, где w — фиксированное число из полузамкнутого интервала $0 \leqslant w < \pi/2$.

Если $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ или $s = s_0$, то имеет место следующее представление $f_k(s)$:

$$f_k(s) = \int_0^{\infty} \frac{(s - s_0)^{k+2}}{k!}\, e^{-(s - s_0)t} \left\{ \left[\int_0^t e^{-s_0 u}\, dF(u) - f_k(s_0) \right] * t^k \right\} dt + f_k(s_0), \qquad (1)$$

$$f_k(s) = \int_0^{\infty} \frac{(s - s_0)^{k+1}}{k!}\, e^{-(s - s_0)t}\, d \left\{ \left[\int_0^t e^{-s_0 u}\, dF(u) - f_k(s_0) \right] * t^k \right\} + f_k(s_0). \qquad (2)$$

Интегралы в (1) и (2) равномерно сходятся в каждой области $Q_w(s_0)$. Интеграл в (1) абсолютно сходится для $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$. Далее устанавливаются свойства взаимной однозначности введенных преобразований и аналитичности функций $f_k(s)$. П. И. Кузнецов

7878. Двумерное преобразование Гильберта. Даффин (Two-dimensional Hilbert transforms. Duffin R. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 239—245 (англ.)

С помощью двумерного преобразования Фурье и теории кватернионов дается обобщение на случай трех измерений известных связей между преобразованием Гильберта, сопряженными гармоническими функциями и интегралами Пуассона и Коши.

Доказываются основные интегральные соотношения, принимаемые в качестве трехмерного аналога преобразования Гильберта:

$$V(x, y, z) = T\left[-ie^{-i\theta - zr} u\right], \quad U(x, y, z) = T\left[ie^{i\theta - rz} v\right],$$

где через f обозначено двумерное преобразование Фурье от функции F

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x\bar{x} + y\bar{y})} F\, dx\, dy, \quad (re^{i\theta} = \bar{x} + i\bar{y}),$$

а через T — соответствующее обращение

$$T(f) = F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\bar{x} + y\bar{y})} f\, d\bar{x}\, d\bar{y}.$$

Выводятся также формулы, аналогичные уравнениям Коши—Римана для плоского случая:

$$\frac{dU}{dz} + \frac{dV}{dx} + i\frac{dV}{dy} = 0, \qquad \frac{dV}{dz} - \frac{dU}{dx} + i\frac{dU}{dy} = 0.$$

Я. С. Уфлянд

7879. К теории операторного исчисления. Диткин В. А., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 1, 15—17

В работе построено операционное исчисление для оператора $\frac{d}{dt} t \frac{d}{dt}$. Для этого строится кольцо C_2 дважды дифференцируемых функций, определенных на полупрямой $0 \leqslant t < \infty$, вторые производные которых—кусочно-непрерывные функции. Произведение двух функций в этом кольце равно

$$\varphi(t) \cdot \psi(t) = \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_0^1 \varphi(x\xi)\, \psi[(1 - x)(t - \xi)]\, dx \right\}.$$

Здесь $\varphi(t) \in C_2$, $\psi(t) \in C_2$. Сложение в кольце определено в обычном смысле. Доказывается возможность расширения этого кольца до поля отношений. Следуя Микусинскому, автор называет элементы поля операторами. Оператор $1/t$ обозначается буквой B. Доказывается, что

$$\frac{1}{B} \psi(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi} \psi(u)\, du.$$

Если $\varphi(t)\in C_3$ и $\varphi(0)=0$, то

$$B\varphi(t)=\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Далее приводятся формулы операционного исчисления для оператора B, например

$$\frac{B}{B^2+a^2}=\operatorname{ber}(2\sqrt{at}),\quad \frac{B}{(B-a)^{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{a}\right)^{n/2}I_n(2\sqrt{at}).$$

Указано, что операционное исчисление можно построить исходя из интегрального преобразования

$$\bar{\varphi}(p)=2\int_0^\infty \varphi(t)\,K_0(2\sqrt{pt})\,dt.$$

Если функция $\varphi(t)$ измерима и удовлетворяет условию

$$|\varphi(t)|<Qe^{2\gamma_0\sqrt{t}}$$

где Q и $\gamma_0>0$ — постоянные, то в этом случае имеет место теорема умножения: Если $\varphi(t)$ отвечает $\bar{\varphi}(p)$ и $\psi(t)$ отвечает $\bar{\psi}(p)$, то произведению $\bar{\varphi}(p)\bar{\psi}(p)$ отвечает функция

$$\omega(t)=\int_0^t d\xi\int_0^1\varphi(x\xi)\,\psi[(1-x)(t-\xi)]\,dx.$$

Следует отметить также, что автор указывает на целесообразность изложения операционного исчисления Хевисайда, исходя из произведения

$$a(t)*b(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t a(t-\xi)\,b(\xi)\,d\xi.$$

Это упрощает теорию Микусинского, так как не приходится различать константы от функций констант.

П. И. Кузнецов

7880. Операционное исчисление. 4. Решение с помощью рядов (Operational calculus. 4. Solution by means of series. Computer), Electronic and Radio Engr, 1957, 34, № 12, 462—464 (англ.)

См. также РЖМат, 1958, 5856.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

7881. Разрешающая структура и временные соотношения в простом выборе поведения. Кристи, Льюс (Decision structure and time relations in simple choice behavior. Christie Lee S., Luce R. Duncan), Bull. Math. Biophys., 1956, 18, № 2, 89—112 (англ.)

Излагается применение понятия графа и известных фактов из теории преобразования Лапласа к анализу некоторых простейших «психических функций» (реагирование на стимулирующую ситуацию). С. А. Стебаков

7882. Целесообразная замена оборудования. Белман (Equipment replacement policy. Bellman Richard), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 3, 133—136 (англ.)

Вопросы экономически выгодной замены оборудования предприятия сводятся к несложному исследованию некоторого функционального уравнения.

С. А. Стебаков

См. также: 7409, 7410, 7411, 7412, 7413, 7416, 7609, 7637, 7638, 7695, 7696, 7727, 7736, 7762, 7784, 7816

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

7883. Общее определение сходимости, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Эйбиан (A general definition of convergence, continuity, differentiability and integrability. Abian Sambat), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 3, 418—420 (англ.; рез. итал.)

Пусть имеется совокупность $\mathfrak{X}=\{X_i\}$ $(i\in I)$ подмножеств множества X такая, что $\bigcup_{i\in I}X_i=X$. Семейство $\mathfrak{F}=\{X_i\}$ $(i\in J\subset I)$ называется сходящимся к непустому множеству $L=\bigcap_{i\in J}X_i$, если $\mathfrak{F}$ состоит из всех таких $X_i\in\mathfrak{X}$, которые имеют с L непустое пересечение. При этом пишут $\mathfrak{F}\to L$. Множество $L\subset X$ называется пределом множества $A\subset X$, если существует семейство $\mathfrak{F}=\{X_i\}\to L$ $(i\in J\subset I)$ такое, что пересечение $(X_i-L)\cap A$ непусто при любом $i\in J$. Множество $A\subset X$ называется сходящимся к L, если L есть единственный предел A. На основе этого определения сходимости даются определения понятий, указанных в заглавии. Утверждается, что классические определения есть специальные случаи определений статьи.

Г. П. Акилов

7884. Принцип равностепенной непрерывности для топологических векторных пространств. Уэстон (The principle of equicontinuity for topological vector spaces. Weston J. D.), Proc. Univ. Durham Philos. Soc., 1957, 13, № 1, 5 pp. (англ.)

Пусть X и X_0 — топологические линейные пространства, $\mathfrak{F}$ — некоторый класс линейных непрерывных отображений X в X_0. Говорят что отображения класса $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывны, если для любой окрестности U_0 нуля и в X_0 можно указать окрестность U нуля в X такую, что $f(U)\subset U_0$ каково бы ни было $f\in\mathfrak{F}$. Свойство равностепенной непрерывности влечет ограниченность в следующем смысле: для каждого $x\in X$ множество всех $f(x)$, где f пробегает $\mathfrak{F}$, ограничено в X_0. Если пространства X и X_0 таковы, что верно и обратное (т. е. ограниченность в указанном смысле влечет равностепенную непрерывность), то говорят, что имеет место принцип равностепенной непрерывности. Рассматриваются различные достаточные для этого условия. Например, доказывается, что принцип имеет место в каждом из следующих двух случаев: 1) X_0 произвольно, X — пространство Бэра (т. е. пространство 2-й категории); 2) X и X_0 локально выпуклы, причем X есть t-пространство (espace tonnelé).

Доказывается следующая теорема, обобщающая теорему Банаха—Штейнхауса: Пусть X и X_0 локально выпуклы, X_0 — пространство Хаусдорфа; $\{f_n\}$ —после-

довательность непрерывных линейных отображений X в X_0, причем для каждого $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится. Тогда предельное отображение f (необходимо линейное), определяемое равенством $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ непрерывно, если имеет место принцип равностепенной непрерывности. Кроме того, если X_0 секвенциально полно, то сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ на всем X вытекает из ее ограниченности для каждого $x \in X$ и сходимости на множестве, плотном в X.

Приводится пример сходящейся последовательности непрерывных линейных отображений, предел которой не непрерывен, хотя X есть t-пространство.

С. Н. Крачковский

7885. Заметка о топологии пространства $\mathfrak{L}(E, E)$ Касахара (Note sur la topologie de l'espace $\mathfrak{L}(E, E)$. Kasahara Shouro), Math. japon., 1955, 3, № 3, 93—96 (франц.)

Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое хаусдорфово пространство, $\mathfrak{L}(E, E)$ — множество непрерывных эндоморфизмов пространства E. Выпуклое симметричное подмножество E называется диском. Окрестность, отличная от всего пространства, называется нетривиальной.

Пусть $\mathfrak{S}$ — система замкнутых дисков. В $\mathfrak{L}(E, E)$ вводится топология $\mathfrak{S}$-сходимости, т. е. равномерной сходимости на множествах системы $\mathfrak{S}$, относительно которой $\mathfrak{L}(E, E)$ превращается в линейное топологическое хаусдорфово пространство $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, E)$. В заметке устанавливается критерий нормируемости пространства E, выраженный через свойства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, E)$.

Основной результат: Пусть $A \neq \{0\}$ и B — замкнутые ограниченные диски, N и N' — нетривиальные дисковые окрестности нуля, удовлетворяющие условиям: 1) $\lambda N' \subset N$ при некотором $\lambda > 0$; 2) для любых $u, v \in W(B, N)$ произведение uv входит в $W(A, N')$, где вообще $W(A, N) = \{u;\ u \in \mathfrak{L}(E, E),\ u(A) \subset N\}$.

Тогда E нормируемо.

Опечатка: В лемме вместо условия $A \subset F$ должно быть $A \subset E$.

Ю. Л. Шмульян

7886. О пространстве непрерывных эндоморфизмов локально выпуклого векторного пространства. Касахара (Sur l'espace des endomorphismes continus de l'espace vectoriel localement convexe. Kasahara Shouro), Math. japon., 1955, 3, № 3, 111—116 (франц.)

Продолжение предыдущей заметки автора (реф. 7885). Показывается, что в основном результате условие 1) может быть опущено. Если произведение uv элементов u и v пространства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, E)$ непрерывно зависит от u и v, то E нормируемо. Во второй части заметки на локально выпуклые хаусдорфовы пространства переносится теорема Эйдельхейта (Eidelheit M., Studia math., 1940, 9, 97—105).

Пусть E и F — локально выпуклые хаусдорфовы пространства, Φ — изоморфное отображение алгебры $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(E, E)$ на алгебру $\mathfrak{L}_{\mathfrak{T}}(F, F)$. Тогда существует такое изоморфное отображение φ пространства E на пространство F, что

$$\Phi(u) = \varphi u \varphi^{-1} \quad (\varphi \in \mathfrak{L}_{\gamma}(E, E)).$$

Обратное справедливо, если $\mathfrak{T} = \varphi(\mathfrak{S})$.

Ю. Л. Шмульян

7887. Об одном свойстве ядерных пространств. Райков Д. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 231—236

Рассматривается счетно-нормированное пространство E, нормы в котором $|x|_1 \leqslant |x|_2 \leqslant \ldots$ согласованы, так что из $|x_\nu - x_\mu|_{n+1} \to 0$ $(\nu \to \infty, \mu \to \infty)$ и $|x_\nu|_n \to 0$ следует $|x_\nu|_{n+1} \to 0$. Пополнение E по n-й норме обозначается через E_n; предполагается что $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. При $n < m$ вложение $E_m \subset E_n$ всегда взаимно однозначно и непрерывно. Если для каждого n найдется такое $m > n$, что при всяком $x \in E_m$ имеет место представление $x = \sum f_k(x) y_k$, где $\{f_k\}$ — фиксированная последовательность линейных функционалов на E_m, $\{y_k\}$ — фиксированная последовательность элементов E_n и $\sum |f_k|_m |y_k|_n < \infty$, то E называется ядерным по Гротендику. (Таковы, в частности, пространство целых функций и пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, обращающихся в нуль при $|x| \geqslant 1$). Если всякий слабо абсолютно сходящийся ряд линейных функционалов на E абсолютно сходится по некоторой норме E'_n, то E называется ядерным по Гельфанду.

Теорема: Пространство, ядерное по Гротендику, является и ядерным по Гельфанду.

Указываются обобщения на более широкие классы пространств (t-пространства).

Примечание референта. Как сообщил референту автор, в последнее время его учеником А. С. Дыниным доказана и обратная теорема (ядерность по Гельфанду влечет ядерность по Гротендику) для счетно-нормированных пространств, сопряженных к ним, и некоторых других типов.

Г. Е. Шилов

7888. Экстремальное строение выпуклых множеств. Кли (Extremal structure of convex sets. Klee V. L., Jr), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 234—240 (англ.)

Целью статьи является обобщение следующей теоремы (теорема 1.1): Пусть C есть выпуклое компактное подмножество локально выпуклого хаусдорфова линейного пространства и X есть подмножество C. Тогда C есть выпуклая замкнутая оболочка X в том и лишь в том случае, когда каждая экстремальная точка C лежит в замыкании X.

Для случая, когда топология в C задана с помощью системы вещественных функций путем введения окрестностей по Тихонову, этот результат был получен в статье референта (Докл. АН СССР, 1947, 57, № 2). Автор ошибочно делает ссылку на другую статью референта (Докл. АН СССР, 1948, 59, № 7).

Экстремальным лучом в выпуклом множестве C называется открытая полупрямая $\rho \subset C$, которая вместе с внутренней точкой отрезка, соединяющего точки $x \in C$, $y \in C$, должна содержать точки x и y. Через ext C и rext C обозначены, соответственно, множества экстремальных точек и экстремальных лучей C.

Доказывается теорема (теорема 3.4): Пусть C есть локально компактное, выпуклое, замкнутое подмножество локально выпуклого хаусдорфова линейного пространства и C не содержит прямых линий. Тогда C совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой объединения ext $C \cup$ rext C.

Через erext C обозначется совокупность концов экстремальных лучей C. Приводится пример четырехмерного выпуклого замкнутого множества C, в котором ext C содержится в замыкании erext C и при этом ни одно из множеств ext C, rext C, erext C, ext $C \cup$ rext C, rext $C \cup$ erext C не является замкнутым.

Доказывается теорема (теорема 3.6): C совпадает с выпуклой замкнутой оболочкой rext C (в условиях теоремы 3.4) в том и лишь в том случае, когда ext C содержится в замыкании erext C.

Д. П. Мильман

7889. Незамкнутый относительный спектр. Асплунд (A non-closed relative spectrum. Asplund Edgar), Arkiv mat., 1958, 3, № 5, 425—427 (англ.)

Пусть E — линейное топологическое пространство; T — линейный непрерывный оператор, отображающий E в себя; $T_\lambda = T - \lambda I$. Если для данного комплекс-

ного λ существует непрерывный линейный оператор R_λ, отображающий E в себя, такой, что $T_\lambda R_\lambda T_\lambda = T_\lambda$, то λ называется относительно регулярным значением. Все λ, не являющиеся относительно регулярными, образуют относительный спектр T.

Показывается, что если α принадлежит относительному спектру T, то относительный спектр оператора $T' = \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ I & T \end{pmatrix}$, действующего в $E+E$, совпадает с относительным спектром T, из которого удалено α. Строится пример оператора T в гильбертовом пространстве H, имеющего в качестве относительного спектра единичную окружность $|\lambda| = 1$. (Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормальный базис в H, то $Tx_1 = 0$, $Tx_{n+1} = x_n$, $n \geqslant 1$). Отсюда вытекает, что относительный спектр оператора может быть незамкнутым множеством. Ф. В. Широков

7890. О банаховых пространствах, содержащих подпространства, изоморфные пространству c_0. Пелчинский (On B-spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. Pelczyński A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 8, 797—798 (англ.; рез. русск.)

Пусть c_0 — пространство всех действительных последовательностей $x = \{a_i\}$, стремящихся к нулю с нормой $\|x\| = \sup_i |a_i|$.

Основной результат работы: Следующие условия равносильны: а) в банаховом пространстве X существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, безусловно слабо сходящийся, но не безусловно сходящийся; б) пространство X содержит подпространство, изоморфное пространству c_0.

Приводится пример бесконечного подпространства пространства c_0, не изоморфного пространству c_0.

Резюме автора

7891. Об аппроксимации пространства типа S конечномерными пространствами. Пелчинский (On the approximation of S-spaces by finite dimensional spaces. Pelczyński A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 9, 879—881 (англ.; рез. русск.)

B_0-пространство X называется пространством типа S, если в нем для каждой однородной и непрерывной псевдонормы $|x|$ существует „компактифицирующая" псевдонорма $\|x\|$ такая, что множество

$$K_{\|x\|} = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$$

является вполне ограниченным по отношению к метрике, индуцированной псевдонормой $|x|$.

Из результатов Мазура и Орлича следует, что топология в S-пространстве всегда может быть определена последовательностью псевдонорм $|x|_\nu$ таких, что $|x|_\nu \leqslant |x|_{\nu+1}$, причем $|x|_{\nu+1}$ компактифицирует $|x|_\nu$.

Пусть $a_{ij}(X,t) = n_t$ есть максимальное число таких точек $x_\nu \in K_{|x|_{i+j}}$, что $x_\nu - x_\mu|_i \geqslant t > 0$. Утверждается что асимптотические свойства матрицы $\{a_{ij}(x,t)\}$ при $t \to 0$ инвариантны относительно изоморфного преобразования пространства X. Это позволяет установить неизоморфность некоторых пространств типа S и доказать, что не существует универсального пространства типа S, которое содержало бы части, изоморфные произвольному S-пространству.

Примечание референта. В русском резюме работы имеется значительное количество опечаток, искажающих смысл формул. В. Н. Никольский

7892. Топологии в линейных упорядоченных пространствах. Амэмия, Мори (Topological structures in ordered linear spaces. Amemiya Ichiro, Mori Tuyosi), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 1, 131—142 (англ.)

В условно полной структуре L обычным образом, посредством (o)-сходимости (по фильтрам), вводится топология $\mathfrak{T}_0$. Произвольная топология на L называется совместимой со структурой, если каждый элемент имеет базис окрестностей U, $\mathfrak{T}_0$-замкнутых и (o)-выпуклых (последнее означает, что если $a, b \in U$, $a < b$, то весь отрезок $[a, b] \subset U$), и операции $\vee$ и $\wedge$ непрерывны на $L \times L$. В K-пространстве E топология называется совместимой, если она совместима со структурой E и с линейными операциями в E.

Структура L называется топологически упорядоченной, если в L существует хаусдорфова топология $\mathfrak{T}_1$, более слабая, чем $\mathfrak{T}_0$, и совместимая со структурой. Если полная структура L топологически упорядочена, то в L существует единственная совместимая хаусдорфова топология $\mathfrak{T}_1$, более слабая, чем $\mathfrak{T}_0$, и совокупность всех $\mathfrak{T}_0$-открытых, (o)-выпуклых множеств составляет открытый базис в $\mathfrak{T}_1$. Эта топология называется внутренней. Полная структура L с внутренней топологией всегда регулярна и каждое открытое множество в L—2-й категории. Произведение топологически упорядоченных структур топологически упорядочено, а его внутренняя топология — произведение внутренних топологий факторов.

В K-пространствах строятся слабейшая и сильнейшая совместимые топологии, причем сильнейшей выпуклой топологией оказывается $\beta(E, E')$ (в обозначениях гл. IV книги Бурбаки (РЖМат, 1956, 3163К).

Б. З. Вулих

7893. Регулярные идеалы в частично упорядоченных векторных пространствах. Бонсалл (Regular ideals of partially ordered vector spaces. Bonsall F. F.) Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 24, 626—640 (англ.)

Частично упорядоченное векторное пространство V — линейное множество, в котором выделен конус V^+ положительных элементов, причем: 1) $x, y \in V^+$ и $\alpha \geqslant 0$ влечет $x + y, \alpha x \in V^+$; 2) $x, -x \in V^+$ влечет $x = 0$. Идеалом называется линейное подмножество $J \subset V$ такое, что из $x \in V$ и $-j \leqslant x \leqslant j$ при некотором $j \in J$ вытекает $x \in J$. Фактор-пространство V/J также будет частично упорядоченным векторным пространством.

Элемент $e \in V$ называется сильной единицей (order unit), если для каждого $x \in V$ существует λ, при котором $-\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e$. Идеал J называется регулярным, если V/J содержит сильную единицу. Это понятие введено автором ранее (РЖМат, 1956, 1494). Элемент $e \in V$ называется сильной единицей по модулю J, если класс $[e]$ — сильная единица в V/J. Каждый собственный регулярный идеал содержится в максимальном идеале.

В работе дается ряд приложений регулярных идеалов, в частности, доказывается следующее обобщение теоремы М. Г. Крейна о распространении линейных положительных функционалов (Крейн М. Г., Рутман М. А., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 3 — 95, теорема 1.1): Пусть подпространство $V_0 \subset V$ покрывает V, т. е. для любого $x \in V$ существует такой $y \in V_0$, что $-y \leqslant x \leqslant y$. Тогда каждый линейный положительный функционал, заданный на V_0, распространим с сохранением линейности и положительности на V. Автор не отмечает, что эта теорема по существу содержится в теореме Л. В. Канторовича (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., Гостехиздат, 1950, 345), в которой предположение о том, что рассматриваемое пространство—структура, может быть отброшено. В той же монографии имеются и даваемые автором приложения теоремы о распространении функционала к проблеме моментов Стилтьеса и Гамбургера (гл. IX, теоремы 5.31 и 5.32).

Доказательство теоремы о распространении функционала автор получает с помощью следующей теоремы об идеалах: Пусть подпространство V_0 покрывает V, а J_0 — собственный регулярный идеал в V_0 и e — сильная единица в V_0 по модулю J_0. Тогда в V существует собственный регулярный идеал J такой, что $J_0 \subset J$, а e — сильная единица в V по модулю J.

В качестве других приложений регулярных идеалов даются доказательства существования интеграла Хара и теоремы И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка о представлении колец с инволюцией с помощью операторов.

Б. З. Вулих

7894. Обобщение понятия неразложимости. Тагамлицкий (Върху едно обобщение на понятието за неразложимост. Тагамлицки Я.), Годишник Софийск. ун-та, Физ.-матем. фак. 1953—1954. Кн. I, ч. I, София, 1954, 69—85 (болг., рез. русск.)

Пусть K — некоторый абстрактный нормированный конус и $P(f)$—одна из его норм. Автор называет элемент f конуса K неразложимым относительно нормы $P(f)$, если $f \neq 0$ и условия $f=g+h$, $g \in K$, $h \in K$, $P(f)=P(g)+P(h)$ выполняются только при $g=\lambda f$, $h=\mu f$, где λ и μ —неотрицательные числа. Автор обобщает полученные им ранее (РЖМат, 1954, 4484) результаты, относящиеся к неразложимости в обычном смысле, и указывает на некоторые приложения.

Резюме автора

7895. Полуполуупорядоченные и полуупорядоченные множества непрерывных функций. Шоке, Дени (Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues. Choquet G., Deny J.), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 2, 179—189 (франц.)

Множество E непрерывных функций на хаусдорфовом пространстве X называется полуполуупорядоченным снизу, если из условия $u, v \in E$ следует, что $u \wedge v \in E$, (при этом inf двух функций вычисляется по их значениям в каждой точке).

Доказывается, что всякий конус $E \subset C(x)$, выпуклый полуполуупорядоченный снизу и замкнутый относительно равномерной сходимости на любом компактном множестве из X (последнее означает, что если $f \in C(x)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и компактного $K \subset X$ существует такая $g \ni E$, что $|f(x)|-g(x)|<\varepsilon$ на K, но $f \in E$), может быть охарактеризован с помощью двух семейств $\{\sigma\}$ и $\{\tau\}$ неотрицательных мер Радона с компактными носителями таких, что для этих мер и для каждой функции $u \in E$ выполняются неравенства:

1) $\int u(y)\, d\sigma(y) \leqslant u(x)$ (точка $x \in X$ определяется по мере σ и при этом $\sigma(\{x\}) = 0$),

2) $\int u(y)\, d\tau(y) \leqslant 0$.

Эти условия упрощаются, если E состоит из неотрицательных функций.

Опечатка: на стр. 184 в случае, когда $a \leqslant 0$, нужно получить $\tau = -\mu$. Б. З. Вулих

7896. Об одном принципе существования в линейном анализе. Фаэдо (Su un principio di esistenza nell' analisi lineare. Faedo Sandro), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, **11**, № 1-2, 1—8 (итал.)

Пусть V — линейное множество, B_1 и B_2 — пространства Банаха, M_1 и M_2 — линейные операции из V соответственно в B_1 и B_2, Φ — линейный непрерывный функционал в B_1. В работе исследуется вопрос о существовании линейного функционала Ψ, непрерывного в B_2 и такого, что при любых $v \in V$

$$\Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)]. \qquad (1)$$

Основной результат: Пусть $V_i = E$ $(v \in V : M_i(v) = 0)$, $i = 1,2$. Необходимое и достаточное условие разрешимости (1) при любом Φ, равном нулю на M_1 (V_2), состоит в существовании $K \geqslant 0$ такого что

$$\inf_{v_2 \in V_2} \| M_1(v + v_2) \| \leqslant K \| M_2(v) \|$$

для всякого $v \in V$. Если это условие выполнено, то существует решение Ψ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству $\| \Psi \| \leqslant K \| \Phi \|$, равное нулю на $M_2(V_1)$; всякое решение (1) получается прибавлением к Ψ функционала, равного нулю $M_2(V)$.

Доказательство использует теорему Хана-Банаха. Из приведенной теоремы легко следует одна теорема Фикера (Fichera G.), относящаяся к уравнению (1), В качестве приложения доказанной теоремы автор получает условия разрешимости некоторой краевой задачи для эллиптико-параболического уравнения. В. П. Хавин

7897. О неархимедовски нормированных пространствах. III. IV. Монна (Sur les espaces normés non-archimédiens. III, IV. Monna A. F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 4, 459—467, 468—476; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 459—467, 468—476 (франц.)

В первых двух частях работы (РЖМат, 1957, 6472, 6473) рассматривались сепарабельные пространства над сферически (сф) полным полем K. Тем же методом теперь исследуется общий случай несепарабельных пространств. Эти пространства были охарактеризованы Флейшером (РЖМат, 1956, 592) при дополнительных условиях: поле K дискретно и норма принимает значения в K. В работе дается уточнение теоремы Флейшера при меньших ограничениях.

Пусть I — некоторое вполне упорядоченное множество и $\{e_\alpha\}$ $(\alpha \in I)$—базис некоторого линейного пространства над полем K. Таким образом, элементами пространства являются конечные линейные комбинации $x = \sum_1^n (a_i e_{\alpha_i}$ $(a_i \in K,\ \alpha_i \in I)$. Определим в нем норму, положив $\| x \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. Пополнение этого пространства обозначим $\{e_1, \ldots, e_\alpha, \ldots\}$ $(\alpha \in I)$. Его элементами являются ряды $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\alpha_i}$, где $\lim_{i \to \infty} a_i = 0$, а норма задается соотношением

$$\| x \| = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |a_i|. \qquad (1)$$

Пусть теперь E — произвольное линейное неархимедовски нормированное пространство (РЖМат, 1956, 592) над сф. полным полем K (определение сферической полноты, ортогональности, ортогонального дополнения см. РЖМат, 1957, 6472).

Рассмотрим систему попарно ортогональных векторов y_α $(\alpha \in E)$ из E. Через V_α обозначим ортогональное дополнение к $\{y_\alpha\}$ — линейной оболочке вектора y_α (скаляры — из K). Система y_α $(\alpha \in I)$ называется ортогональной системой, если

$$y_\alpha \in V_\beta \quad (\alpha, \beta \in I,\ \alpha \neq \beta).$$

Основной результат (теорема 4): Пусть E — полное пространство над сф. полным полем K. Тогда в E существует ортогональная система y_α $(\alpha \in I)$ такая, что для любого $x \in E$ имеет место единственное разложение

$$x = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha y_\alpha \qquad (a_\alpha \in K),$$

в котором не более чем счетное множество членов отлично от нуля. При этом $\|x\| = \sup_{\alpha} \|a_\alpha y_\alpha\|$ и E изоморфно рассмотренному выше пространству $\{e_1, \ldots, e_\alpha, \ldots\}$ $(\alpha \in I)$, нормированному соотношением (1).

Таким образом, теорема 4 устанавливает существование в E полной ортогональной системы y_α $(\alpha \in I)$ (т. е. системы, всюду плотной в E).

В части IV показывается, что все полные ортогональные системы равномощны (теорема 5). Для полноты ортогональной системы y_α $(\alpha \in I)$ в E необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha = \Theta$ (теорема 6).

Пусть задано ограниченное множество $\{c_\alpha\}$ $(\alpha \in I)$ элементов поля K. Если y_α $(\alpha \in I)$ — полная ортогональная система в E и для любого $x \in E$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{\alpha_k} \quad (x_k \in K),$$

то определим в E линейный функционал равенством

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k} x_k.$$

Сопряженное пространство E^* есть пространство ограниченных последовательностей из K над множеством индексов I, нормированное соотношением $\|f\| = \sup_{\alpha \in I} |c_\alpha|$.

С помощью пространства E^* определяется слабая сходимость последовательности $\{x^{(n)}\}$ элементов из E к $x \in E : \lim_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = f(x)$ для всех $f \in E^*$.

Всякая последовательность $\{x^{(n)}\}$, слабо сходящаяся к элементу x, сходится к x и по норме (теорема 9).

Последовательность $\{x^{(n)}\}$ называется слабо сходящейся, если для каждого $f \in E^*$ существует предел $\lim_{n \to \infty} f(x^{(n)})$. Пространство E обладает слабой полнотой, т. е. каждая слабо сходящаяся последовательность сходится слабо к некоторому элементу x (теорема 10). И. С. Иохвидов

7898. Заметка о геометрии линейных нормированных пространств. Персидский К. П., Вестн. АН КазССР, 1957, № 4, 91—95 (рез. каз.)

Ряд тривиальных замечаний о длине линий, величине углов между двумя векторами и площадях плоских фигур в банаховом пространстве. Заметка изобилует опечатками. В ссылке на результат Ю. Г. Решетняка (РЖМат, 1954, 3827) не указаны том и выпуск журнала «Успехи матем. наук», где был опубликован этот результат, а год публикации искажен (указан 1955 вместо 1953 г.). И. С. Иохвидов

7899. Об одном классе функциональных преобразований. Букур (Asupra unei clase de transformari functionale. Bucur Fl.), Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1956, **18**, № 3-4, 129—131 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается связь между вполне непрерывными преобразованиями банахова пространства E в банахово пространство F и преобразованиями, непрерывно отображающими пространство E со слабой топологией в пространство F с обычной топологией.

Примечание референта. Первая теорема статьи ошибочна. Остальные результаты известны; см. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов (РЖМат, 1957, 5737К примеры и ссылки на стр. 24—26 книги). Математическая терминология в русском резюме искажена. К. М. Фишман

7900. О точках Лебега-Орлича. Салехов Д. В., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 3, 355—358

По аналогии с кратными точками Лебега вводится понятие точки Лебега—Орлича: точка x_0 является точкой Лебега — Орлича порядка M функции $f(x)$, если

$$\lim_{h \to 0} \| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\left[f(x) - f(x_0)\right] H_h(x) \|_M = 0,$$

где $M(u)$ — некоторая N'-функция Юнга; $\|\ldots\|_M$ — норма в пространстве Орлича, построенного по этой функции; $M^{-1}(u)$ — функция, обратная к $M(u)$; $H_h(x)$ — характеристическая функция сегмента $[x_0-h,\ x_0+h]$.

Точки Лебега — Орлича образуют промежуточный класс между точками Лебега и точками непрерывности функции.

Для ограниченной функции класс точек Лебега — Орлича совпадает с классом точек Лебега тогда и только тогда, когда функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию Юнга.

Исследуется, как изменяется класс точек Лебега — Орлича в зависимости от выбора той или иной функции $M(u)$. Оказывается, что существуют ограниченные измеримые функции, не имеющие ни одной точки Лебега — Орлича порядка M, если функция $M(u)$ обладает свойством $M^2(u) \leqslant M(ku)$ при больших u. В работе схематически описывается сложная конструкция примера такой ограниченной функции. Исследуется связь между свойством функции иметь точку точкой Лебега — Орлича и метрической структурой множеств, вдоль которых данная функция непрерывна в этой точке. С. Г. Крейн

7901. Условия непрерывности линейного оператора, выраженные в свойствах его квадрата. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 98—101

Пусть $E^* \subset H \subset E$, где H — гильбертово пространство, E — банахово пространство и E^* — пространство, сопряженное к E. Предполагается, что E^* плотно в H (по метрике H), а множество H плотно в E (по метрике E). Предполагается также, что при $x \in H$, $y \in E^*$ значение функционала y на элементе x есть скалярное произведение (x, y) элементов x, y, определенное в H.

Рассматривается ограниченный линейный оператор A в H.

Теорема 1. Если оператор $B = A^*A$ ограничен как оператор из E в E^*, то оператор A является ограниченным оператором из H в E^*.

Теорема 2. Если B — вполне непрерывный оператор из E в E^*, то A будет вполне непрерывным оператором из H в E^*.

Теоремы применяются к интегральному оператору с ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условию

$$|K(s,t)| \leqslant \alpha + \beta r^{-n/2},$$

где r — расстояние между точками s и t n-мерной ограниченной области D, а α и β — постоянные. За H принимается $L^2(D)$. Выбирая в качестве E подходящее пространство Орлича, авторы уточняют известные теоремы С. Л. Соболева и В. И. Кондрашова о том, что указанный интегральный оператор является вполне непрерывным оператором из L^2 в любое L^p. Г. П. Акилов

7902. О расщеплении линейных операторов. Красносельский М. А., Соболев В. И., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 313—317

Пусть E — такое банахово пространство, что сопряженное к E пространство E^* слабо компактно и $E \subset H \subset E^*$, где H — некоторое гильбертово пространство, плотное в E^* в смысле метрики E^*. Предполагается, что для всякого $x \in E$ $\|x\|_H \leqslant a\|x\|_E$ и $\|x\|_{E^*} \leqslant b\|x\|_H$ для $x \in H$. Рассматривается линейный вполне непрерывный оператор A из E^* в E, который в силу подчиненности норм является вполне непрерывным в H. Предполагается, что A как оператор в H самосопряжен и положительно определен. Доказывается, что определенный в H положительный квадратный корень $A^{1/2}x = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,(e_i, x)e_i$, где $\{\lambda_i\}$ и $\{e_i\}$ — собственные числа и соответствующие им собственные векторы оператора A, действует вполне непрерывно из E^* в H и из H в E, так что $A = BB^*$, где $B^*x = A^{1/2}x$ при $x \in E^*$ и $Bx = A^{1/2}x$ при $x \in H$. В том случае, когда $E = L^p$, $p > 2$, сформулированные предложения были установлены референтом (РЖМат, 1956, 1479; 1957, 5737). Доказательство авторов не отличается от доказательства референта.

Примечание референта. Предложения данной работы представляют собою частные случаи более общих предложений, установленных Я. Л. Энгельсоном (РЖМат, 1957, 8002). М. М. Вайнберг

7903. Интегрирование и линейные функционалы. Лорх (L'integrazione ed i funzionali lineari. Lorch Edgar R.), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), **25**, 113—120 (итал.; рез. англ.)

Пусть B — банахова структура действительных функций, определенных и ограниченных на некотором множестве R, с нормой $\|f\| = \sup_{x \in R} |f(x)|$.

Автор называет положительным интегралом на B всякий линейный ограниченный положительный функционал, обладающий свойством: $\lim F(f_n) = F(f)$, если $f_n(x) \uparrow f(x)$. Функционал, представимый в виде разности положительных интегралов, называется интегралом общего вида.

Множество M всех интегралов образует подпространство сопряженного пространства B^*. Основной результат формулируется без доказательства:

Теорема. Существует, и при том только один, положительный оператор P, определенный на B^*, такой, что $P^2 = P$, $PB^* = M$, причем оператор $1-P$ также положителен.

Отсюда следует, что всякий линейный функционал $F \in B^*$ может быть единственным образом представлен в виде суммы $F = PF + (F - PF)$ интеграла и функционала, который автор предлагает называть антиинтегралом.

Примечание референта. На стр. 120 имеется неточность: G следует считать положительным интегралом (а не положительным функционалом.)

В. Н. Никольский

7904. К вопросу об интегральном представлении некоторых линейных операторов. Динкуляну (Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. Dinculeanu Nicolae), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 15, 1203—1205 (франц.)

Вводится понятие непрерывной прямой суммы банаховых пространств, аналогичное неоднократно рассматривавшемуся (см. Наймарк М. А. Нормированные кольца (РЖМат, 1957, 7189К)) понятию непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств. Доказываются две теоремы о представлении операторов, отображающих пространства $L^1_{\mathfrak{A}}$ (суммируемых вектор-функций) и $C_{\mathfrak{A}}(Z)$ (непрерывных вектор-функций) в сепарабельное банахово пространство, в виде интеграла от операторной функции. С. В. Фомин

7905. О полных ортонормированных системах в гильбертовом пространстве. Исэки (On complete orthonormal sets in Hilbert space. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 8, 450—452 (англ.)

Автор напоминает ряд ранее доказанных теорем, где из полноты одной ортонормировнной системы следует полнота другой, в известном смысле близкой к первой, в частности, теорему Хильдинга (Hilding S. H., Arkiv. mat., astron., fys. 1948, 35, A (38), 1—44), и получает теорему: Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — две ортонормированные системы, $r_n = \|\varphi_n - \psi_n\|$; если $\sum r_n\left(1 - \frac{r_n^2}{4}\right) < \infty$, $\|\psi_n\| = 1$ и $\{\varphi_n\}$ полна, то и $\{\psi_n\}$ полна; если $(\varphi_n, \varphi_n - \psi_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^2}{1 + r_n^2} < +\infty$ и $\{\varphi_n\}$ полна, то и $\{\psi_n\}$ полна.

Доказательство проводится методом Хильдинга, а также Костюченко и Скорохода (РЖМат, 1954. 2624), которым они доказывали теорему референта: если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ ортонормированы, причем $\sum r_n^2 < \infty$ то полнота $\{\varphi_n\}$ влечет полноту $\{\psi_n\}$. Н. К. Бари

7906. О базисах и полных системах функций в гильбертовом пространстве. Казьмин Ю. А., Матем. сб., 1957, **42**, № 4, 513—522

Приводятся доказательства теорем, сформулированных ранее автором (РЖМат, 1958, 1325). Н. К. Бари

7907. К теории разложения общих гильбертовых пространств. Тома (Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen. Thoma Elmar), Math. Z., 1957, **68**, № 2, 153—188 (нем.)

Дается близкое к обычному (см. Наймарк М. А. Нормированные кольца (РЖМат, 1957, 7189К)) построение понятия непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств. Получается ряд известных результатов о представлении в виде интегралов операторов, действующих в этой непрерывной прямой сумме, о представлении коммутативного кольца операторов в виде кольца непрерывных функций и т. д. С. В. Фомин

7908. К спектральному разложению самосопряженных операторов. Любовин В. Д., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 139—142

Дается решение задачи о получении спектрального разложения ограниченных и неограниченных самосопряженных операторов в качестве следствия теоремы об интегральном представлении элементов частично упорядоченного K-пространства, поставленной в статье Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 3, 31—98). В приводимом выводе спектрального разложения самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H роль K-пространства играет кольцо $(A)''$ всех ограниченных самосопряженных операторов, перестановочных с любым из операторов множества $(A)'$ всех ограниченных самосопряженных операторов, перестановочных с оператором A. Если оператор A ограничен, то его спектральное разложение непосредственно следует из интегрального представления элементов K-пространства $(A)''$, а в случае неограниченности оператора A требуются некоторые вспомогательные построения.

И. М. Глазман

7909. 1. Изометрические операторы. 2. Унитарные операторы. 3. Соответствие. Шевалье (1. Transformation isométrique. 2. Transformation unitaire. 3. Correspondance. Chevalier A.), Sémin. Th. Kahan. Fac. sci. Paris, 1955—1956, **3**, № 8, 1—8 (франц.)

Один из докладов, прочитанных автором на парижском семинаре по волновой физике (РЖМат, 1958, 1326, 1334). Излагается спектральное разложение унитарных операторов. Я. Б. Рутицкий

7910. О решении операторных уравнений методом Фурье. Коробейник Ю. Ф., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 71—86

Рассматривается дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{du}{dt} + S_1 u + S_2(t)\, u = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \qquad (1)$$

S_1 — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в H и имеющий вполне непрерывный обратный; $S_2(t)$ — семейство линейных операторов, подчиненных оператору $S^{1/2}$, зависящее от параметра t; $u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции со значениями в H.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = \varphi_0$, ищется в виде ряда Фурье по собственным элементам оператора H:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, v_n. \qquad (2)$$

Рассматриваются три типа решений: обобщенные решения, удовлетворяющие некоторым интегральным тождествам (РЖМат, 1957, 638), решения почти всюду и классические.

Для обобщенных решений доказываются теоремы, устанавливающие связь между ними и решениями бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений определенного вида для коэффициентов Фурье $f_n(t)$. Это дает возможность, пользуясь аппаратом бесконечных систем, доказать при некоторых ограничениях на $S_2(t)$ и $f(t)$ существование и единственность обобщенного решения, представить его в виде ряда (2), обосновать приближенный метод его построения, а также установить гладкость решения при $t > 0$.

Аналогичные факты устанавливаются для решений почти всюду и классических решений. С. Г. Крейн

7911. Асимптотически обратные ряды. Крейнер (Asymptotic inverse series. Kramer Vernon A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 429—437 (англ.)

Формальное обращение операторного ряда

$$H(t) = H_0 + tH_1 + t^2 H_2 + \ldots \qquad (1)$$

дает

$$H^{-1}(t) = A_0 + tA_1 + t^2 A_2 + \ldots, \qquad (2)$$

где

$$A_n = \sum_{s_1 + \ldots + s_r = n} (-1)^r H_0^{-1} H_{s_1} H_0^{-1} H_{s_2} H_0^{-1} \ldots H_{s_r} H_0^{-1}.$$

Предполагая коэффициенты ряда (1) самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющими условиям: $H_0 \geqslant I, H_k \geqslant 0$ $(k = 1,2\ldots)$, и считая при малых $t > 0$ область определения $\mathfrak{D}_{H(t)}$ оператора $H(t)$ плотной в $\mathfrak{H}$, автор изучает вопросы, связанные с асимптотической сходимостью ряда (2).

Устанавливается, что если элемент $\varphi \in \mathfrak{H}$ при фиксированном m и достаточно малых $t > 0$ удовлетворяет условиям: 1) $\varphi \in \mathfrak{D}_{A_n}$ $(n \leqslant m)$ и 2) $A_n \varphi \in \mathfrak{D}_{H(t)}$ $(n < m)$, то

$$\lim_{t \to 0} t^{-m} \| \widetilde{H}^{-1}(t)\, \varphi - \sum_{n=0}^{m} t^n A_n \varphi \| = 0, \qquad (3)$$

где $\widetilde{H}(t)$ есть расширение полуограниченного снизу оператора $H(t)$ по Фридрихсу. Если дополнительно предположить, что $A_m \varphi \in \mathfrak{D}_{\widetilde{H}^{1/2}}(t)$ при малых $t > 0$, то в соотношении (3) перед знаком нормы можно заменить m на $m + 1/2$.

Далее устанавливаются соответствующие предложения для скалярного произведения $(\widetilde{H}^{-1}(t)\, \varphi, \psi)$.

И. М. Глазман

7912. О полноте собственных и присоединенных функций несамосопряженных операторов. Аллахвердиев Д. Э., Мə'рузəлəр. АзəрбССР элмлер акад., Докл. АН АзербССР, 1957, **13**, № 5, 469-473 (рез. азерб.)

Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H; B — линейный вполне непрерывный нормальный оператор, система собственных элементов которого полна в H, кроме того, существует такое натуральное число ρ, что оператор B^ρ имеет конечную абсолютную норму (под ρ понимается наименьшее число, обладающее указанным свойством). Полупрямая L, выходящая из начала координат комплексной плоскости, называется лучом типа K_φ, если угол, равный 2φ, с вершиной в начале координат, имеющий L биссектрисой, содержит внутри себя конечное число собственных значений оператора B. Если внутри любого угла, равного ε, с вершиной в начале координат, содержится хотя бы один луч некоторой системы K_φ, то эта система называется ε-плотной системой лучей.

На основании результатов М. В. Келдыша (Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 1, 11—14) доказывается теорема: Если лучи типа K_φ при некотором $\varphi > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \pi/\rho$ образуют ε-плотную систему лучей, то собственные и присоединенные функции каждого из следующих уравнений

$$y = (A + \lambda B)\, y + f, \quad y(A^* + \lambda B^*)\, y + f$$

полны в пространстве H. Д. Ф. Харазов

7913. О полноте системы собственных и присоединенных элементов одного класса несамосопряженных операторов. Аллахвердиев Д. Э., Элми эсəрлəр Азəрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 7, 23—27 (рез. азерб.)

Изложение результатов, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1958, 3897). М. А. Наймарк

7914. О приведении несамосопряженных операторов к диагональному виду. Сахнович Л. А., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 3, 462—465

Формулируются достаточные условия, при которых треугольная модель М. С. Лившица (РЖМат, 1954, 5660) оператора с непрерывным спектром класса $i\Omega$, определяемая формулой

$$Af(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t)\, \beta(t)\, J dt \beta(x) \qquad (1)$$

$(f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x)), \quad \sum_{k=1}^{r} \int_0^l |f_k(x)|^2 dx < \infty$, $\alpha(x)$— неубывающая ограниченная числовая функция, $\beta(x)$ — матричная функция $\operatorname{Sp} \beta(x) \equiv 1$, J — диагональная матрица с диагональными элементами ± 1), приводится к диагональному виду. Это означает, что существует ограниченный линейный оператор B, отображающий взаимно однозначно гильбертово пространство функций $f(x)$ на некоторое аналогичное пространство и такой, что $B^{-1}AB$ есть оператор умножения на независимую переменную.

Пусть функция $t = \alpha(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$ не имеет интервалов постоянства и пусть функция $\sigma(t) = x$, $a \leqslant t \leqslant b$, $a = \alpha(0)$, $b = \alpha(l)$, обратная к функции $t = \alpha(x)$, имеет равномерно ограниченную производную $\sigma'(t) = p^2(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$; тогда треугольную модель можно также привести к виду

$$Af = xf + i \int_a^x f(t)\, \beta_1(t)\, J dt \beta_1(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (2)$$

где $\beta_1(t) = p(t)\, \beta(\sigma(t))$.

Теорема 2. Пусть $\beta_1(x) = q(x)\, \gamma(x)$, где $q(x) = \operatorname{Sp} \beta_1(x)$, и пусть при любом x лишь N собственных чисел $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ матрицы $\gamma(x)$ отличны от нуля, причем $\lambda_i(x) \geqslant \delta$ при $0 \leqslant x \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots, N$ и некотором $\delta > 0$. Если при некотором K и любых x_1,

$x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство $\| \beta_1^2(x_2) - \beta_1^2(x_1) \| < K | x_2 - x_1 |$, то оператор A в (2) можно привести к диагональному виду.

Эта теорема применяется к системам вида $\frac{dW}{dx} = iW \frac{\beta \cdot \varkappa_1(x)}{x - \lambda}$ и к задаче $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + A\psi = 0$, $\psi(0) = \psi_0$, $\left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1$, где ψ — вектор-функция со значениями из гильбертова пространства H, $\psi_0, \psi_1 \in H$ и A — оператор класса $i\Omega$. М. А. Наймарк

7915. Об операторных алгебрах. Кейдисон (Report on operator algebras. Kadison Richard V.), Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, 1955, № 387, 4—10 (англ.)

Излагается современное состояние теории C^*-алгебр (полных нормированных колец с инволюцией), удовлетворяющих условию $|x^*x| = |x|^2$, в частности теории групповых алгебр и W^*-алгебр (слабо замкнутых самосопряженных колец ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве), и перечисляются некоторые нерешенные задачи, среди них: 1) изучение структуры C^*-алгебр, 2) изучение структуры W^*-алгебр типа (II) и (III). М. А. Наймарк

7916. Представление банаховых алгебр с инволюцией. Шац (Representation of Banach algebras with involution. Schatz J. A.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 3, 435—442 (англ.)

Теорема И. М. Гельфанда и референта (Матем. сб. 1943, **12**, 197 — 217) о представлении $*$-кольца в виде кольца операторов в гильбертовом пространстве переносится на более общие кольца с инволюцией: при этом гильбертово пространство заменяется банаховым пространством X, в котором определена (не обязательно дефинитная) билинейная форма (x, y), удовлетворяющая условиям: 1) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; 3) $(y, x) = \overline{(x, y)}$; 4) $(x, y) = 0$ для всех $y \in X$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 5) $|(x, y)| \leqslant \| x \| \, \| y \|$ (такие пространства X автор называет *BIP*-пространствами).

Именно, доказывается, что для всякого полного нормированного кольца A с инволюцией, удовлетворяющего только условиям: а) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$; б) $(x + y)^* = x^* + y^*$; в) $(xy)^* = y^* x^*$; г) $x^{**} = x$; д) $\| x^* \| = \| x \|$, существует такой изоморфизм f кольца A в кольцо $B(X)$ ограниченных линейных операторов в *BIP*-пространстве X, что: 1) f сохраняет инволюцию, 2) f не увеличивает норму и сохраняет норму эрмитовых элементов. При этом норма в $B(X)$ определяется как норма оператора, а инволюция $A \to A^*$ — формулой $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $x, y \in X$. Кроме того, при дополнительном предположении $\| x^* x \| \geqslant K \| x \|^2$, где K — константа, доказывается полнота совокупности всех неприводимых представлений кольца A в *BIP*-пространствах.

Примечание референта. Последний результат по существу слабее известных теорем о полноте системы неприводимых представлений, в которых доказывается, что одни только $*$-представления в гильбертовом пространстве образуют полную систему (Наймарк М. А., Нормированные кольца, п. 4, § 19 (РЖМат, 1957, 7189К)). М. А. Наймарк

7917. Вполне непрерывные слева $B^\#$-алгебры. Олубуммо (Left completely continuous $B^\#$-algebras. Olubummo Adegoke), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 270—276 (англ.)

Банахова алгебра A называется вполне непрерывной слева (справа), если для каждого $a \in A$ отображение $x \to ax$ ($x \to xa$) есть вполне непрерывный оператор в A; банахова алгебра A называется вполне непрерывной, если она вполне непрерывна слева и справа. Согласно Бонсалу (РЖМат, 1956, 5355), банахова алгебра A называется $B^\#$-алгеброй, если существует (не обязательно единственный) элемент $a^\# \in A$, $a^\# \neq 0$ такой, что $a \| {}^\# \| \, \| a \| = \| (a^\# a)^n \|^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Доказывается, что банахова алгебра A есть вполне непрерывная слева $B^\#$-алгебра тогда и только тогда, когда она есть $B(\infty)$-сумма простых, конечномерных $B^\#$-алгебр. Отсюда следует, что всякая вполне непрерывная слева $B^\#$-алгебра вполне непрерывна.

Опечатки: 1) стр. 274, строка 11 сверху: напечатано $ab_\alpha(\alpha) = ab_\alpha(e)$ вместо $(ab)(\alpha) = (ab)e_\alpha$;

2) стр. 274, строка 14 сверху; напечатано

$$\sup_{\alpha \in \Omega} \| ae_\alpha \| \sup_{\alpha \in \Omega} \| a \| e_\alpha \| \text{ вместо}$$

$$\sup_{\alpha \in \Omega} \| ae_\alpha \| \leqslant \sup_{\alpha \in \Omega} \| a \| \| e_\alpha \|;$$

3) стр. 275, строка 5 снизу: напечатано $f(\cdot) \in B_\alpha$ вместо $f(\cdot) \in B$. М. А. Наймарк

7918. Система аксиом для кольца бесконечных ограниченных действительных матриц. Планс (Un sistema de axiomas para el anillo le las matrices infinitas acotadas reales. Plans Antonio), Collect. math., 1957, **9**, № 1, 35—40 (исп.)

Доказывается, что кольцо $\mathfrak{A}$ бесконечных ограниченных действительных матриц может быть определено с помощью следующей системы аксиом:

I. Существуют в $\mathfrak{A}$ матрицы, ряды которых состоят из одних нулей или из нулей, за исключением одного элемента, равного единице.

II. Если $A \in \mathfrak{A}$, то $\lambda A' \in \mathfrak{A}$ для любого действительного λ.

III. Если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{A}$, то $AB \in \mathfrak{A}$.

IV. Если $A'A \in \mathfrak{A}$, то $A \in \mathfrak{A}$.

V. Множество $\mathfrak{A}$ максимальное относительно этих аксиом. Э. Апарисио

7919. Сепарабельные представления колец операторов. Фелдман, Фелл (Separable representations of rings of operators. Feldman J., Fell J. M. G.), Ann. Math., 1957, **65**, № 2, 241—249 (англ.)

Изучаются $*$-гомоморфизмы AW^*-алгебр Капланского (обозначения и терминологию см. Kaplansky I., Ann. Math., 1951, **53**, 235—249). Будем говорить, что AW^*-алгебра A удовлетворяет условию счетности цепей, если всякое множество попарно ортогональных проекций в A не более чем счетно. Доказываются теоремы:

I. Пусть AW^*-алгебры A и B удовлетворяют условиям: 1) A — чисто бесконечна; 2) центр алгебры A удовлетворяет условию счетности цепей; 3) B удовлетворяет условию счетности цепей. Тогда любой $*$-гомоморфизм A и B вполне аддитивен на проекциях.

II. Пусть A — конечный AW^*-фактор типа II и B есть AW^*-алгебра, удовлетворяющая условию счетности цепей. Тогда любой *-гомоморфизм A в B вполне аддитивен на проекциях.

Показывается, что теорема II не верна, если A — любая конечная AW^*-алгебра (а не фактор) типа II. Доказывается, что любой $*$-гомоморфизм Ф конечного кольца A типа II операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, в конечное кольцо B операторов, действующих в сепарабельном пространстве K, вполне аддитивен на проекциях. В заключение доказывается, что при $*$-гомоморфизме конечной AW^*-алгебры типа II в AW^*-алгебру, удовлетворяющую условию счетности цепей, ядро этого гомоморфизма может быть получено как пересечение некоторого множества максимальных идеалов. В. И. Соболев

7920. Неприводимые унитарные представления группы матриц третьего порядка, сохраняющих индефи-

нитную эрмитову форму. **Граев М. И.**, Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 5, 966—969

Дано описание всех тех неприводимых унитарных представлений группы G унимодулярных матриц третьего порядка, сохраняющих индефинитную эрмитову форму, которые входят в разложение регулярного представления этой группы. Эти представления строятся следующим образом. Пусть M — многообразие таких точек $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$ двумерного комплексного пространства, что $|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2=1$, и H — пространство непрерывных функций на M. Каждой матрице $g\in G$ отвечает оператор в H, определяемый формулой

$$T_g f(\zeta_1,\zeta_2)=f\left(\frac{\zeta_1 g_{11}+\zeta_2 g_{21}+g_{31}}{\zeta_1 g_{13}+\zeta_2 g_{23}+g_{33}};\ \frac{\zeta_1 g_{12}+\zeta_2 g_{22}+g_{32}}{\zeta_1 g_{13}+\zeta_2 g_{23}+g_{33}}\right)\times$$

$$\times(\zeta_1 g_{13}+\zeta_2 g_{23}+g_{33})^{-\sigma}\,\overline{(\zeta_1 g_{13}+\zeta_2 g_{23}+g_{33})}^{-\tau} \qquad (1),$$

где σ и τ — комплексные числа, характеризующие представление, причем $\sigma-\tau$ — целое число. Если σ и τ не являются целыми, то в H нет инвариантных подпространств. При некоторых значениях σ и τ в H можно ввести скалярное произведение, инвариантное относительно операторов (1). Пополнив H по этому скалярному произведению, получаем гильбертово пространство, в котором действует неприводимое унитарное представление группы G. Так строятся все недискретные серии неприводимых унитарных представлений группы G.

Дискретные серии неприводимых представлений группы G отвечают целым σ и τ и строятся аналогичным образом в соответствующих инвариантных подпространствах пространства H.

Рассматривается вопрос о разложении получаемых представлений группы G по представлениям максимальной компактной подгруппы. Установлено, что регулярное представление группы G разлагается по найденным в работе представлениям, принадлежащим дискретным сериям и основной недискретной серии.

С. В. Фомин

7921. Дифференциалы Гато и Фреше в локально выпуклых пространствах. Маринеску (Différentielles de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes. Marinescu G.), Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, 1957, **1**, № 1, 77—86 (франц.)

Различные предложения, установленные в банаховых пространствах, распространяются на вещественные локально выпуклые пространства. Пусть E и F — такие пространства. Дифференциал Гато $\delta T(x;h)$ оператора T из E в F определяется как и в банаховых пространствах. Дифференциал Фреше $dT(x;h)$ определяется соотношением

$$\lim_{h\to 0}\frac{|T(x+h)-T(x)-dT(x;h)|}{|h|_\alpha}=0,$$

где $|\ |_\alpha$ и $|\ |_\beta$ — достаточные семейства полунорм на E и F соответственно.

Доказываются предложения:

1. Из дифференцируемости по Фреше в точке x следуют дифференцируемость в x по Гато и равенство $\delta T(x;h)=dT(x;h)$.

2. Из существования $dT(x_0h)$ следует непрерывность $T(x)$ в точке x_0.

3. Из существования $dT(x_0;h)$ и $dS(y_0;k)$, где $y_0=T(x_0)$, следует дифференцируемость по Фреше $S(T(x))$ в точке x_0.

4. Непрерывная производная Гато является производной Фреше.

5. Если оператор T из окрестности V точки $x_0\in E$ в F удовлетворяет условиям: $\delta T(z;h)$ существует во всякой точке $x\in V$ и непрерывен в точке x_0 при всяком $h\in E$; $\delta T(x_0;h)$ непрерывен в точке $h=0$, то $\delta T(x_0;h)$ — линейный непрерывный оператор относительно h.

6. Пусть оператор S из окрестности V точки $x_0\in E$ в $L(E,F)$, где $L(E,F)$ — пространство линейных непрерывных операторов из E в F, удовлетворяет условиям: $\delta S(x;h)$ — линейный и непрерывный по h дифференциал во всякой точке $x\in V$; для всяких $h_1, h_2\in E$ оператор $[\delta S(x;h_1)]h_2$ непрерывен по x в аффинной плоскости x, h_1 и h_2. Тогда, для того чтобы оператор S был производной от оператора T из E в F, необходимо и достаточно, чтобы билинейный оператор был симметричным, т. е. $[\delta S(x;h_1)]h_2=[\delta S(x;h_2)]h_1$.

Установлены также предложения о распространении (в некотором смысле) формулы Лангранжа для функционалов на операторы, действующие из одного пространства в другое.

М. М. Вайнберг

7922. Теорема о неподвижной точке в пространстве Гильберта. Альтман (A fixed point theorem in Hilbert space. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 1, 19—22 (англ.; рез. русск.)

Работа содержит обобщение следующей теоремы М. А. Красносельского (РЖМат, 1953, 332):

Пусть F — вполне непрерывный оператор, определенный на шаре $\|x\|\leqslant r$ вещественного гильбертова пространства и со значениями из того же пространства. Пусть выполнено условие

$$(Fx,x)\leqslant(x,x)\ \text{при}\ \|x\|=r \qquad (1)$$

Тогда оператор F обладает в шаре $\|x\|\leqslant r$ неподвижной точкой, т. е. уравнение

$$x=Fx \qquad (2)$$

имеет решение в шаре $\|x\|\leqslant r$.

Автор показывает, что требование полной непрерывности оператора F можно заменить требованием слабой замкнутости. Так как слабо непрерывный оператор слабо замкнут, то отсюда получается теорема о неподвижной точке для слабо непрерывного оператора. Приведены результаты, касающиеся поведения галеркинских приближений решения уравнения (2) в предположении, что выполнено условие (1).

Полученная теорема о неподвижной точке применяется для доказательства существования решения интегрального уравнения типа Гаммерштейна.

А. И. Перов

7923. Теорема о неподвижной точке в пространстве Банаха. Альтман (A fixed point theorem in Banach space. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 2, 89—92, IX (англ.; рез. русск.)

Доказана следующая теорема: Пусть F — вполне непрерывный оператор, определенный на шаре $\|x\|\leqslant r$ вещественного пространства Банаха и со значениями из того же пространства. Пусть выполнено условие

$$\|x-Fx\|^2\leqslant\|Fx\|^2-\|x\|^2\ \text{при}\ \|x\|=z \qquad (1)$$

Тогда оператор F в шаре $\|x\|\leqslant r$ обладает неподвижной точкой, т. е. уравнение

$$x=Fx \qquad (2)$$

имеет решение в шаре $\|x\|\leqslant r$.

Так как в гильбертовом пространстве условие (1) равносильно условию (1) реф. 7922, то из этой теоремы автор получает, в частности, теорему М. А. Красносельского (реф. 7922).

В заключение приводятся замечания о поведении галеркинских приближений решения уравнения (2) в предположении, что выполнено условие (1). А. И. Перов

7924. Об одном классе уравнений с положительными операторами. Бахтин И. А., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 1, 13—16

В работах М. А. Красносельского и его учеников Л. А. Ладыженского и автора (РЖМат, 1955, 3839; 1956, 8859; 1957, 3310) была развита теория вогнутых операторов, действующих в банаховых пространствах с конусом. Для уравнений с такими операторами были доказаны различные теоремы о существовании положительных собственных функций, зависимости собственных функций от собственных значений, структуре спектра и т. д. Полученные в теории вогнутых операторов теоремы обобщают результаты П. С. Урысона (Труды по топологии и другим областям математики, Гостехиздат, 1951, 45—76) о положительных собственных функциях нелинейных интегральных операторов.

В реферируемой работе вводится новый, более широкий класс вогнутых операторов.

Пусть K и K_1 — два конуса в вещественном банаховом пространстве E, причем $K \subset K_1$. Знаком $\underset{3}{\succeq}$ обозначается полуупорядоченность, порождаемая конусом $K_1 : x \underset{3}{\succeq} y$, если $y - x \in K_1$. Предполагается, что норма „монотонна" в том смысле, что $\| x \| \leqslant \| y \|$, если $\theta \underset{3}{\succeq} x \underset{3}{\succeq} y$. Через K_r обозначается пересечение конуса K с шаром $\| x \| \leqslant r$. Оператор A (вообще говоря, нелинейный), определенный на K_r, называется положительным, если $AK_r \subset K$; он называется монотонным, если из $\varphi \underset{3}{\succeq} \psi$ $(\varphi, \psi \in K_r)$ следует, что $A\varphi \underset{3}{\succeq} A\psi$. Таким образом, понятия положительности и монотонности вводятся при помощи разных конусов.

Пусть u_0 — некоторый элемент из K. Оператор A называется $\{K_1, u_0\}$ — вогнутым, если:

1) каждому $\varphi \in K_r$ $(\varphi \neq \theta)$ соответствуют такие числа $\alpha, \beta > 0$, что $\alpha u_0 \underset{3}{\succeq} A\varphi \underset{3}{\succeq} \beta u_0$;

2) из условий $\varphi \in K_r$ и $\varphi \underset{3}{\succeq} \gamma u_0$ $(\gamma > 0)$ следует, что

$$At\varphi \underset{3}{\succeq} tA\varphi, \quad At\varphi \neq tA\varphi \quad (0 < t < 1);$$

3) для каждой пары элементов $\varphi_1, \varphi_2 \in K_r$ $(\varphi_1, \varphi_2 \underset{3}{\succeq} \chi u_0$, $\chi > 0$, $\varphi_1 - \varphi_2 \notin K_1)$ из $\varphi_1 \underset{3}{\succeq} t\varphi_2$ $(t > 0, \varphi_1 \neq t\varphi_2)$ вытекает, что

$$A\varphi_1 - tA\varphi_2 \underset{3}{\succeq} \delta u_0 \quad (\delta > 0).$$

Утверждается, что для $\{K_1, u_0\}$-вогнутых операторов справедливы основные предложения развитой ранее теории. Приведены примеры $\{K_1, u_0\}$-вогнутых операторов. Я. Б. Рутицкий

7925. О единственности элемента наилучшего приближения в произвольных банаховых пространствах. Зингер (Asupra unicitatii elementului de cea mai buna aproximatie în spatii Banach oarecare. Singer Ivan), Studii si cercetari mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1-2, 235—244 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются произвольное вещественное банахово пространство E и в нем некоторые подпространства G. Элемент g_0 называется элементом наилучшего приближения элемента $x \in E$, если $\| x - g_0 \| = \inf_{g \in G} \| x - g \|$. Доказывается следующая

Теорема 1. Для того чтобы любой элемент $x \in E$ имел не более одного элемента наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одного функционала $f \in E^*$, $\| f \| = 1$ и ни одного элемента $g_0 \in G$, $g_0 \neq \theta$ таких, что $f(g) = 0$ для любого $g \in G$, и $\{x; f(x) = \| x \| = \| x - g_0 \|\} \neq \varnothing$.

Даются также исправленные и упрощенные доказательства двух теорем, опубликованных ранее автором. К. М. Фишман

7926. Об оценке собственных чисел самосопряженных операторов. Лейбензон З. Л., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 3, 371—373

Пусть A — самосопряженный (не обязательно ограниченный) оператор с дискретным спектром в гильбертовом пространстве H, $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ — собственные числа оператора A, e_i — собственные элементы, и пусть $x \in H$, $x = \Sigma_i x_i l_i$, причем $x_i \neq 0$. Допустим, что x принадлежит области определения A^n.

Обозначим через M совокупность функций $F(\lambda)$, для которых сходится ряд $\Sigma | F(\lambda_i) |^2 | x_i |^2 = \| F \|^2$.

Лемма. Пусть $F(\lambda) \in M$, $\Phi(\lambda) \in M$, $\| \Phi \| > 0$. Тогда существует такое собственное число λ оператора A, что $\Phi(\lambda) \neq 0$ и

$$\frac{| F(\lambda) |}{| \Phi(\lambda) |} \leqslant \frac{\| F \|}{\| \Phi \|}$$

В качестве F и Φ можно взять многочлены степени не выше n, отличающиеся линейным множителем, т. е. $F = (\lambda - \alpha)\Phi$; тогда из леммы вытекает существование собственного числа λ в границах $\alpha - \varepsilon \leqslant \lambda \leqslant \alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon = \| F \| / \| \Phi \|$.

Для получения возможно меньших значений ε предлагается использовать многочлены с наименьшей нормой в M и указываются эффективные приемы их нахождения. В. Н. Никольский

7927. О скорости приближения вполне непрерывных операторов конечномерными операторами. Аллахвердиев Дж. Э., Элми эсэрлэр. Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 2, 27—37 (рез. азерб.)

Пусть A — линейный, вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H; A_n^0 — один из операторов, обеспечивающих наилучшее приближение оператора A при помощи n-мерных операторов в том смысле, что

$$\xi_n(A) \doteq \inf_{A_n} \| A - A_n \| = \| A - A_n^0 \|,$$

где A_n пробегает множество всевозможных n-мерных операторов в H. Доказывается, что оператор A_n^0 существует (и не единственен), и исследуется зависимость между сходимостью рядов из степеней наилучших приближений оператора и конечностью его абсолютной нормы.

Основные результаты: 1. Оператор A имеет конечную абсолютную норму тогда и только тогда, когда $\Sigma \xi_n^2(A) < \infty$. Если это условие выполнено, то $\Sigma \xi_n^2(A) = N^2(A) - \| A \|^2$, где $N(A)$ — конечная абсолютная норма оператора A.

2. Если $\Sigma \xi_n^\alpha(A) < \infty$, то для всех $m > \alpha/2$ (m — целое число) оператор A^m имеет конечную абсолютную норму.

Доказательства этих предложений основываются на некоторых свойствах вполне непрерывных операторов, доказанных в реферируемой работе, а также на свойствах операторов с конечной абсолютной нормой, установленных М. В. Келдышем (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 1, 11—14). Д. Ф. Харазов

7928. К приближенному решению операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Альтман (Concerning the approximate solutions of operator equations in Hilbert space. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 7, 711—715 (англ.; рез. русск.)

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор, заданный в шаре $S = \{x : \| x - x_0 \| \leqslant r\}$ гильбертова пространства H, со значениями в H. Предполагается, что $P(x)$ имеет в S производную Фреше $P'(x)$ и что $Q(x) = [P'(x)]^* P(x)$ имеет в S производную Фреше $Q'(x)$.

Теорема 1. Пусть для всех $x \in S$ и всех $y \in H$ выполнены условия: $|(P'(x)y, y)| \geqslant B^{-1}\|y\|^2$, $\|Q'(x)\| \leqslant K$, $B^2K < 4$, причем

$$\|x_1 - x_0\| = \|P(x_0)\|^3 \,|\,(2P'(x_0)\,P(x_0),\ P(x_0))\,|^{-1} \leqslant \eta_0, \quad (1)$$

где $2\eta_0(2 - B\sqrt{K})^{-1} = r$. Тогда итерационный процесс $x_{n+1} = x_n - \|P(x_n)\|^2 (2P'(x_n)P(x_n),\ P(x_n))^{-1} P(x_n)$, (2) $n = 0, 1, \ldots$, сходится к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$, причем $\|x_n - x^*\| \leqslant \alpha^n (1-\alpha)^{-1}\eta_0$, где $\alpha = \frac{1}{2}B\sqrt{K}$.

Теорема 2. Пусть для всех $x \in S$ и всех $y \in H$ выполнены условия: $\|P(x)\| \leqslant D$, $\|P'(x)\| \leqslant A$, $|(P'(x)y, y)| \geqslant B^{-1}\|y\|^2$, существует в S вторая производная Фреше $P''(x)$ и $\|P''(x)\| \leqslant K$, $B^2(A^2 + KD) < 4$, причем выполнено (1), где $2\eta_0(2 - B\sqrt{A^2 + KD})^{-1} = r$. Тогда итерационный процесс (2) сходится к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$, причем $\|x_n - x^*\| \leqslant \alpha^n(1-\alpha)^{-1}\eta_0$, где $\alpha = \frac{1}{2}B\sqrt{A^2 + KD}$.

В том случае, когда $P(x) = Lx - y$, где L — линейный оператор и y — фиксированный вектор из H, устанавливается теорема 3, представляющая частный случай теоремы 1. М. М. Вайнберг

7929. Заметка о приближенных решениях нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Альтман (A note on the approximate solutions of non-liner operator equations in Hilbert space. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 8, 783—787 (англ.; рез. русск.)

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор, заданный в шаре $S = \{x : \|x - x_0\| \leqslant r\}$ гильбертова пространства H, со значениями в H. Предполагается, что в S оператор $P(x)$ имеет производную Фреше $P'(x)$, $W(x) = \big(P'(x)P(x),\ P(x)\big)$ имеет производную Фреше $W'(x)$ и $Q(x) = [P'(x)]^*\,P(x)$ имеет производную Фреше $Q'(x)$, где $[P'(x)]^*$ — сопряженный к $P'(x)$ оператор.

Теорема 1 Пусть для всех $x \in S$ выполнены условия:

$$\|x_1 - x_0\| = \frac{\|P(x_0)\|^3}{2\,|W(x_0)|} \leqslant \eta_0 \leqslant 1, \quad (1)$$

$$\|W'(x)\| \leqslant K_1,\ \|Q'(x)\| \leqslant K_2,\ K = \max\left(K_1, K_2^{3/2}\right),$$

$$|W(x_0)|^{-1} \leqslant B_0, \text{ причем } h_0 = B_0K\eta_0 \leqslant 1/2,$$

$$r = \eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^{2^n - 1} < \eta_0,\ q = h_0\eta_0. \quad (2)$$

Тогда итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\|P(x_n)\|^2\,[W(x_n)]^{-1}\,P(x_n)$$

сходится к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$, причем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant rq^{2^n - 1} \leqslant r\,2^{-2^n + 1} < 2^{-2^n + 1}.$$

Если потребовать, чтобы $W(x)$, $Q(x)$ и $P'(x)$ удовлетворяли в S условию Липшица, то не нужно требовать существования $W'(x)$ и $Q'(x)$. В этом случае справедлива теорема:

Теорема 2. Пусть для всех x, x', $x'' \in S$ выполнены условия: условие (1), $\|P'(x)\| \leqslant A$, $\|P(x)\| \leqslant D$, $\|P'(x') - P'(x'')\| \leqslant K_3\|x' - x''\|$, $\|W(x') - W(x'')\| \leqslant K_1\|x' - x''\|$, $\|Q(x') - Q(x'')\| \leqslant K_2\|x' - x''\|$,

$$K_1 = (2A^2 + K_3D)D, \quad (3)$$

$$K_2 = A^2 + DK_3,\ K = \max\left(K_1, K_2^{3/2}\right),\ |W(x_0)|^{-1} \leqslant B_0,$$

$$h_0 = B_0K\eta_0 \leqslant 1/2 \quad (4)$$

и условие (2). Тогда имеет место утверждение теоремы 1.

Примечание референта. Из условий (1) и (4) следует, что $K \leqslant A^2D$, а значит и $K_1 \leqslant A^2D$. Это противоречит требованию (3). М. М. Вайнберг

7930. Об общих эргодических теоремах. II. Цуруми (On general ergodic theorems. II. Tsurumi Shigeru). Tôhoku Math. J., 1957, **9**, № 1, 1—12 (англ.)

Пусть μ — неотрицательная счетноаддитивная функция (мера), определенная на σ-теле $\mathfrak{F}$ подмножеств основного множества X и удовлетворяющая условию $\mu X < \infty$; L_1 — пространство функций на X, интегрируемых относительно μ, с нормой $|f_1| = \int_X |f(x)|\,\mu(dx)$; L_∞ — пространство функций на X, измеримых и в существенном ограниченных относительно μ, с нормой $|f|_\infty = \operatorname{vrai}\max|f(x)|$. Пусть, далее, T — линейный оператор, отображающий L_1 в L_1 и удовлетворяющий условиям: 1) если $f \geqslant 0$, то $Tf \geqslant 0$; 2) $|T|_1 \leqslant 1$ ($|T|_1$ — норма оператора T в L_1); 3) $T1 > 0$; 4) если $f \in L_\infty$ и $Uf \geqslant f$, где $Uf = Tf/T1$, то $Uf = f$; 5) если $f \in L_\infty$, то $U(f \cdot T^j 1) = Uf \cdot UT^j 1$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$).

Доказывается, что при этих условиях для любой функции $f \in L_1$ и любой положительной функции $g \in L_1$ последовательность функций

$$\sum_{j=0}^{n-1} T^j f \Big/ \sum_{j=0}^{n-1} T^j g$$

сходится почти всюду. Для предельной функции h справедливо соотношение

$$\int_A h(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_A f(x)\,\mu(dx),$$

где A — произвольное, T-инвариантное множество, во всех точках которого $\sum_{j=0}^{n-1} T^j g = +\infty$.

Эта теорема обобщает эргодическую теорему Гуревича о преобразованиях без инвариантной меры (Hurewicz W., Ann. Math., 1944, 45, 192—206) и эргодическую теорему Хопфа о цепях Маркова (РМЖат, 1957, 1616). В кратком добавлении автор исправляет неточность, содержащуюся в доказательстве Хопфа.

В. А. Рохлин

7931. О весах меры Хара. Ким Кё Сек, Сухак камулли, Математика и физика, 1957, **1**, № 3, 8—11 (кор.; рез. русск.)

Пусть μ — вполне аддитивная мера, определенная на некотором теле $\mathbf{X}$ подмножеств множества X. Базисом меры μ называется такой класс $\mathbf{M} = \{M_\alpha\}$ измеримых множеств, что для всякого множества $X \in \mathbf{X}$ конечной меры и всякого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется в $\mathbf{M}$ множество M_α, удовлетворяющее условию $\mu[(X \setminus M_\alpha) \cup (M_\alpha \setminus X)] < \varepsilon$.

Весом меры μ называется наименьшая из мощностей базисов меры μ. Имеет место теорема: Вес локально компактной топологической группы G равен весу меры Хара, определенной на G, за исключением конечной группы. Из этой теоремы непосредственно следует один результат Гёца. Резюме автора

7932. Новые результаты в теории распределений. Микусинский (Nové výsledky v theorii distribucí. Mikusiński J.), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 6, 674—677 (чешск.)

Перевод с русского статьи автора (РЖМат, 1957, 6502).

См. также: 7417, 7580, 7646, 7724, 7726, 7734, 7737, 7738, 7744, 7811, 7814, 7825, 7895.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

7933. К новым успехам советской школы теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 289—291

Отмечаются главные результаты развития теории вероятностей и математической статистики в нашей стране за истекшие сорок лет; указываются большие и ответственные задачи, поставленные перед наукой в настоящее время. Как насущная необходимость для дальнейшего прогресса выдвигаются: «увеличение и улучшение подготовки специалиста в области теории вероятностей и математической статистики; создание обширной учебной и монографической литературы; организация статистических научно-исследовательских центров». Н. В. Смирнов

7934. Комбинаторика расположений. Флейшман Б. С., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 173—198

Пусть $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_a\}$ — множество предметов и $\sigma=\{1, 2, \ldots i \ldots s\}$ — упорядоченное множество мест.

Изучаются всевозможные расположения a различных предметов на S местах, а также всевозможные расположения на упорядоченных подмножествах σ, причем на каждом месте может находиться лишь один предмет, но на различных местах могут быть, вообще говоря, одни и те же предметы.

Такого рода расположениями являются: 1) в математической статистике — выборки объема S, соответствующие дискретной случайной величине, принимающей a различных значений; 2) в статистической механике — распределения S различных частиц по a элементам объема; 3) в теории информации — сообщения длины S, создаваемые дискретным источником a различных символов, и т. д.

Рассматривая подмножество $\tau\subset\sigma$, в которое входят произвольные элементы $i_n\in\sigma$, автор называет отображение $A_\alpha=f(i_n)-\tau$ проекцией и обозначает через ρ_τ. Множество всех ρ_τ есть конечное пространство расположений R.

Основной задачей комбинаторики расположений является подсчет числа ε_τ проекций ρ_τ, обладающих определенным признаком. Применяя частный случай аксиоматики А. Н. Колмогорова (Основные понятия теории вероятностей, М.—Л, 1936), автор вводит в рассмотрение аддитивную функцию $\mu(\varepsilon_\tau)$, заданную на множестве F подмножества ε_τ, и после подчинения этой функции некоторым условиям, автор доказывает теорему, что $\mu(\varepsilon_\tau)$ равно числу различных ρ_τ, входящих в ε_τ.

В §§ 2—3 рассматриваются специальные множества расположений.

В §§ 4—5 изучается связь теории расположений с классической теорией вероятностей:

$$P=(\rho\in\varepsilon)=P(\varepsilon)=\mu(\varepsilon)/\mu(R).$$

В §§ 6—7 дается приложение теории расположений к одной конкретной задаче теории информации (комбинация символов на входе бинарного канала).

А. Г. Корман

7935. Абстрактные вероятностные пространства и теорема Колмогорова. Сигал (Abstract probability spaces and a theorem of Kolmogoroff. Segal I. E.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 721—732 (англ.)

7936. Замечания о теории вероятностей. Фиш. (Uwagi o rachunku prawdopodobieństwa. Fisz Marek), Kosmos (Warszawa), 1955, **B1**, № 4, 285—297 (польск.)

В популярной форме разъясняется понятие вероятности и некоторые его применения. Я. И. Лукомский

7937. Некоторые результаты, касающиеся возвратных событий. Фрёйнд (Some results on recurrent events. Freund John E.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 718—720 (англ.)

Доказывается и поясняется на примерах основная теорема для возвратных событий, повторяющихся через время t, где t — непрерывная вещественная переменная. Теорема аналогична результатам, полученным для дискретного случая Феллером (Feller W., An introduction to probability theory and its applications, New York, 1950, vol. 1). Резюме автора

7938. О вероятности больших отклонений случайных величин. Санов И. Н., Матем. сб., 1957, **42**, № 1, 11—44

В работе развит метод, позволяющий получить асимптотические выражения для логарифма вероятности больших отклонений.

Пусть производятся N независимых испытаний с возможными исходами $E_1, \ldots, E_n$ и вероятностями этих исходов $P_1, \ldots, P_n$, $\Sigma P_k=1$, $P_k>0$. Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — частоты указанных исходов в N испытаниях.

Теорема 1. Для любого набора чисел $q_k\geqslant 0$, $\Sigma q_k=1$ и любого $\varepsilon>0$

$$P\{|\nu_k-q_k|\leqslant\varepsilon, k=1..n\}=\exp N\left[\Sigma q_k\ln\frac{P_k}{q_k}+O(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon})+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{\ln N}{N}\right)\right]$$

(в соответствующей формуле работы на стр. 13 пропущен множитель N в показателе. *Реф.*).

Получена сходная формула для вероятности попадания точки $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ в „отделимое" множество точек. В общем случае для двух функций распределения $F(x)$ и $\Phi(x)$ вводится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\Delta F}{\Delta\Phi}d\Phi$, определяемый как точная нижняя граница множества сумм $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta i\Phi\ln\frac{\Delta_i F}{\Delta_i\Phi}$, отвечающих всевозможным разбиениям

промежутка $(-\infty, \infty)$ Пусть $F_N(x)$ — эмпирическая функция распределения, соответствующая выборке объема N из совокупности с функцией распределения $F(x)$. Пусть $\Phi(x)$ — другая функция распределения, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi$ существует. Вводится (сложно формулируемое) понятие F-сходящейся к $\Phi(x)$ последовательности ε-окрестностей V_n, содержащих $\Phi(x)$.

Теорема 10.

$$P\{F_N \in V_n\} = \exp N\left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi + \delta_n + 0\left(\frac{n \ln N}{N}\right)\right],$$

причем существует такая последовательность чисел $\lambda_n > 0$, $\lim \lambda_n = 0$, что $|\sigma_n| < \lambda_n$.

Теорема 13.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \lim_{N \to \infty} \frac{\ln P\{\sup_x |F_N(x) - F(x)| < \varepsilon\}}{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi.$$

Намечены некоторые применения полученных результатов к задачам теории больших отклонений, развитой в работах Н. В. Смирнова (Матем. сб., 1933, 40, 443—454), Г. Крамера (Усп. матем. наук, 1944, 10, 166—178), референта (РЖМат, 1954, 3015; 1956, 3190) и других. Например, если $x_1, \ldots, x_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, $S_n = x_1 + \ldots + x_N$, то $\frac{S_N}{N} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_N(x)$, где $F_N(x)$ — эмпирическая функция распределения для выборки объема N из совокупности с функцией распределения $F(x)$.

Поэтому

$$P\left\{\frac{S_N}{N} \geqslant \alpha\right\} = P\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x dF_N(x) \geqslant \alpha\right\} = P\left\{F_N \in \Omega_\alpha\right\},$$

где Ω_α — совокупность всех таких функций распределения $\Phi(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} x d\Phi(x) \geqslant \alpha$. В. В. Петров

7939. О предельном распределении вероятностей на компактной топологической группе. Урбаник (On the limiting probability distribution on a compact topological group. Urbanik K.), Fundam. math., 1957, **44**, № 3, 253—261 (англ.)

Рассматриваются случайные величины со значениями из компактной топологической группы G. При последовательном суммировании таких величин, при условии их взаимной независимости, меры, задающие распределения этих случайных величин, последовательно свертываются.

Последовательность вероятностных распределений $\mu_1, \mu_2, \ldots$ называется нормальной, если для каждого числа k существует последовательность чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ такая, что

$$\mu_s = \mu_{n_j + s} \quad (s = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2 \ldots).$$

Пусть символ * означает операцию свертки, а под $[A]$ будем понимать наименьшую замкнутую подгруппу G, содержащую множество $A \subset G$. Носитель регулярной вероятностной меры μ обозначим A_μ. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ есть нормальная последовательность вероятностных распределений на G. Если последовательность $\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_n^*$ слабо сходится к мере ν, то ν есть мера Хаара подгруппы

$$A_\nu = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\mu_n}\right].$$

Теорема 2. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ есть нормальная последовательность вероятностных распределений на G. Последовательность $\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_n^*$ сходится тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\mu_n}\right] = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_n} A_{\mu_n}^{-1} \ldots A_{\mu_2}^{-1} A_{\mu_1}^{-1}\right].$$

Для одинаково распределенных независимых случайных величин (т. е. когда $\mu_n = \mu$) полученные предложения совпадают с соответствующими результатами референта (РЖМат, 1957, 6513). В настоящей же работе используется другой метод — основанный на теории представлений компактных топологических групп.

Указанные результаты являются развитием идей Ито и Кавада, исследовавших аналогичные вопросы в случае компактных групп, обладающих счетным базисом (Ito K., Kawada Y., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1940, 22, 977—998). Б. М. Клосс

7940. Параметры распределения случайной величины, принимающей циклически упорядоченные значения. Трыбула (On parameters of the distribution of a random variable with cyclically ordered values. Trybula S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 9, 863—866 (англ.; рез. русск.)

Целью работы является попытка охарактеризовать распределение случайной величины в том случае, когда она принимает значения в $\bar{R}$ (x и $y \in \bar{a} \in \bar{R}$, тогда и только тогда, когда $x \equiv y \pmod 1$, $x, y \in R$). Вводится понятие n-го момента, абсолютного по отношению к $\bar{y} \in \bar{R}$: $m_n(\bar{y}) = \int_{\bar{x} \in \bar{R}} \rho^n(\bar{x}, \bar{y}) \mu(d\bar{x})$, где $\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \inf_{\substack{x \in \bar{a} \\ y \in \bar{b}}} (x - y)$ есть расстояние между классами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ а, μ является распределением случайной величины в $\bar{R}$.

„Медиана" и „средняя" определены как такие точки $\bar{y}_1 \in \bar{R}$, $\bar{y}_2 \in \bar{R}$, для которых $m_1(\bar{y})$ и $m_2(\bar{y})$ соответственно достигают минимума. Даются необходимое условие для того, чтобы точка $\bar{a} \in \bar{R}$ являлась „медианой", и необходимое условие для того, чтобы точка $\bar{s} \in \bar{R}$ являлась „средней". В случае, когда распределение μ непрерывно, эти условия принимают более простой вид.

Доказывается, что первый момент по отношению к „медиане" и второй момент по отношению к „средней" являются самыми большими для равномерного распределения. Резюме автора

7941. Об одном свойстве системы двух случайных величин, подчиненных закону редких событий Пуассона. Оттавьяни (Su una proprietà di un sistema di due variabili casuali seguenti la legge di Poisson, degli eventi rari. Ottaviani Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), **23**, № 5, 230—232 (итал.)

Рассматривается система случайных величин X и Y, из которых первая следует закону Пуассона с параметром m; вторая же величина при каждом значении $X = x$ следует закону Пуассона с параметром m_x. Предлагается далее, что сумма $X + Y$ следует также закону Пуассона. Тогда очень просто устанавливается, что величины X и Y независимы и $m_x = m_0 = \text{const}$.

Н. В. Смирнов

7942. Замечания к закону Пуассона. Крысицкий (Remarques sur la loi de Poisson. Krysicki Wlodzimierz. Bull. Soc. sci. et lettres. Lódz, 1957, Cl. 3, 8, № 7, 25 p., ill.) (франц.)

Доказывается ряд теорем, уточняющих асимптотическую формулу Пуассона для биноминальных вероятностей. Н. В. Смирнов

7943. Аппроксимация распределения типа заражения по Нейману (с двумя параметрами). Дуглас (Fitting the Neyman type A (two parameter) contagious distribution. Douglas J. B.), Biometrics, 1955, **11**, № 2, 149—173 (англ.)

7944. Таблицы степенных моментов распределения Пуассона. Дуглас (Tables of Poisson power moments. Douglas J. B.), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 489 (англ.)

Составлены таблицы для отношений двух последовательных моментов распределения Пуассона. Пусть

$$\mu_x = e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} r^x \frac{\lambda^r}{r!},$$

$$P_x = \frac{\mu'_{x+1}}{\mu_x},\ q_x = p_x(p_{x+1} - p_x).$$

Таблицы 3-4-значные, дающие значения p_x и q_x для $x = 0(1)19$; $\lambda = 0{,}000(0{,}001)0{,}03(0{,}01)0{,}3(0{,}1)3{,}0$, опубликованы ранее (реф. 7943). Н. В. Смирнов

7945. Уравнение, определяющее закон распределения интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих случайные параметры. Доступов Б. Г., Пугачев В. С., Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 7, 620—630 (рез. англ.)

Рассматриваются уравнения $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}, \mathbf{V})$, где $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, а $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_m)$ — случайные параметры. Предполагается, что $\mathbf{f}$ имеет ограниченные кусочно-непрерывные первые производные по всем Y_k. Пусть задана плотность вероятности $p_0(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ начальных значений $\mathbf{Y}(t)$ и параметров $\mathbf{\Lambda}$. Ставится задача определить плотность вероятности $p(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)$ значений $\mathbf{Y}(t)$ и $\mathbf{V}$. Показывается, что эта плотность вероятностей удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{f}_p = 0.$$

Пусть решение задачи Коши для исходной системы уравнений имеет вид $\mathbf{Y} = \varphi(t, \mathbf{v}, t_0, \mathbf{Y}_0)$. Тогда искомая плотность вероятности может быть вычислена по формуле

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) = p_0[\varphi(t_0, \mathbf{v}, t, \mathbf{y}), \mathbf{v}] \cdot \left| \frac{\partial(Y_1^0, \ldots, Y_n^0)}{\partial(Y_1, \ldots, Y_n)} \right|,$$

причём входящий в эту формулу якобиан может быть представлен в виде

$$I = \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}_{\varphi} \mathbf{f}[\tau, \varphi(\tau, \mathbf{v}, t_0, \mathbf{Y}_0), \mathbf{v}]\, d\tau \right\},$$

где $\mathbf{Y}_0 = \varphi(t_0, \mathbf{v}, t, \mathbf{y})$. Если решение задачи Коши для исходной системы уравнений неизвестно, то уравнение для p предлагается решать численно, шагами по времени. Рассматриваются примеры. А. С. Монин

7946. Матрицы Тёплица, интегральные уравнения типа свертки и связанная с ними проблема в теории вероятностей. Кац (Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory. Kac M.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 501—509 (англ.)

Выводится следующий аналог одной теоремы Сеге (G. Szegö, On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function, Communications du Seminaire mathématique de l'université de Lund, tome supplémentaire (1952) dédié à Marcel Riesz. pp. 228—238) для случая интегральных уравнений (используем термины теории вероятностей):

Пусть $\mathfrak{p}(x)$ — симметрическая плотность распределения с конечным математическим ожиданием и характеристической функцией $f(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$. Рассматривается интегральное уравнение $\int_{-a}^{a} \mathfrak{p}(x-y)\varphi(y)\,dy = \lambda\varphi(x)$. Пусть $D_a(\lambda)$ — знаменатель Фредгольма. Тогда для достаточно малых действительных λ

$$\lim_{a\to\infty} \frac{D_a(\lambda)}{\exp\left\{\frac{a}{\pi}\int_0^{\infty} \log(1-\lambda f(t))\,dt\right\}} =$$

$$= \exp\left\{\int_0^{\infty} x \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(1-\lambda f(t))\, e^{itx}\, dt \right|^2 dx\right\}.$$

Дается следующая интересная вероятностная интерпретация результата Сеге. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — одинаково распределенные, независимые случайные величины, которые принимают только целые числа, $P\{X_j = n\} = P\{X_j = -n\}$; $S_k = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Если $EX_i < +\infty$, то $P\{S_n = 0\} E\{\max_{1<j<n-1}(0, S_j) \mid S_n = 0\} = \frac{n}{2} \sum_{l=1}^{\infty} l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P\{S_k = l\} P\{S_{n-k} = -l\}}{k(n-k)}$.

Если $P\{S_n = 0\} = 0$, то слева следует писать нуль. Приводится не использующее результат Сеге непосредственное доказательство этой формулы, данное Дайсоном, основанное на своеобразном тождестве из комбинаторики, найденном Хантом. Исходя из этой формулы для решетчатых случайных величин, легко можно найти аналог для случая абсолютно непрерывного распределения и, следуя идеям доказательства из работы Сеге, отсюда выводится данный в начале реферата аналог теоремы Сеге. В. Г. Рихтер

7947. О предельных значениях матричных функций, удовлетворяющих функциональному уравнению Коши. Дьиреш (A Cauchy-féle függvényegyenletnek eleget tevö függvénymatrixok határértékeröl. Gyires Béla), Acta Univ. debrecen., 1954, **1**, 136—144 (венг.)

Функциональное уравнение Коши (I) $A(s+t) = A(s)A(t)$ для матриц $A(t)$ функций действительно переменного было исследовано и решено для случая стохастических и не стохастических матриц; равным образом исследовалось предельное значение (II) $\lim_{t\to\infty} A(t)$ удовлетворяющих этому уравнению матриц и определены условия существования этого предела (Szökefalvi-Nagy, Math. Ann., 1936, **112**, 286—321; Doeblin W., Bull. sci. math., 1938, **62**, 21—32; 1940, **64**, 35—37). Автор настоящей работы задался целью рассмотреть вопрос о предельных значениях, не решая

уравнения, и сформулировал свои условия относительно самой функции $A(t)$ (Ледерман (Ledermann W., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, **46**, 581—594) дает для стохастического случая условия относительно дифференцирования $dA(t)/dt$, автор дает аналогичные условия для общего случая).

Основные результаты следующие:

В случае когда $A(0)$ — единичная матрица, предел (II) для матрицы, удовлетворяющей уравнению (I), существует только тогда, когда матрица $A(t)$, кроме 1, имеет только собственные значения по модулю меньшие 1, и тогда для существования предела необходимо и достаточно, чтобы элементарные делители собственного значения 1 были линейными. Предел может быть также определен в явной форме при помощи жордановой формы $A(1)$. Подробно излагается также стохастический слунай. J. Aczél

7948. Уравнение Винера—Хопфа, ядро которого есть плотность вероятности. Спитцер (The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density. Spitzer Frank), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 327—343 (англ.)

Рассматривается интегральное уравнение Винера — Хопфа

$$F(x) = \int_0^\infty k(x-y)\,F(y)\,dy,\ x>0, \qquad (1)$$

в котором ядро $k(x)$ является плотностью вероятности. Решение $F(x)$ уравнения (1) называется P-решением или P^*-решением, если удовлетворяются соответственно условия:

(P) $F(x)$ — неубывающая, непрерывная справа функция, $F(x)=0$ для $x<0$ и $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$ или

(P^*) $F(x)$ — неубывающая, непрерывная справа, $F(x)=0$ для $x<0$ и не равна тождественно нулю.

Исследуются вопросы существования и единственности P- и P^*- решений уравнения (1); находятся их преобразования Лапласа; для P^*-решения устанавливается асимптотика при $x\to+\infty$: $F(x)\sim\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{1/2}$, если $\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2k(x)\,dx<+\infty$, $F(x)=0(x)$, если $\sigma^2=+\infty$.

Уравнение (1) вместе с условием (P) можно записать в более общем виде

$$M\sim(X+M)^+, \qquad (2)$$

где X — данная случайная величина с плотностью вероятности $k(x)$, M — не зависящая от X случайная величина, функция распределения которой неизвестна, знак Y^+ означает $\max(o,Y)$, знак $\sim$ означает равенство функций распределения случайных величин, стоящих по обе стороны от него.

Пусть теперь $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных с величиной X случайных величин, $S_k=X_1+X_2+\ldots+X_k$.

Доказываются теоремы: 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}P\{S_k>0\}<+\infty$ и $P\{X\neq0\}>0$, то уравнение (2) имеет единственное решение; если же $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}P\{S_k>0\}=+\infty$, то уравнение (2) не имеет решений.

2. Если $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}P\{S_k\leqslant0\}=+\infty$ или если существует конечное математическое ожидание $\int_{-\infty}^{+\infty} xk(x)\,dx\leqslant0$, то уравнение (1) имеет единственное P^*-решение.

А. А. Бобров

7949. Регулярные случайные функции и линейные допускающие сдвиг стохастические функциональные уравнения. Онояма (Regular random functions and linear translatable stochastic functional equations. Onoyama Takuji), Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, **A9**, № 2, 135—158 (англ.)

Случайная функция $Z(t,\omega)$ $(-\infty<t<\infty,\ \omega\in\Omega)$ с действительными значениями называется регулярной случайной функцией (р. с. ф.), если $DZ(t,\omega)<\infty$ и $M|Z(t+h,\omega)-Z(t,\omega)|^2\to0$ при $h\to0$ для любого t. В § 2 доказывается формула разложения р. с. ф. $Z(t,\omega)$ по функциям $y_j(t,\lambda)$ $(j=1,2)$, которые являются решениями уравнения $-y''+q(t)\,y=\lambda y$ с начальными условиями

$$y_1(0,\lambda)=1,\qquad y_2(0,\lambda)=0,$$
$$y_1'(0,\lambda)=0,\qquad y_2'(0,\lambda)=1.$$

Эта формула является обобщением соответствующего разложения неслучайной функции, доказывавшегося многими авторами (см., например, Iosida, Nagoya Math., J., 1950, **1**, 49—58), а также обобщением известного разложения стационарных р. с. ф. по синусам и косинусам. Пусть оператор Λ преобразует элементы пространства R всех регулярных случайных функций в элементы этого же пространства R, коммутирует с операторами взятия математического ожидания и операторами сдвига T_a (т. е. если $Z(t+a,\omega)=T_aZ(t,\omega)$, то $\Lambda T_aZ(t\,\omega)=T_a\Lambda Z(t,\omega)$, линеен почти наверное, т. е. для любых комплексных чисел c_1 и c_2

$$\Lambda[c_1Z_1(t,\ \omega)+c_2Z_2(t,\ \omega)]=c_1\Lambda Z_1(t,\ \omega)+c_2\Lambda Z_2(t,\omega)$$

для всех t при почти всех ω. Кроме того, пусть он удовлетворяет некоторым условиям ограниченности. Согласно Китагава (Kitagawa T., Japan. J. Math., 1937, **13**, 233—332) такой оператор называется линейным оператором, допускающим сдвиг. Согласно теореме Китагава, каждому линейному стохастическому оператору, допускающему сдвиг, соответствует целая функция в комплексной z-плоскости $G(z)$ такая, что $\Lambda e^{zt}=G(z)e^{zt}$ для всех t.

В § 3 находится решение уравнения

$$\Delta f(t,\ \omega)=g(t,\ \omega) \qquad (1)$$

при условии, что корреляционные функции р. с. ф. f и g суммируемы с квадратом, как функции от двух переменных, и что $G(z)$ не имеет нулей на мнимой оси. В общем случае, когда $G(z)$ имеет нули на мнимой оси, строится частное решение уравнения (1) при некоторых предположениях на $G(z)$ и корреляционную функцию р. с. ф. $g(t,\omega)$.

В § 4 формула разложения из § 2 применяется для построения несмещенной оценки математического ожидания $m(t)$ случайной функции, в случае, если $m(t)=cy_1(t,\ \omega)$, где c — неизвестная константа.

В. А. Волконский

7950. Об абсолютно монотонных функциях и приложения к арифметике положительно определенных функций. Дюге (Résultats sur les fonctions absolument monotones et applications à l'arithmétique des fonctions de type positif. Dugué Daniel), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 6, 715—717 (франц.)

Формулируется без доказательства 5 теорем об абсолютно монотонных и положительно определенных функциях. Типичные теоремы:

Теорема 2. Если $\varphi=\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\dots\varphi_n^{\alpha_n}$; $\alpha_l>0$; φ,φ_l — положительно определенные, и φ голоморфна внутри полосы, содержащей реальную ось, то φ_l голоморфны там же.

Теорема 3. Если $\varphi_l(i=1,2\dots n)$ — характеристические функции (х. ф.) случайных величин, $e^{-z^2}=\varphi_1^{\alpha_1}\dots\varphi_n^{\alpha_n}$ $\alpha_l>0$, то φ — х. ф. нормальных величин (Обобщение теоремы Крамера о разложениях нормального закона).

Теорема 5. Если в условиях теоремы 3 заменить e^{-z^2} на х. ф. закона Пуассона, то φ_l — х. ф. закона Пуассона (Обобщение теоремы Д. А. Райкова о разложениях закона Пуассона).

Примечание референта. Формулировки теорем неясны, так как если φ имеет нули в полосе голоморфности и α_l — не целые числа, неясно, какие ветви берутся для φ_l. Как отмечает автор, теорема 3 была ранее доказана референтом и А. А. Зингером (РЖМат, 1958, 2225), но там давалась более сильная и точная форма теоремы: равенство требовалось лишь в какой-либо реальной окрестности нуля; его достаточно требовать лишь в какой-либо последовательности реальных точек с нулевым пределом. Ю. В. Линник

7951. Об одном инвариантном свойстве случайных функций с гиперсферической симметрией и гауссовскими стационарными компонентами. Хорнби (Sur une propriété invariante des fonctions aléatoires à symétrie hypersphérique avec composantes gaussiennes et stationnaires. Hornby Harold), C. r. Acad. sci, 1955, 241, № 4, 353—355 (франц.)

7952. Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам. Яглом А. М., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 292—338 (рез. англ.)

Рассматриваются случайные поля в n-мерном пространстве R_n, т. е. комплексные случайные функции $\xi(\mathbf{x})=\xi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенные на точках R_n. Наряду с обычными полями $\xi(\mathbf{x})$ рассматриваются также обобщенные случайные поля (в смысле Ито—Гельфанда) в R_n, т. е. случайные линейные функционалы $\xi(\varphi)$ относительно φ, где $\varphi=\varphi(\mathbf{x})$ — произвольная функция из класса D бесконечно дифференцируемых комплексных равных нулю вне некоторого компакта функций n переменных. Рассмотрения ограничиваются лишь корреляционной теорией случайных полей, учитывающей лишь первые и вторые моменты случайных величин $\xi(\mathbf{x})(\mathbf{x}\in R_n)$ и $\xi(\varphi)$ $(\xi\in D)$. $\mathbf{M}\xi(\mathbf{x})=m(\mathbf{x})$, $\mathbf{M}\xi(\varphi)=m(\varphi)$, $\mathbf{M}\xi(x_1)\,\xi(x_2)=B(x_1\,x_2)$ и $\mathbf{M}\xi(\varphi_1)\,\xi(\varphi_2)=B(\varphi_1,\varphi_2)$, которые предполагаются конечными.

Кроме того, рассматриваемые поля предполагаются непрерывными в том смысле, что

$$\lim_{x_1\to x}\mathbf{M}\,|\,\xi(x_1)-\xi(\mathbf{x})\,|^2=0,\qquad \lim_{\varphi_1\to\varphi}\mathbf{M}\,|\,\xi(\varphi_1)-\xi(\varphi)\,|=0,$$

где предел $\varphi_1\to\varphi$ понимается в смысле обычной топологии Шварца. Каждому непрерывному случайному полю $\xi(\mathbf{x})$ соотношением

$$\xi(\varphi)=\int_{R_n}\xi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\quad(d\mathbf{x}=dx_1,\,dx_2\dots,dx_n)$$

сопоставляется определенное непрерывное обобщенное поле $\xi(\varphi)$, в этом смысле первое является частным случаем второго. Цель работы состоит в создании по возможности законченной математической теории известных классов случайных полей, аналогичную хорошо известной теории стационарных случайных процессов и процессов со стационарными приращениями.

Изучаются следующие классы случайных полей: однородные случайные поля (о. с. п.), §2; локально однородные случайные поля (поля с однородными приращениями) (л. с. с. п.), § 3; однородные и изотропные случайные поля (о. и.с, п.),§4, наконец, локально однородные и локально изотропные случайные поля (л. о. и. с. п.), §5.

О. с. п. определяется следующим образом. Вводится оператор сдвига τ_y аргумента функций $\varphi\in D$ на вектор $\mathbf{y}$. Случайное поле называется о. с. п., если $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1,\varphi_2)$ — инвариантны относительно любого сдвига τ_y их функциональных аргументов.

Доказывается (теорема 1), что для любого о. с. п. $\xi(\varphi)$ $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1,\varphi_2)$ представимы в виде:

$$m(\varphi)=m\,\widetilde{\varphi}(\mathbf{0})\ (\mathbf{0}=\{0,\dots,0\}),$$

$$B(\varphi_1\,\varphi_2)=\int_{P_n}\widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\ \overline{\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})}\,F(d\boldsymbol{\lambda}),$$

где m — постоянная, $\widetilde{\varphi}(\lambda)=\int_P e^{i\lambda x}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, а $F(S)$ — „медленно растущая мера" в n-мерном пространстве P_n „волновых векторов" $\boldsymbol{\lambda}$ такая, что для некоторого $p>0$

$$\int_{P_n}\frac{F(d\boldsymbol{\lambda})}{(1+\lambda^2)^p}<\infty\qquad\left(\lambda=|\,\boldsymbol{\lambda}\,|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\lambda_i^2}\right).$$

Доказывается обратное утверждение, а также обобщается полученный результат на случай многомерного поля. Л. о. с. п. называется непрерывное в указанном выше смысле о. с. п. $\xi(\varphi)$, определенное на совокупности D_1 функций $\varphi\in D$, удовлетворяющих условию

$$\int_{R_n}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0.$$

Доказывается (теорема 6), что для любого л. о. с. п. $\xi(\varphi)$ $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1,\varphi_2)$ представимы в виде:

$$m(\varphi)=lm\,\nabla\widetilde{\varphi}(\mathbf{0}),$$

$$B(\varphi_1,\varphi_2)=\int\widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\overline{\widetilde{\varphi}_2(\lambda)}\ F(d\boldsymbol{\lambda})+A\,\nabla\widetilde{\varphi}_1(\mathbf{0})\nabla\varphi_2(\mathbf{0}),$$

где $m=\{m_1\ m_2\dots m_n\}$ — постоянный вектор, ∇ — оператор градиента, $A=\|\,a_{jk}\,\|$ — постоянная эрмитова неотрицательная матрица, P_n^- — пространство P_n без точки $\mathbf{0}$ $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(s)$ и $F(S)$ — мера в P_n такая, что для $p\geqslant 0$

$$\int_{P_n^-}\frac{\lambda F(d\lambda)}{(1+\lambda^2)^{p+1}}<\infty.$$

Доказывается обратное утверждение и даны многомерные обобщения полученного результата.

О. с. п. называется о. и. с. п., если его $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1,\varphi_2)$ инвариантны относительно любого элемента g из группы G всех ортогональных преобразований (вращений и отражений) в R_n, т. е. $m(\varphi)=m(g\varphi)$, $B(\varphi_1,\varphi_2)=B(g\varphi_1\,g\varphi_2)$, где $g\varphi(x)=\varphi(g^{-1}x)$.

Доказывается (теорема 11), что необходимым и достаточным условием изотропности о. с. п. $\xi(\varphi)$ является инвариантность меры $F(S)$ относительно вращений вокруг начала координат в пространстве P_n. Для того чтобы функционал $B(\varphi_1,\varphi_2)$ был корреляционным функционалом некоторого и. о. с. п. $\xi(\varphi)$, необходимо и до-

статочно, чтобы он был представим в виде

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^\infty \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(x_1)\overline{\varphi_2(x_2)} Y_n(|x_1 - x_2|\lambda) dx_1 dx_2 d\Phi(\lambda),$$

где $Y_n(t) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) t^{-\frac{n-2}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(t)$

$\left(I_{\frac{n-2}{2}}$ — функция Бесселя порядка $\frac{n-2}{2}\right)$, а $\Phi(\lambda)$ — вещественная неубывающая функция на $(0, \infty)$ такая, что для $p \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(\lambda)}{(1+\lambda^2)^p} < \infty.$$

Приводится два различных многомерных обобщения о. и. с. п.

Л. о. с. п. $\xi(\varphi)$ в R_n называется л. о. и. с. п., если оно изотропно в указанном выше смысле.

Доказывается (теорема I3), что для любого л. о. и. с. п. $\xi(\varphi)$ $m(\varphi) \equiv 0$ и $B(\varphi_1, \varphi_2)$ представимо в виде

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{+0}^\infty \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(x_1)\varphi(x_2) Y_n(|x_1 - x_2|\lambda)\, dx_1 dx_2 d\Phi(\lambda) +$$

$$+ a \int_{R_n} \int_{R_n} x_1 x_2 \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) dx_1 dx_2,$$

где $Y_n(t)$ имеет указанный выше смысл, $\Phi(\lambda)$ — неубывающая функция на полуоси $0 < \lambda < \infty$ такая, что при любом $P \geqslant 0$

$$\int_\infty^0 \frac{\lambda^2 d\Phi(\lambda)}{(1+\lambda^2)^{p+1}} < \infty,$$

а константа $a > 0$.

Имеет место обратное предложение; как и в предыдущем случае, возможны два многомерных обобщения. В заключение приведены примеры. Библ. 31 назв.

Б. С. Флейшман

7953. Изотропное случайное течение. Ито (Isotopic random current. Ito Kiyosi), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 2. Berkeley-Los Angeles, 1956, 125—132 (англ.)

Излагается общая теория однородных и изотропных случайных векторных полей, определяемых в обобщенном смысле (обобщенное векторное поле называется течением). Вводится понятие о случайной мере, формулируются теоремы о спектральном представлении корреляционной функции однородного случайного течения и самого течения, о каноническом разложении однородного случайного течения (на безвихревую, соленоидальную и инвариантную компоненты). Дается определение изотропного случайного течения, выясняется вид его спектрального представления и канонического разложения. В качестве примеров рассматриваются изотропная турбулентность и броуновское движение в смысле Леви. Более подробное изложение теории обобщенных случайных полей, как однородных и изотропных, так и локально-однородных и локально-изотропных, см. реф. 7952.

А. С. Монин

7954. О линейной экстраполяции непрерывного однородного случайного поля. Цзян Цзе-пей, Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 1, 60—91 (рез. англ.)

Рассматривается однородное (в широком смысле) комплексное случайное поле $x(s, t)$, т. е. комплексная случайная функция от точки (s, t) плоскости такая, что $\mathbf{M}|x(s,t)|^2 < \infty$, $\lim_{h_1 \to 0, h_2 \to 0} \mathbf{M}|x(s+h_1, t+h_2) - x(s,t)|^2 = 0$ и $B(s, t) = \mathbf{M}x(s+m, t+n)\overline{x(m, n)}$ не зависит от m и n. Ставится задача о нахождении наилучшего линейного приближения $\widetilde{x}(s, t+n)$ к величине $x(s, t+n)$, линейно зависящего от совокупности случайных величин $x(s', t')$, $-\infty < s' < \infty$, $-\infty < t' \leqslant t$. Указываются условия (формулируемые в терминах спектральной функции $F(\lambda, \mu)$ поля $x(s, t)$), необходимые и достаточные для того, чтобы наилучшее приближение $\widetilde{x}(s, t+n)$ при любых s, t и n совпадало с величиной $x(s, t+n)$ (условия „сингулярности" поля), а также условия необходимые и достаточные для того, чтобы $\widetilde{x}(s, t+n) \to 0$ (в среднем квадратичном) при $n \to \infty$ (условия „регулярности" поля). Вводится общая формула для среднего квадрата $\sigma^2(n)$ ошибки экстраполирования, определяемого равенством $\sigma^2(n) = \mathbf{M}|\widetilde{x}(s,t+n) - x(s,t+n)|^2$. Даются условия, при которых наилучшее приближение $\widetilde{x}(s, t+n)$ оказывается зависящим лишь от величин $x(s', t)$, $-\infty < s' < \infty$ (условия того, что поле $x(s, t)$ является полем „марковского типа").

Доказательства основных результатов статьи опираются на некоторые предложения теории аналитических функций, касающиеся функций, регулярных в полуплоскости (см., например, Крылов В. И., Матем. сб., 1939, **6** (48), 95—138). Формулировки аналогичных результатов для поля $x(s, t)$, зависящего от целочисленных параметров s и t, см. в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1958, 536).

А. М. Яглом

7955. Медианные значения и теория меры. Бонферрони (Les valeurs médianes et la théorie de la mesure. Bonferroni Carlo), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 1, 53—67 (франц.)

Рассматривается функционал $F[x(t)]$, заданный на множестве функций $x(t)$, измеримых по Лебегу в интервале (a, b). Функция $x_1(t)$ называется перестановкой функции $x(t)$ на интервале (a, b), если при любом y равны меры множеств точек t, для которых $x(t) \leqslant y$ и $x_1(t) \leqslant y$.

Функционал $F[x(t)]$ называется симметричным, если он инвариантен по отношению к замене функции ее перестановкой.

В работе показывается, что среднее значение функции на интервале, среднее взвешенное и медианные значения (медиану, терцили, квартили и т. д.) можно рассматривать как симметричные функционалы. Если функция $x(t)$ монотонна, то медиана определяется, как значение функции в середине отрезка (a, b), терцили,— как значения функции в точках деления отрезка (a, b) на три равные части и т. д. Если $x(t)$—не монотонна, то, в силу свойств симметричного функционала, ее медиана может быть найдена, как медиана ее монотонной перестановки. Показывается, как можно построить такие монотонные (убывающие или возрастающие) перестановки.

Исходя из свойств симметричных функционалов, автор исследует некоторые свойства медианных значений и взвешенных средних.

Так, например, показано, что интеграл

$$s(z) = \int_a^b |x(t) - z|\, dt$$

принимает минимальное значение, когда z — медиана функции $x(t)$. Имеется много опечаток.

Б. Н. Гартштейн

7956. Статистическая механика и теория вероятностей. Блан-Лапьер, Тортра (Statistical mechanics and probability theory. Blanc-Lapierre André, Tortrat Albert), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 3. Berkeley-Los Angeles, 1956, 145—170 (англ.)

Обзорная статья, посвященная связи асимптотических формул статистической физики с центральной предельной теоремой теории вероятностей. В основном изложение построено на материале книги А. Я. Хинчина; параллельно излагаются, однако, и некоторые видоизменения доказательств (связанные с использованием центральной предельной теоремы в форме теоремы, касающейся асимптотического поведения свертки большого числа положительно определенных функций), предложенные авторами (РЖМат, 1954, 4859; 1956, 1522). А. М. Яглом

7957. О линейном интерполировании стационарных процессов с дискретным временем. Розанов Ю. А., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 6, 923—926

Обобщается на многомерные и бесконечномерные процессы условие интерполируемости стационарной последовательности

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_\lambda} = \infty,$$

где f_λ — спектральная плотность. А. Н. Колмогорова (Бюлл. МГУ, 1941, **1**, № 6) и результаты работы А. М. Яглома (Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 4, 171) В § 1 излагается бескоординатный способ определения самого понятия стационарного процесса. При координатном подходе n-мерным стационарным процессом называется совокупность n случайных комплексных функций $x_i[t]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (1) таких, что $Mx_i(t) = m_i$

$$Mx_i(t+\tau)\overline{x_j(t)} = B_{ij}(\tau)$$

при этом, не ограничивая общности, считают $m_2 = 0$. Рассмотрим совокупность H случайных комплексных величин x с $Mx = 0$ и $Mx^2 < \infty$. Если отождествить все $x \in H$, отличающиеся друг от друга лишь с вероятностью, равной 0, то H превращается в гильбертово пространство со скалярным произведением $xy = M x\bar{y}$. Каждому вектору $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ афинного n-мерного пространства A поставим в соответствие элемент пространства H

$$x_t(a) = a^1 x_1(t) + a^2 x_2(t) + \ldots + a^n x_n(t).$$

Очевидно, что изучение системы функций (1) равносильно изучению функций $x_t(a)$ от t и a. В пространство A вводится скалярное произведение $(a, b) = B_0(a, b)$ и норма $\|a\| = (a, a)^{1/2}$ и отождествляются элементы a и b в случае $\|a - b\| = 0$. Тогда A становится унитарным пространством, а операторы x_t оказываются изометрическими.

Спектральным функционалом процесса автор называет билинейный функционал $F_\lambda(a, b) = (E_\lambda x_0(a), x_0(b))$. Спектральный функционал $F_\lambda(a, b)$ при фиксированных a и b почти всюду имеет производную $f_\lambda(a,b) = F_\lambda'(a,b)$, которую назовем спектральной плотностью.

В § 2 рассматривается вопрос о линейном интерполировании стационарной последовательности.

Рассмотрим случай дискретного времени, пусть T — конечное множество целых чисел, $H_t(t)$ и $\hat{H}(t)$ соответственно линейные замыкания $x_t(a)$ при $t \in T$, $a \in A$ и $x_t(a)$ при $t \overline{\in} T$ и $a \in A$ и пусть $\mathfrak{B}(T)$ — пространство функций b_λ, определенных почти всюду на $(-\pi, \pi)$ и таких, что

$$1)\ b_\lambda = \sum_{t \in T} e^{i\lambda t} b_t,\ b_t \in A, \qquad 2)\ b_\lambda \in f_\lambda A,$$

$$3)\ \int_{-\pi}^{\pi} (f_\lambda^{-1} b_\lambda, b_\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Скалярное произведение в $\mathfrak{B}(T)$ есть

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f^{-1} b_\lambda, b'_\lambda)\, d\lambda.$$

Автор доказывает основную теорему:

$\Delta T = H(t) \ominus \hat{H}(t)$ изометрично $\mathfrak{B}(T)$. А. Г. Корман

7958. Некоторые задачи о времени пребывания в теории вероятностных процессов. Такач (On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes. Takács L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 1-2, 169—191 (англ.)

Рассматривается процесс $\xi(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, который попеременно переходит из состояния A в состояние B и наоборот $(\xi(0) \in A)$, пребывая в них последовательно $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ единиц времени, причем случайные величины ξ_n независимы, одинаково распределены $(\mathrm{pr}\{\xi_n < x\} = G(x))$ и имеют второй момент, и то же (с другим законом распределения, $\mathrm{pr}\{\eta_n \leqslant x\} = G(x)$) относится к η_n; сверх того, все ξ_n и η_n независимы. Пусть $\beta(t)$ — время пребывания в состоянии B в течение временного интервала $(0, t)$. Автор находит (для любого t) распределение для $\beta(t)$ и показывает, что при $t \to \infty$ оно асимптотически нормально. Затем автор указывает предельное поведение при $t \to \infty$ для

$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{pr}\{\xi(u) \in B\}\, du$ (и для $\frac{1}{t}\mathrm{pr}\{\xi(t) \in B\}$ для нерешетчатого распределения), для $M\{\beta(t)\}$, $D^2\{\beta(t)\}$ надлежащим образом нормированных и центрированных (для решетчатых распределений центрирование оказывается невозможным), пределы не существуют. Приводится несколько примеров. Чтобы установить поведение упомянутых моментов от $\beta(t)$, автор доказывает ряд утверждений об рекуррентных событиях. Пусть события происходят в случайные моменты τ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и промежутки $\delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ $(\tau_0 = 0)$ независимы $(n = 0, 1, 2; \ldots)$ и одинаково распределены (при $n = 1, 2, \ldots$), причем у δ_0 и δ_n $(n > 0)$ существуют вторые моменты и распределение δ_n нерешетчато. Пусть $\nu_t = n$, когда $\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$. Автор указывает предельное поведение центрированного $M\{\nu_t\}$ и нормированного $D^2\{\nu_t\}$. Г. Н. Сакович, М. Г. Фаринич

7959. Предельные распределения в одной задаче о времени пребывания. Такач (On limiting distributions concerning a sojourn time problem. Takács L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 3-4, 279—294 (англ.)

См. реф. 7958. Теперь рассматривается случай, когда $G(x)$ и $H(x)$ нормально притягиваются к устойчивым законам с показателями α_1, α_2, отличными от единицы. Доказано, что при $t \to \infty$ распределение $\beta(t)$ асимптотически устойчиво. Затем, не рассматривая случаев $1 < \alpha_1 < 2$ или $1 < \alpha_2 < 2$, автор показывает, что среднее значение $\beta(t)$ асимптотически равно определенной степени t (с надлежащим коэффициентом).

Г. Н. Сакович, М. Г. Фаринич

7960. О предельном распределении суммы случайного числа независимых случайных величин. Реньи (On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables. Rényi A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, № 1-2, 193—199 (англ.)

Дается упрощенное доказательство теоремы Такача о предельном распределении $\beta(t)$ (реф. 7958), основанное на использовании одной общей теоремы Анскомба об асимптотическом поведении суммы независимых случайных величин, случайное число слагаемых которой может зависеть от этих слагаемых (Anscombe F. J., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, 48, № 4, 600—607). Автор дает также краткое доказательство частного случая теоремы Анскомба, достаточного для его цели.

Г. Н. Сакович

7961. Задачи о времени пребывания. Такач (Tartózkodási idő problémákról. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, 7, № 3-4, 371—395 (венг.)

Почти все результаты этой статьи можно найти в предыдущих статьях автора (реф. 7958, 7959). В замечании 10 дан вариант использования теоремы Анскомба для доказательства теоремы о предельном поведении $\beta(t)$ при наличии вторых моментов у $G(x)$ и $H(x)$ (реф. 7960). Г. Н. Сакович, М. Г. Фаринич

7962. Задача о времени пребывания. Такач (On a sojourn time problem. Takács L.), Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 1, 61—69 (англ.; рез. русск.)

Задача о предельном поведении $\beta(t)$ (реф. 7958) при условиях реф. 7959 сведена к задаче о предельном распределении суммы, случайное число слагаемых которой не зависит от этих слагаемых (ср. реф. 7960 и 7961). Для полноты изложения приведены результаты о предельном распределении $\beta(t)$ из реф. 7959, 7960.

Г. Н. Сакович

7963. Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов. Иржина Милослав, Чехосл. матем. ж., 1957, № 1, 130—153 (рез. англ.)

Изучаются ветвящиеся случайные процессы с несколькими типами $T_1, T_2, \ldots, T_n$ частиц. Пусть $A = \|A_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где A_{ij} — математическое ожидание числа частиц типа T_j, которые происходят за одно поколение от одной частицы типа T_i. Обозначим R максимальный положительный характеристический корень A. Пусть $Q_i(t)$ — вероятность выживания ко времени t потомства одной частицы типа T_i, существующей при $t = 0$, и $P_i^{\alpha}(t)$ — вероятность того, что за время t из одной частицы типа T_i получится по α_j частиц типа T_j, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. При $R < 1$ получены асимптотические оценки для факториальных моментов. Доказана теорема: если A — неразложимая примитивная матрица и $R < 1$, то существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Q_i(t)}{R^t} = K_i, \quad 0 < K_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_i^{\alpha}(t)}{Q_i(t)} = P_i^{\alpha}.$$

Доказана аналогичная теорема для непрерывного времени.

Б. А. Севастьянов

7964. Замечание о структуре стохастической модели, рассмотренной Дандекаром. Басу (A note on the structure of a stochastic model considered by V. M. Dandekar. Basu D.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 15, № 3, 251—252 (англ.)

Изучаются свойства случайного процесса $x_0, x_1, x_2, \ldots$, который характеризуется следующими условиями:

1. Каждое x_i может принимать только два значения 0 и 1, и вероятность того, что $x_0 = 1$, есть p.

2. Для любых m (или менее) последовательных x_i самое большее одно из них может быть 1.

3. Если известно, что любые $m-1$ (или более) последовательных x_i равны нулю, то следующий x_i равен 1 с вероятностью p.

4. Если $x_0 = 0$, то условный стохастический процесс $x_1, x_2, \ldots$ является таким же, как и первоначальный процесс $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Пусть $P_n = P(x_n = 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $(P_0 = p, q = 1 - p)$. Используя метод производящих функций, можно доказать, что если $q > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{p}{1 + (m-1)p}.$$

Если мы оборвем случайный процесс $x_0, x_1, x_2, \ldots$, т. е. если мы возьмем некоторое x_n, не зная, каков номер n, и не зная также, что происходило с предыдущими x_i, то возникает задача определения вероятности того, что $x_n = 1$. Показывается, что эта вероятность равна

$$P(x_n = 1) = \frac{p}{1 + (m-1)p}.$$

Б. М. Клосс

7965. Реализации некоторых стохастических процессов. Фиш (Realizations of some stochastic processes. Fisz M.), Studia math., 1956, 15, № 3, 359—364 (англ.)

Исследуются сепарабельные стохастические процессы $x_t(\omega)$, определенные на интервале I_0 и не имеющие фиксированных точек разрыва, т. е.

$$P(\lim_{s\to t} x_s(\omega) = x_t(\omega)) = 1 \text{ для } t \in I_0.$$

Пусть $a(I)$ — вероятность того, что приращение процесса $x_t(\omega)$ в интервале $I \subset I_0$ отлично от нуля. Доказывается, что конечность верхнего интервала Буркилля функции $a(I)$ предполагает, что: 1) почти все реализации процесса $x_t(\omega)$ являются скачкообразными функциями; 2) среднее число скачков процесса $x_t(\omega)$ равно интегралу Буркилля функции $a(I)$, поэтому оно конечно.

Если, однако, $a(I)$ — абсолютно непрерывная функция интервала, тогда 1) и 2) имеют место и среднее число скачков процесса $x_t(\omega)$ в интервале I равно $\int_I Q(t)\,dt$, где $Q(t) = \lim \frac{a(I)}{|I|}$ $(|I| \to 0, \ t \in I)$.

Доказывается также, что если $x_t(\omega)$ имеет почти все реализации скачкообразные и среднее число скачков этого процесса конечно, тогда оно равно интегралу Буркилля от функции $a(I)$.

K. Urbanik

7966. Расходящиеся однородные во времени процессы рождения и смерти. Джон (Divergent time homogeneous birth and death processes. John Peter W. M.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 514—517 (англ.)

Рассматривается генеральная совокупность в однородном по времени процессе рождения и смерти, объем которой задается случайной переменной $n(t)$, определенной на множестве неотрицательных целых чисел. Если во время t объем совокупности есть n, вероятность того, что рождение происходит в интервале времени $(t, t+\Delta t)$, есть $\lambda_n t + 0(\Delta t)$; вероятность смерти есть $\mu_n t + 0(\Delta t)$ и вероятность того, что событие произойдет более чем один раз, есть $o(\Delta t)$. Параметры λ_n μ_n неотрицательны и не зависят от t. Вероятность $P_n(t)$ того, что объем совокупности есть n во время t, удовлетворяет тогда неравенству Феллера (Feller W., Probability Theory and its applications. John Wiley & Sons, New York, 1950, pp. 371—373) $\sum_0^{\infty} P_n(t) \leqslant 1$. Будем накладывать начальное условие $n(0) = 1$. Хорошо изве-

стно, что при некоторых условиях справедливо неравенство $\Sigma_n P_n(t) < 1$. Физической интерпретацией этого неравенства является то, что имеется положительная вероятность того, что за конечный интервал времени t встречается бесконечное число событий.

Здесь рассматривается случай, когда $\lambda_0 = 0$; если $\mu_1 > 0$, то состояние $n = 0$ есть достижимый барьер поглощения. Необходимое и достаточное условие для появления события в этом случае заключается в том, что ряд

$$\sum_m \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{\mu_m}{\lambda_m \lambda_{m-1}} + \ldots + \frac{\mu_m \ldots \mu_2}{\lambda_m \lambda_{m-1} \ldots \lambda_1} \right)$$

будет сходиться.

Этот результат был получен в различных эквивалентных формах Кендаллом (не опубликовано), цитирован Бартлеттом (РЖМат, 1956, 4679), Добрушиным (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 6, 185—191), Карлиным и Мак-Грегором (РЖМат, 1957, 7194) и Рейтером и Ледерманом (РЖМат, 1953, 1273).

Статья представляет собою простейшее развитие этого результата и в то же время подчеркивает физическое значение членов ряда. Резюме автора

7967. Сильная сходимость процессов Роббинса — Монро и Кифера — Вольфовица. Гхош (Strong convergence of Robbins and Monro and Kiefer and Wolfowitz processes. Ghosh M. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, 48, № 1, 25—32 (англ.)

Доказывается сходимость по вероятности к θ стохастического аппроксимационного процесса Роббинса — Монро $x_{n+1} = x_n - a_n(y_n - \alpha)$, определяющего корень уравнения $M(x) = 0$, где $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y dH(y|x)$ есть функция регрессии, $H(y|x)$ — функция распределения y при заданном x, в условиях

$$\limsup_{|x| \to \infty} \left| \frac{M(x) - \alpha}{x - \theta} \right| < k, \qquad (1)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 dH(y|x) \leqslant \sigma^2 < \infty, \qquad (2)$$

$$M(x) \leqslant \alpha - \pi(\delta) \quad \text{при } x < \theta - \delta,$$
$$M(x) > \alpha + \pi(\delta) \quad \text{при } x > \theta + \delta$$

(здесь $\pi(\delta) > 0$ при всех δ), $\sum_1^{\infty} a_n = \infty$, $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$.

θ предполагается таким, что $M(\theta) = \alpha$.

Наложенные условия слабее условий Вольфовица (Kiefer V., Wolfowitz J., Ann. Math. Statistics, 1952, 23, 462—466), доказавшего сходимость процесса к θ по вероятности, предполагая вместо условия (1) ограниченность функции регрессии $M(x)$.

Приведен пример, показывающий, что если условие (2) не выполнено, процесс не сходится:

$$H(y|x) = \begin{cases} 1 \text{ при } y \geqslant x \\ 0 \text{ при } y < x; \end{cases} \quad x_1 = 1, \quad M(x_1) = 3; \quad x_2 = -2,$$

$$M(x_2) = -5; \; x_n = (-1)^{n+1}(n+1), \; M(x_n) = (-1)^{n+1}(2n+1)$$
для $n = 3, 4, 5, \ldots$

Доказано также, что в случае применяемого к оценке максимума функции регрессии стохастического аппроксимационного процесса Кифера — Вольфовица

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{c_n}(y_{2n} - y_{2n-1}),$$

где y_{2n} и y_{2n-1} не зависят от x_n и имеют средними соответственно $M(x_n + c_n)$ и $M(x_n - c_n)$, при выполнении условий $c_n \to 0$, $\sum_1^{\infty} a_n = \infty$ и $\sum_1^{n} \frac{a_n^2}{c_n^2} < \infty$, существуют ρ и R такие, что из $|x' - x''| < \rho$ следует $|M(x') - M(x'')| < R$; для любого $\delta > 0$ существует положительная функция $\pi(\delta)$ такая, что из $|x - \theta| < \delta$ следует

$$\inf_{0 < x < \frac{1}{2}\delta} \left| \frac{M(x + \varepsilon) - M(x - \varepsilon)}{\varepsilon} \right| < \pi(\delta).$$

Условие $\sum_1^{\infty} c_n a_n < \infty$ и условие Липшица, наложенное на функцию $M(x)$ (см. цит. выше работу), оказываются излишними. В. А. Михайлов

7968. Неоднородные строго марковские процессы. Дынкин Е. Б., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 2, 261—263

Работа посвящена перенесению на неоднородный случай понятия строго марковского процесса и достаточных условий строгой марковости, рассмотренных ранее для однородных по времени процессов (РЖМат, 1957, 7201). Даются следующие два определения строго марковского процесса с переходной функцией $P(s, x; t, \Gamma)$, (детали формулировок ввиду их громоздкости мы опускаем, *реф.*):

1) Процесс измерим, и (почти всюду в смысле $P_{s,x}$)

$$P_{s,x}\{x_t \in \Gamma \mid x_u, \; s \leqslant u \leqslant \tau\} = P(\tau, x; t, \Gamma),$$

где τ — любая случайная величина, не зависящая от будущего и s-прошлого, заключенная между произвольными не случайными моментами s и t, $P_{s,x}$ — распределение вероятностей, когда процесс начинается в момент s из состояния x.

2) Процесс измерим, и (почти всюду в смысле $P_{s,x}$)

$$P_{s,x}\{x_\eta \in \Gamma \mid x_u, s \leqslant u \leqslant \tau\} = P(\tau, x_\tau; \eta, \Gamma),$$

где τ — любая случайная величина, не зависящая от будущего и s-прошлого, а η — случайный момент, определяемый течением процесса на интервале $[s, \tau]$, больший или равный τ. Из определений 1) и 2) вытекает независимость „будущего" от „прошлого" при фиксированном $x(\tau)$, когда под „будущим" понимается не только $x(t)$ или $x(\eta)$ (как в определениях), а соответственно любая случайная величина, определяемая поведением процесса после момента t, или любая функция вида $f(x(\eta_1), x(\eta_2))$.

Второе определение, априори более стеснительное. В случае метрического фазового пространства для процессов с непрерывными справа траекториями оба определения эквивалентны. Далее, в этом случае во втором определении в качестве η можно брать только величины вида $\tau + h$, $h \geqslant 0$, $h = \text{const}$. Наконец, в этом случае для строгой марковости достаточно, чтобы для любой непрерывной ограниченной функции $f(y)$ функция

$$F(u, y) = \int P(u, y; t, dz) f(z)$$

удовлетворяла соотношению

$$\lim F(u, y) = F(s, x)$$

при $y \to x$, $u \downarrow s$. Последнее утверждение остается верным, если вместо $F(u, y)$ взять

$$\varphi(u, y) = \int P(u, y; u+h, dz).$$

Результаты приводятся без доказательств.

А. А. Юшкевич

7969. О строго марковских процессах. Юшкевич А. А., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 2, 187—213 (рез. англ.)

В статье приводится следующее условие, при котором траектории марковского процесса $x(t)$ непрерывны справа. Пусть X — некоторое σ-компактное метрическое пространство, $\mathfrak{B}$—σ-алгебра, порожденная открытыми в X множествами, и пусть в пространстве X можно ввести новое расстояние $\rho(x, y)$, такое, что X полно в смысле метрики ρ и функция $\rho(x, y)$ $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$- измерима. Если для переходной функции $p(s, x, t, \Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{B}, x \in X$, при всех $s \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ равномерно по x,

$$\lim_{t \downarrow s} p(u, x, t, V_\varepsilon(x)) = 0, \qquad (s \leqslant u \leqslant t),$$

где $V_\varepsilon(x) = \{y \in X, \rho(x, y) \geqslant \varepsilon\}$, то существует марковский процесс с непрерывными справа в метрике ρ траекториями, переходной функцией которого служит функция $p(s, x, t, \Gamma)$.

Для процессов с непрерывными справа траекториями автор формулирует признак строгой марковости, несколько обобщающий признак, данный Е. Б. Дынкиным (реф. 7968), и подробно изучает строго марковские процессы с непрерывными справа в дискретной топологии траекториями.

Измеримый марковский процесс с траекториями, определенными не при всех $t > 0$, и с измеримой переходной функцией автор называет почти строго марковским процессом, если при любом $s \geqslant 0$ для любой не зависящей от будущего и s-прошлого величины $\tau(\omega)$ с областью определения $\Omega_\tau = \{\Omega_\tau, x(\tau) \in X\}$ и любой величины $\eta(\omega)$ ($\omega \in \Omega_\tau$), определяемой поведением процесса на отрезке $[s, \tau]$ и такой, что $\eta \geqslant \tau$,

$$P_{s,x}\{\Omega_\tau, x(\eta) \in \Gamma\} = \int_{\Omega_\tau} p(\tau, x(\tau), \eta, \Gamma)\, dP_{s,x} \quad (\Gamma \in \mathfrak{B}).$$

Пример автора показывает, что не для всякой измеримой переходной функции можно построить строго марковский процесс с такой переходной функцией. Однако в счетном случае для любой переходной функции $p_\alpha^\beta(t)$ однородного процесса, непрерывной справа в нуле, в статье строится почти строго марковский процесс с переходной функцией, равной $p_\alpha^\beta(t)$. М. Г. Шур

7970. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Севастьянов Б. А., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 1, 106—116 (рез. англ.)

Изучается однородный марковский процесс в пространстве Ω с $P(x, t, A)$ — вероятностью перехода за время t из состояния x в множество A ($t > 0$, $x \in \Omega, A \in F$— борелевскому телу измеримых множеств из Ω). Пусть P_t—распределение вероятностей в момент времени t.

В § 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Однородный во времени марковский процесс имеет единственное стационарное распределение, которое является эргодическим, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество C, распределение вероятностей R в Ω, числа $t_1 > 0$, $k > 0$, $K > 0$ такие, что:

1) $kR(A) \leqslant P(x, t, A)$ для любых точек $x \in C$ и измеримых множеств $A \subseteq C$;

2) для любого начального распределения P_0 существует такое t_0, что при $t > t_0$, $P_t(C) \geqslant 1 - \varepsilon$;

3) $P_t(A) \leqslant K \cdot R(A) + \varepsilon$ для измеримых $A \subseteq C$.

В § 2 работы доказывается существование стационарного распределения для телефонной системы с n обслуживающими линиями с пуассоновским потоком поступающих вызовов с параметром λ и произвольным законом распределения длительности разговора $F(x)$ таким, что $\int_0^\infty x dF(x) = \mu < +\infty$.

Пусть $p_k(x_1, x_2, \ldots x_k)$ — плотность вероятности того, что при стационарном начальном распределении занято k линий, причем ведущиеся разговоры продолжаются в течение времени $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Тогда $p_k(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\lambda^k}{k!} p_0 [1 - F(x_1)] \ldots [1 - F(x_k)]$;

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!}}$$

В § 3 с помощью теоремы 1 доказывается единственность и эргодичность стационарного распределения. Автор высказывает предположение, что условия теоремы 1 являются и необходимыми для существования единственного стационарного эргодического распределения. Р. З. Хасьминский

7971. Локальная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова со счетным числом возможных состояний. Статулявичус В. А., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 5, 872—873

Рассматривается последовательность $x_1, x_2 \ldots$ целочисленных случайных величин, связанных в неоднородную цепь Маркова, $S_n = \sum_{j=1}^n x_j$, $B_n^2 = DS_n$, $P\{X_k = j | X_{k-1} = i\} = p_{ij}^{(k)}$, $P\{X_k = j\} = p_j^{(k)}$.

Предполагаются выполненными следующие условия: I. Для некоторого j_0 $P^k_{ij_0} \geqslant \alpha > 0$ для любых i, k. II. $B_n^2 = DS_n \geqslant c > 0$. III. Существуют равномерно ограниченные абсолютные моменты $M|X_k|^s$ до порядка s ($s \geqslant 3$) включительно. IV. О. н. д. всех разностей $j - j_0$, для которых $\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} p_j^{(k)} \to \infty$ при $n \to \infty$, равен единице. При этих условиях устанавливается без доказательства асимптотическое разложение

$$B_n P\{S_n = m\} = g(x_{nm} + \sum_{k=1}^{s-3} \frac{1}{n^{k/2}} P_k\left(-\frac{d}{dx_{nm}}\right) g(x_{nm}) + O\left(\frac{1}{n^{(s-2)/2}}\right),$$

где $g(x)$ — нормальная плотность, $x_{nm} = \frac{m - MS_n}{B_n}$, $P_k\left(-\frac{d}{dx}\right) g(x)$ означает, что в многочлене $P_k(it)$ степени $(it)^\nu$ заменяются выражениями $(-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu} g(x)$.

В. Рихтер

7972. О предельных законах для случайных векторов, связанных в цепь Маркова. Михок (Sur les lois limites des variables vectorielles enchaînées au sens de Markoff. Mihoc G.), Теория вероятностей и ее

применения, 1956, 1, № 1, 103—112 (франц.; рез. русск.)

Пусть $v(1)$, $v(2)$,..., $v(t)$,... — последовательности случайных s-мерных векторов, связанных по схеме однородных цепей Маркова. Пусть далее

$$v^h = (v_1^h, v_2^h, \ldots, v_s^h), \qquad h = 1, 2, \ldots, m,$$

возможные значения векторов $v(t)$, $t = 1, 2, \ldots$,

$$P\{v(t+1) = v^k \mid v(t) = v^h\} = P_{hk},$$

где

$$P_{hk} \geqslant 0, \ \Sigma_{k=1}^{m} P_{hk} = 1.$$

В статье изучается предельное распределение для сумм

$$w(t) = v(1) + v(2) + \ldots + v(t)$$

при $t \to \infty$. Устанавливается, что при некоторых общих условиях, после соответствующей центровки и нормировки случайный вектор $w(t)$ асимптотически будет нормально распределенным.

Выясняются различные случаи вырождения в зависимости от соотношений между s и m. Резюме автора

7973. Предельные свойства марковских процессов. **Урбаник** (Własności graniczne procesów Markowa. Urbanik K.), Rozpr. mat., 1957, 13 (польск.)

Рассматривается однородный марковский процесс $<\Omega, B_\Omega, P>$, реализации которого являются ступенчатыми функциями $\omega(t)$, определенными при $t \geqslant 0$ и принимающими значения $x \in X$, где X — метрическое, сепарабельное и локально компактное пространство, причем $\omega(0) = x_0$. Предполагается, что функции интенсивности $q(x)$ и $q(x, A)$, где $x \in X$, а A — борелевское множество в x, являются стандартной парой q-функций в смысле Дуба.

I. Точка $x \in X$ является по определению критической точкой процесса, если при каждом $t \geqslant 0$ $p(t, x, (x)) = 1$, где $p(t, x, A)$ — вероятность перехода из x в A в течение времени t. Тогда $x \in X$ называется предельной точкой процесса, если для произвольной окрестности u точки x $\lim_{t\to\infty} P(\cup_{T>t} \{\omega : \omega(T) \in u\}) > 0$. Доказывается, что некритическая точка $x \in X$ является предельной точкой процесса тогда и только тогда, когда для произвольной окрестности U точки x $\int_0^\infty p(t, x_0, u)\, dt = \infty$. Если X является дискретным пространством, то $x \in X$ является предельной точкой тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty p(t, x_0, (x))\, dt = \infty$.

II. Множество $L(\omega) = \bigcap_{t>0} \cup_{T>t} \{x : \omega(T) = x\}$ называется предельным множеством реализации ω. Доказывается: α) $L(\alpha)$ состоит почти для всех $\omega \in \Omega$ из предельных точек процесса, β) существует в x последовательность $\{\Gamma\}$ непересекающихся, открытых множеств таких, что для почти всех $\omega \in \Omega$ верно соотношение $\operatorname{int} L(\omega) = \cup_n \Gamma_n$. Если X является дискретным пространством, то в утверждении β) вместо $\operatorname{int} L(\omega)$ следует писать $L(\omega)$.

Приведены многочисленные примеры применения этих теорем. M. Fisz

7974. Границы, индуцированные неотрицательными матрицами. Феллер (Boundaries induced by non-negative matrices. Feller William), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 1, 19—54 (англ.)

Построение границы является первым шагом в программе описания однородных по времени марковских процессов со счетным числом состояний. Для диффузионных процессов на прямой эта программа была выполнена в предыдущих работах автора.

1. Пусть E — множество положительных целых чисел, Π — матрица с элементами $\Pi(i,j) \geqslant 0$, где $i, j \in E$. Матрица Π предполагается субстохастической, т. е. такой, что

$$\sum_{j\in E} \Pi(ij) \leqslant 1. \tag{1}$$

Субстохастическая матрица Π определяет на E случайное блуждание с возможным исчезновением. При построении границы основную роль играют решения x уравнения $\Pi x = x$. Каждое ограниченное решение системы $\Pi x = x$ является разностью двух неотрицательных решений. Решения, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x(i) \leqslant 1$, образуют выпуклое множество P, являющееся структурой. Пусть $S_A(i)$ — вероятность того, что при начальном состоянии i случайное блуждание, управляемое матрицей Π, начиная с какого-то момента, будет происходить только внутри A и будет продолжаться бесконечное число шагов.

Множество A, для которого $S_A \not\equiv 0$, называется множеством пребывания а само S_A — решением пребывания (sojourn solution). Решения пребывания вместе с нулевым решением образуют структуру $S \subset P$. Аналитически, элементы S — это крайние точки множества P. Множества A и B называются эквивалентными, если $S_A = S_B$. Для любого множества пребывания A и любого $0 < \eta < 1$ множество A_η, состоящее из тех состояний, начиная из которых с вероятностью $> 1 - \eta$ случайное блуждание продолжается бесконечно, оставаясь все время внутри A, эквивалентно A. Для любого S_A можно выбрать A так, что $S_E = S_A + S_{E-A}$, и $S_A = \lim_{n\to\infty} \Pi^n(i, A)$. Без ограничения общности можно считать, что все состояния из E несущественны (в общем случае E распадается на множество несущественных состояний и не более чем счетное число неразложимых возвратных множеств, ничего не добавляющих к границе). Тогда для каждого множества пребывания A существует монотонная последовательность A_ε эквивалентных A множеств, имеющих пустое пересечение. Естественно считать, что A_ε сходятся к участку границы, соответствующему S_A, и являются его окрестностями. Тогда $S_A(i)$ будет вероятностью асимптотического приближения к этому участку границы. В простейшем случае, когда S_A — минимальное решение пребывания (т. е. когда из $0 \leqslant S_B \leqslant S_A$ следует $S_B = S_A$ или $S_B = 0$), S_A соответствует одна изолированная точка границы. Таких точек может быть не более чем счетное число. В общем случае решению S_A соответствует не одна точка, а некоторое множество границы, одновременно открытое и замкнутое (внутри границы). Для построения точек границы B в общем случае применяется известный метод максимальных идеалов. Каждое решение x из P можно доопределить по непрерывности для всех точек границы, причем граничные значения образуют на B непрерывную функцию. Решения S_A принимают на границе только значения 0 и 1. Любой элемент $x \in P$ можно равномерно на E аппроксимировать конечными линейными комбинациями решений пребывания.

2. Неограниченные строго положительные решения уравнения $\Pi x = x$ образуют структуру M, вообще говоря, не компактную. Для простоты автор ограничивается случаем, когда $\Pi 1 = 1$, т. е. матрица является стохастической. Для любого $z \in M$ матрицу

$$\Pi'(i,j) = \Pi(i,j)\, \frac{z(j)}{z(i)} \tag{2}$$

назовем подобной матрице П. Отношение подобия является симметричным и транзитивным. Решению x уравнения $\Pi x = x$ соответствует решение

$$x'(i) = \frac{x(j)}{z(i)} \qquad (3)$$

уравнения $\Pi' x' = x'$. Отображение (2), (3) определяет семейство F подобных стохастических матриц с изоморфными структурами M. Каждому $x \in M$ соответствует матрица семейства, для которой образом x будет единичный вектор 1. Границы B, определяемые различными матрицами семейства F, могут частично перекрываться, причем определенные ранее топологии совпадают. Соединение границ B, соответствующих всем матрицам из F, образует границу B^*, общую для всех матриц этого семейства.

3. Сопряженным с $\Pi x = x$ является уравнение $\alpha = \alpha\Pi$. Для каждого строго положительного решения α матрица

$$\Pi^*(ij) = \frac{\alpha(j)}{\alpha(i)} \Pi(j,i)$$

является стохастической. (В случае, когда $\Sigma\alpha(i) = 1$, матрица Π^* задает вероятности перехода, обращенного во времени случайного блуждания). Когда α пробегает все положительные решения уравнения $\alpha = \alpha\Pi$, Π^* пробегает некоторое семейство подобных матриц. Сопряженной границей множества E автор называет границу B^*, порожденную этим семейством матриц.

А. А. Юшкевич

7975. К теории марковского процесса. Якобс (Zur Theorie der Markoffschen Prozesse. Jacobs Konrad), Math. Ann., 1957, 133, № 5, 375—399 (нем.)

Изучаются однородные марковские процессы с помощью функционально-аналитических методов.

Пусть Ω — произвольное множество, $\mathfrak{B}$ — фиксированное борелевское поле подмножеств Ω и пусть $\mathfrak{H}$ — совокупность обобщенных мер $x(E)$ $(E \in \mathfrak{B})$ с ограниченной полной вариацией. Тогда каждой функции вероятностей перехода $p(E,\omega)$ $(E \in \mathfrak{B}, \omega \in \Omega)$ ставится в соответствие линейное преобразование p пространства $\mathfrak{H}$; $Px(E) = \int p(E,\omega)\, x(d\omega)$. Однородный марковский процесс автор определяет как совокупность произвольной абелевой полугруппы G функций вероятностей перехода с соответствующей ей полугруппой $\mathfrak{G}$ линейных преобразований пространства $\mathfrak{H}$. Если эти полугруппы однопараметрические (над областью неотрицательных чисел), то это определение совпадает с общепринятым.

Полугруппа $\mathfrak{G}$ имеет слабое замыкание $\bar{\mathfrak{G}}$, определяемое как совокупность всех непрерывных линейных преобразований $\bar{P}$ в $\mathfrak{H}$ таких, что для произвольных $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{H}$ и произвольной (слабой) окрестности $\mathfrak{A}$ меры $x(E) \equiv 0$ найдется $P \in \mathfrak{G}$, для которого $Px_i - \bar{P}x_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1,2,\ldots r)$. Предполагается, что либо Ω конечно, либо выполнена гипотеза („гипотеза (S)"): $\bar{\mathfrak{G}}$ содержит преобразование $\bar{P}$ такое, что множество $\{Px, \| x \| \leqslant 1\}$ слабо компактно. Обозначим через $\| x \|$ полную вариацию меры $x \subset \mathfrak{H}$ и пусть $\mathfrak{G}(x)$ — слабое замыкание множества $\mathfrak{G}$ $x, f = \{x, 0 \in \mathfrak{G}(x)\}$, R — совокупность $r \in \mathfrak{B}$ таких, что для всех $g \in \mathfrak{G}(r)$ $\mathfrak{G}(g) = \mathfrak{G}(r)$. Совокупность вероятностных мер, принадлежащих R, обозначим через $\mathfrak{W}$.

Теорема. Если Ω конечно или выполнена гипотеза (S), то R и $\mathfrak{f}$ суть инвариантные замкнутые подпространства пространства $\mathfrak{H}$ и каждый вектор $\eta \in \mathfrak{H}$ может быть единственным образом представлен в виде $\eta = r + f$, где $r \in R$, $f \in \mathfrak{f}$. При этом слабое замыкание $\mathfrak{G}$ индуцирует группу преобразований в R, оставляющую $\| r \|$ инвариантной.

Теорема. Пусть Ω конечно или выполнена гипотеза (S). Тогда множество $\mathfrak{W}_0$ экстремальных точек $\mathfrak{W}$ конечно. $\mathfrak{W}$ является слабо замкнутой выпуклой оболочкой $\mathfrak{W}_0$, а R — линейной оболочкой $\mathfrak{W}_0$.

Доказывается, что для выполнения условий (S) достаточно выполнения следующего условия (D), принадлежащего Деблину и Дубу: найдется $p(E,\omega) \in G$, вероятностная мера $x_0(E)$ и 2 положительных числа η и ν, $\nu < 1$ такие, что из неравенства $x_0(E) < \eta$ следует $p(E,\omega) < \nu$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть для однопараметрической полугруппы $\mathfrak{G} = P(t)$ $(t \geqslant 0)$ выполнено условие (D) или Ω конечно. Тогда для любого $x \in \mathfrak{R}$ найдется элемент $r \in R$ такой, что $\lim \| P(t)x - P(t)r \| = 0$. Автор рассматривает также предельное поведение меры $P(t)x$ при $t \to \infty$, если выполнена лишь гипотеза (S) и предельное поведение вероятностей перехода за n шагов однородной марковской цепи. Марковские процессы с конечным множеством состояний изучены в статье наиболее подробно.

М. Г. Шур

7976. Марковские процессы в теории обучения. Кемень, Снелл (Markov processes in learning theory. Kemeny John G., Snell J. Laurie), Psychometrika, 1957, 22, № 3, 221—230 (англ.)

Рассматриваются математические проблемы, возникающие в двух теориях обучения — одной, развитой Бушем и Мостеллером, другой, развитой Эстесом. Теория Буша и Мостеллера приводит к одному классу марковских процессов, которые были детально изучены (Bush R. R., Mosteller F., Stochastic models for learning, New York, Wiley, 1950; РЖМат, 1955, 1862). Модель Эстеса можно рассматривать как цепь Маркова, т. е. марковский процесс с конечным числом состояний. Для одного важного класса среди специальных классов показывается, что модель Буша—Мостеллера в некотором смысле есть предельная форма модели Эстеса. Выводятся предельные распределения вероятностей для случаев, возникающих в обеих моделях. Резюме автора

7977. О мерах информации. Стам (On measures of information. Stam A. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **B60**, № 3, 201—211 (англ.)

Если $p(x_1 \ldots x_n)$, $q(x_1 \ldots x_n)$ — плотности вероятности, определенные на множестве R_n, тогда можно образовать обладающее свойством меры информации выражение

$$H(p) = \int p(x_1 \ldots x_n) \{D_1 p(x_1 \ldots x_n) + D_2 q(x_1 \ldots x_n)\}\, dx$$

в котором D_1 D_2 — линейные операторы, действующие на параметры, от которых могут зависеть $p(x)$ и $q(x)$. При определенном выборе операторов D_1 и D_2, а также плотности распределения $q(x)$ получаются различные функционалы, используемые как меры информации в теории связи и в статистике. Приведенное выражение обобщается с позиций теории меры. Библ. 9 назв.

С. И. Боровицкий

7978. О некоторых мерах информации, применяемых в статистике. Шютценбергер (On some measures of information used in statistics. Schützenberger M. P.), Inform. Theory 3 rd London Sympos., 1955. London. 1956, 18—24. Discuss., 24—25 (англ.)

Мера информации, используемая теорией связи, отлична от мер, применяемых статистикой в задачах оценки неизвестных параметров распределения и проверки гипотез. Можно, однако, показать, что между ними существует сходство, корень которого кроется в природе меры информации. Доказательство опирается на известный принцип, заключающийся в том, что полное количество информации, связанное с определением переменной ξ, можно разбить на две части — количество информации, полученное до какого-то промежуточного этапа, и количество информации, полученное, начиная с этого этапа, взвешенные согласно вероятностям промежуточных состояний. Отступление от обычного

подхода заключается в том, что принцип прилагается не ко всем промежуточным состояниям, а лишь к тем, которые полностью исключают некоторые возможности.

Пусть случайная переменная может находиться в одном из состояний $x, y, z \ldots$, образующих конечное множество E. Априорные вероятности $P(x), P(y) \ldots$, того, что ξ находится в одном из этих состояний, могут зависеть от параметра θ. Каждому наблюдателю Ω_l ставится в соответствие зависящее от его природы разбиение эквивалентности ρ_l множества E на непересекающиеся подмножества $X, Y, Z \ldots$. Два состояния ξ, относящиеся к разным подмножествам, наблюдатель различает; состояния, принадлежащие одному подмножеству, эквивалентны. Если каждое из подмножеств разбиения ρ_l содержится в подмножестве разбиения ρ_j, тогда $\rho_l < \rho_j$. Две пары разбиений $\rho_l < \rho_j$, $\rho_k < \rho_e$ находятся в отношении, обозначаемом $(\rho_l, \rho_j) \sim (\rho_k, \rho_e)$, если существуют подмножества E'', на котором попарно совпадают разбиения ρ_l, ρ_j и ρ_k, ρ_e, и подмножество $E' = E - E''$, на котором попарно совпадают разбиения ρ_l, ρ_k и ρ_j, ρ_e. Функция $f(\rho)$, определенная на множестве R всех разбиений E, называется оценкой на R, если для каждой четверки разбиений такой, что $(\rho_l, \rho_j) \sim (\rho_k, \rho_e)$, имеет место $f(\rho_l) - f(\rho_j) = f(\rho_k) - f(\rho_e)$. Любая такая оценка может быть записана в форме $f(\rho) = \Sigma g(X)$, где суммирование проводится по всем подмножествам разбиения ρ. Естественно считать, что мера информации $H(\rho_l)$, связанная с наблюдателем, представляет собой оценку.

Если разбиения $\rho < \rho'$ не совпадают лишь на подмножестве U, принадлежащем разбиению ρ', тогда $H(\rho) = H(\rho') + P(U) H(\rho'')$, где $H(\rho'')$ — мера информации, связанная с разбиением ρ на множестве U. Примем, $H(\rho)$ является непрерывным функционалом от переменных $x = P(X)$, образующих топологическое кольцо a. Пусть кольцо a таково, что для любых $a, b, \in a$, $a + b = 1$, $ab \neq 0$ непрерывные функционалы h_1, удовлетворяющие условию $h_1(a + b) = h_1(a) + h_1(b)$, имеют вид Δx, а функционалы h_2, для которых справедливо $h_2(ab) = h_2(a) + h_2(b)$, — вид $\Delta(\log x)$. Здесь Δ — квазилинейный функционал, а $\log x$ — некоторая фиксированная функция на a. Из этих условий следует, что $H(\rho) = \Sigma x \Delta \log x$, причем суммирование производится по всем подмножествам разбиения ρ.

Обсуждаются варианты доказательства и связь полученной меры с шенноновской мерой информации. Библ. 11 назв. С. И. Боровицкий

7979. Заметка о группировании. Кокс (Note on grouping. Cox D. R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 280. 543—547 (англ.)

Предполагается, что надо конденсировать наблюдения случайной величины в малое число групп; избранные интервалы группировки должны сохранять столько информации, сколько это возможно. Показывается, как можно математически сформулировать такое требование. Даются практические рекомендации для случая, когда величина нормально распределена и когда совокупность наблюдений разбивается на 2, 3, 4, 5 или 6 групп. По резюме автора

7980 К. Лекции по эргодической теории. Халмош (Lectures on ergodic theory Halmos Paul R.), Tokyo, Math. Soc. Japan, 1956, VII + 99 pp. (англ.)

Курс лекций, прочитанных автором в 1955 г. в Чикагском университете.

Книга состоит из введения и 22 параграфов (лекций), посвященных различным вопросам эргодической теории. Основные задачи и представления эргодической теории возникли из потребностей статистической механики. Математическое развитие теории потребовало привлечения ряда понятий, относящихся к теории меры, измеренных отображений, теории операторов и т. д. Эти понятия, вместе с некоторыми типичными примерами сохраняющих меру отображений пространств с мерой, излагаются в первой из лекций. Далее вводится понятие возвращающейся точки и доказывается теорема о возвращении. Следующие лекции посвящены эргодическим теоремам Неймана и Биркгофа и следствиям из них, вводится понятие эргодического отображения и рассматриваются примеры таких отображений, формулируется условие эргодичности в терминах собственных значений и собственных функций унитарного оператора, порожденного сохраняющим меру отображением в пространстве функций с суммируемым квадратом. В следующей лекции вводится понятие перемешивания (в сильном и слабом смысле), доказывается известное необходимое и достаточное условие слабого перемешивания (непрерывность спектра + эргодичность). Лекция, носящая название «алгебра с мерой», посвящена рассмотрению сохраняющих меру преобразований как отображений, действующих в булевских алгебрах измеримых множеств. Здесь же доказывается теорема Купмана о том, что условие $U(f \cdot g) = Uf \cdot Ug$ является необходимым и достаточным для того, чтобы унитарный оператор U, действующий в пространстве суммируемых в квадрате функций, на некотором пространстве с мерой, порождался сохраняющим меру преобразованием этого пространства с мерой.

Теория динамических систем с чисто точечным спектром является тем разделом эргодической теории, в котором уже сравнительно давно удалось получить ряд окончательных результатов. В лекции, носящей название «дискретный спектр», помимо теорем о том, что эргодическая система с чисто точечным спектром определяется (с точностью до изоморфизма) своим спектром и о каноническом виде таких систем, доказывается необходимое и достаточное условие представимости эргодического сохраняющего меру отображения в виде квадрата другого отображения.

Среди систем с непрерывным спектром сравнительно хорошо изученный класс образуют системы, порождающиеся на какой-либо компактной группе некоторым ее автоморфизмом. При этом инвариантной мерой является мера Хаара на группе. Такие системы, спектр которых абсолютно непрерывен и имеет бесконечную кратность, рассмотрены в одной из лекций. Далее излагается принадлежащий Нейману и Халмошу метод «обобщенных собственных значений», с помощью которого удается построить неизоморфные эргодические системы, имеющие один и тот же смешанный спектр.

Следующие несколько лекций посвящены рассмотрению пространств сохраняющих меру преобразований (на данном пространстве с мерой), различным его топологизациям и доказательству теорем о том, что преобразования, обладающие слабым перемешиванием, образуют в этом пространстве множество второй категории (Халмош), а преобразования с обычным перемешиванием — множество первой категории (Рохлин).

Далее рассматривается, в различных аспектах, вопрос о существовании инвариантных мер. Последняя лекция посвящена формулировке некоторых переменных проблем, преимущественно связанных с вопросом о том, в какой мере динамическая система определяется своим спектром. С. В. Фомин

7981 К. Основания теории вероятностей. Мазуркевич (Podstawy rachunku prawdopodobieństwa. Mazurkiewicz Stefan. Warszawa, Panstw. wydawn. nauk., 1956, 270 s., 27 zł) (польск.)

Тщательно разработаны основания теории вероятностей, опирающиеся на аппарат булевых алгебр. Книга состоит из введения и двух частей. Введение содержит элементарные факты из теории множеств, топологий и теории функций действительного переменного.

Часть первая состоит из 4 глав. В гл. I приведены основные данные о булевых полях и действиях в них. Отмечается, что класс $W(E)$ подмножеств любого множества E—булево поле относительно соединения, пересечения и дополнения. Более подробно рассматривается поле элементарных фигур в декартовом пространстве. Для конструкции вероятностной модели важны приведенные здесь понятия насыщенного поля, поля отношений, атома, репрезентативного атома и атомного поля. Теория идеалов в булевых полях и понятию поля событий посвящена гл. II. Здесь приводится теорема Стона об изоморфизме — относительно конечных действий — любого булева поля и некоторого поля множеств. Предполагается, что класс событий U_z—вполне аддитивное и атомное булево поле. Более узким полем событий, применимым в описывании некоторых игр, рассматриваемых в теории вероятностей, является так называемое каноническое поле множества A. Это наименьшее вполне аддитивное и насыщенное подполе поля U_z, взятое относительно идеала $I(A)$, где A—свободное множество событий, принадлежащих в U_z, а $I(A)$ —идеал, производящим элементом которого является событие $(\Sigma u)' + \Sigma u_1 u_2$. Это подполе обозначено символом $V(A)$, rel $I(A)$. Введенная дальше операция образования произведений в поле событий позволяет рассматривать «совместные» события. Поле событий, возможных при условии наступления некоторого события u_0, имеет вид $V(A)$, rel $(I(A) \vee I(u_0^1))$, где $I(A) \vee I(u_0^1)$ — соединение идеала $I(A)$ и главного идеала $I(u_0^1)$. В гл. III приводится аксиоматика вероятности, рассматриваемой как нормированная мера во вполне аддитивном поле событий U, rel I, где I — собственный идеал. Условная вероятность (при условии наступления события, u_0) определяется как вероятность в поле U, rel $(I \vee I(u_0^1))$. Доказывается ряд элементарных теорем теории вероятностей, среди них теорема Бейеса. Понятия случайной переменной и математического ожидания вводятся только для случая, когда поле U, rel I атомное, с не более чем счетным множеством репрезентативных атомов. В гл. IV доказывается для схемы Бернулли локальная и интегральная теоремы Муавра—Лапласа, теоремы Пуассона и закон больших чисел Бернулли.

Вторая часть состоит из 5 глав. В гл. V рассмотрены возрастающие функции и их точки разрыва. n-мерные возрастающие функции являются предметом рассуждений в следующей, гл. VI. В гл. VII вводится понятие меры, а также внешней меры Каратеодори и теорема Фреше — Никодима о расширении вполне аддитивных функций до меры. Меры в евклидовых пространствах изучаются в гл. VIII, в которой определены: мера, ассоциированная с n-мерно возрастающей функцией, регулярная и борелевская мера, и, в частности, мера Лебега. Последняя глава посвящена интегралу Лебега—Стилтьеса. Здесь же можно найти теорему Лебега об интегрировании последовательности функций и определение интеграла Римана-Стилтьеса.

Книга написана ясно и четко. Она представляет интерес для специалистов в области теории вероятностей.

M. Fisz

7982 К. Арифметика вероятностных законов. Дюге (Arithmétique des lois de probabilités. Dugué D. (Mém. sci. math. № 137). Paris, Gauthier-Villars, 1957, 51 p.) (франц.)

Изложение некоторых вопросов теории разложения одномерных случайных величин на независимые слагаемые. Состоит из введения и 5 глав. Гл. 1. Свойства характеристической функции (х. ф.). Несколько аналитических теорем. Типичная теорема (1. 4.). (Если х. ф. $\varphi(x+iy)$ аналитическая в полосе $a < I < b$, то реальная функция $\ln\varphi(iI)$ выпукла при $a < I < b$. Гл.2. Необходимые и достаточные условия того, чтобы функция была х. ф. Теорема Матиаса—Бохнера. Теорема А. Я. Хинчина: Для того чтобы $\varphi(t)$ была х. ф., необходимо и достаточно, чтобы в любом конечном сегменте значений t она была бы пределом в смысле равномерной сходимости функций вида:

$$\int_g^\infty (t+u)\, q(\bar{u})\, du \quad \text{с} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q(u)|^2\, du = 1.$$

Теорема. Г Пойа о выпуклых х. ф. Теоремы типа Марцинкевича, о том, что х. ф. вида $\exp P(t)$, где $P(t)$ — полином, есть х. ф. нормального закона. Гл. 3. Теорема Леви — Крамера. Безгранично делимые (б. д.) законы. Теоремы об аналитических свойствах х. ф. независимых слагаемых, в связи со свойствами х. ф. их суммы. Теорема Леви — Крамера о разложении нормального закона. Теорема Д. А. Райкова о разложении закона Пуассона. Некоторые свойства х. ф. б. д. законов. Теорема А. Я. Хинчина: Всякая х. ф. есть произведение б. д. х. ф. на произведение неразложимых х. ф. Примеры. Законы устойчивые, полуустойчивые и квазиустойчивые (Леви). Гл. 4. Неразложимые законы. Некоторые примеры А. Я. Хинчина, Леви, Дюге и Фишера. Теорема Крамера (Cramer H., Arhiv Math., 1949, 1, № 7, 61—65) об одном случае, когда б. д. законы имеют не б. д. компоненты. Гл. 5. Дополнения. Библиография.

Ю. В. Линник

7983 К. Таблицы вероятностей. 2-е изд. Черницкий П. И. М., Воениздат, 1957, 223 стр. 5 р. 45 к.

Табулируется функция $N = f(p;\ P_m > i)$ необходимого числа испытаний N, гарантирующего в условиях схемы Бернулли с параметром p с данным уровнем вероятности $P_m > i$ (зависит лишь от m), что событие появится в N испытаниях не менее m раз.

Аргумент m принимает значения 1 (1) 15; аргумент p: 0,2% (0,2%), 10% (1%) 98% и $P_m > i$: 0,05 (0,05) 0,95 (0,05) 0,98

Н. В. Смирнов

7984 Д. Характеристические функции и их преобразование. Жиро (Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Girault Maurice), Thèse. doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris. Paris, Impr. J. et R. Sennac. 1955, p. 221—298 (франц.)

Работа посвящена некоторым элементарным аналитическим свойствам характеристических функций (х. ф.) случайных величин. В гл. 1—2 даются основные определения и свойства х. ф. В гл. 3 рассматривается „преобразование H^*", которое сопоставляет х. ф. $f(t)$, х. ф. $Hf(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\, dx$. В связи со свойством одновершинности распределения формулируются различные варианты теоремы А. Я. Хинчина об унимодальности законов (Изв. НИИММ Томского ун-та, 1938, 2, № 2, 1—7) в гл. 4 изучаются интегралы вида

$$\frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} \varphi_1(t+u)\,\overline{\varphi_2(u)}\, du,$$

где φ_1 и φ_2 — х. ф.

В гл. 5 трактуются свойства х. ф., связанные с известной теоремой А. Я. Хинчина о получении х. ф. как пределов для интегралов вида

$$\int g(t+s)\, g(\bar{s})\, ds, \quad \text{где} \quad \int |g(t)|^2\, dt = 1.$$

В гл. 6 трактуются неотрицательно определенные функции, в частности теорема Бохнера—Хинчина и примыкающие к ней вопросы; рассматриваются также неотрицательно определенные функции многих переменных. В гл. 7 разбираются х. ф., порожденные выпуклыми функциями соответственно известной теореме Пойа

(Polya G., Remerks on characteristic functions, Proc. I. Berbeley Symposium, 1941). Библ. 44 назв.

Ю. В. Линник

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

7985. Сорок четвертая сессия Индийского научного конгресса. Заседания секции статистики (Forty-fourth session of the Indian Science Congress), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, **7**, № 28, 151—160 (англ.)

44-я годовая сессия Общества индийского научного конгресса состоялась в Калькутте в середине января 1957 г. Генеральным президентом сессии был доктор Рой. Бозе, председатель секции статистики, произнес вступительную речь на тему «Статистические методы в психометрических исследованиях». Состоялись две беседы на темы «Последние достижения в теории статистических методов» и «Значение статистики в сельском хозяйстве и биологии». Кроме того, были зачитаны и обсуждены многие доклады по теоретической и прикладной статистике. Нейман (США) и Китагава (Япония) выступили соответственно с речами «Научные исследования проведенные в Статистическом отделении Калифорнийского университета» и «Линейные сдвигаемые функциональные операторы и оценки функций от параметров».

Кишен избран президентом секции статистики на ближайшую сессию, которая состоится в Мадрасе. Бхатт переизбран секретарем секции.

7986. Статистика в Абердинском университете. (Statistics in the University of Aberdeen), Nature, 1957, **180**, № 4594, 1031—1032 (англ.)

7987. Что такое статистический контроль? Манайра (Che cos'é il controllo statistico? Manaira Mario). Ufficio mod., 1957, **31**, № 12, 1969—1972; 1958, **32**, № 2, 237—239; № 3, 393—396 (итал.)

7988. Замечания о связанности. Ланденна (Osservazioni sulla connessione. LandennaGiampiero), Statistica, 1957, **17**, № 4, 351—392 (итал.)

Перерабатывая, следуя современному направлению Помпиля (G. Pompilj), показатель несходства, введенный Джини (K. Gini) в 1914 г., автор приводит некоторые замечания, возникающие в теории связанности в результате такой переработки. По Джини, эта теория целиком основана на понятии несходства. Эти замечания и составляют содержание статьи.

Из введения автора.

7989. О проблеме двух совокупностей. Сакагути (On a problem of two populations. Sakaguchi Minoru. Rept Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. Engng, 1954, **3**, 65—69) (англ.)

7990. К вопросу о теории двухступенной выборочной инспекции. Сугияма (Some theory of two-stage sampling inspection. Sugiyama Hiroshi), Math. japon., 1955, **3**, № 4, 142—151 (англ.)

MN изделий разделены на M партий по N изделий в каждой. Для инспекции отбирается $m \leqslant M$ партий, и в каждой из отобранных партий проверяется $n < N$ изделий. Проверенные изделия классифицируются на дефектные и недефектные.

Пусть $P(x \leqslant c)$ обозначает вероятность того, что среди всех проверенных nm изделий будет не более чем c дефектных, а $P^*(x \leqslant c)$ ту же вероятность при отборе mn изделий из всей совокупности (без подразделения ее на группы).

Для оценки величины $\Delta = P(x \leqslant c) - P^*(x \leqslant c)$ даются две асимптотически точные формулы. М. И. Эйдельнант

7991. О выборочном исследовании материалов. Деминг (Sur les échantillonnages de matériaux. Deming W. Edwards), Rev. statist. appl., 1957, **5**, № 1, 23—41 (франц.)

Автор рассматривает, опираясь на известные теоретические положения и формулы, вопросы, связанные с одноступенной и двухступенной выборками и оценками, полученными в результате выборочного обследования.

А. К. Митропольский

7992. Математическая оценка рабочей техники выбора. Дейвис (A mathematical evaluation of a work sampling technique. Davis Harold), Naval Res. Logist. Quart., 1955. **2**, № 1-2, 111—117 (англ.)

Речь идет о рациональном выборе моментов t_i наблюдения над процессом $a(t)$ с постоянным средним μ при оценивании μ по наблюденной последовательности $a(t_i)$. Вычислены дисперсии оценок μ^* для μ при нескольких способах выбора t_i. Показано, что при некоторых условиях выбор в равноотстоящие моменты времени дает более точную оценку μ, чем случайный выбор.

А. П. Хусу

7993. Использование размаха вместо стандартного отклонения. Ноттер (Use of the range instead of the standard deviation. Noether Gottfried E.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 272, 1040-1055 (англ.)

Рассматриваются различные методы, связанные с использованием размаха выборки. Работа состоит из двух частей. В первой части излагаются процедуры, при помощи которых оцениваются неизвестные параметры совокупности и производится испытание гипотез относительно этих параметров. Во второй части дается обоснование процедур, предложенных в первой части.

В связи с тем, что в больших выборках дисперсии оценок, полученных при помощи размаха выборки, велики, автор рекомендует разбить выборку на несколько равных, небольших выборок. Даны рекомендации, как произвести эту разбивку. Исследуется также эффективность оценок как непосредственно, так и сравнением длин соответствующих доверительных интервалов для оценок, полученных на основе выборочного стандартного отклонения и размахов частичных выборок. Приводится таблица для определения рекомендуемого числа частичных выборок при различных объемах общей выборки и констант, употребляемых в оценках (для выборок объемом от 2 до 100 членов).

Б. В. Финкельштейн

7994. Оптимальная выборка для заполнения квоты. Джонсон (Optimal sampling for quota fulfilment. Johnson N. L.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 518—523 (англ.)

Пусть имеется генеральная совокупность, состоящая из K групп (имеются применения к демографической статистике). Требуется составить выборку, в которую согласно назначенной квоте из группы входило точно m_i индивидуумов ($i=1,2,\ldots, k$). Стоимость отбора индивидуума из общей совокупности без разделения на группы—C, а при отборе из i-й группы—C_i. Мы можем отобрать N индивидуумов из общей совокупности, не считаясь с квотой, при этом в одних группах мы не доберем, а в других могут оказаться лишние. Затем мы дополняем в каждой группе до квоты, возвращая лишние индивидуумы из тех групп, в которых получился перебор, при этом стоимость возвращения каждого индивидуума равна C_i'.

Полагая $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, где n_i — число отобранных индивидуумов i-ой группы получим следующее выражение для М. О. стоимости выборки — C_2.

$$C_2 = cN + \sum_{i=1}^{k} C_i M(m_i - n_i \mid n_i < m_i)\, P(n_i < m_i) + C'_i M(m_i - n_i \mid n_i \geqslant m_i)\, P(n_i \geqslant m_i).$$

Автор рассматривает вопрос об оптимальном выборе числа N, при котором стоимость выборки была наи-

меньшей для случая, когда генеральная совокупность состоит из групп одинакового объема.

В работе помещена таблица чисел N для различных значений $\frac{C_l}{C}=d>1$ и $\frac{C'_l}{C}=d'<1$ в зависимости от объема выборки и таблица ожидаемой при этом экономии в %. А. Г. Корман

7995. Проблема фактического осуществления случайного выбора. Гхош (A practical problem of random sampling. Ghosh Birendranath), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, **7**, № 28, 167—171 (англ.)

В качестве примера трудностей, возникающих при практическом осуществлении случайного выбора, автор рассматривает вопрос о случайном выборе слова из словаря. Прямое использование таблицы случайных чисел связано с необходимостью предварительно перенумеровать все слова в словаре. Если выбирать случайно страницу словаря, а затем одно из слов на странице, то выбор будет не равновероятным, так как на разных страницах—разное число слов. Автор обсуждает способы преодоления этой трудности, а также другие аналогичные вопросы. Р. Л. Добрушин

7996. О некотором правиле приема. Одерфельд, Станиславский (O pewnym przepisie odbiorczym. Oderfeld J., Stanislawski J.), Zastosow. Mat., 1955, **2**, № 3, 328—340 (польск.)

Исследуется партия вещей, рассматриваемая в отношении непрерывного признака X. Элементы упорядоченной выборки обозначаются через $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Партия принимается, если $x \geqslant A$ и $\bar{x}-x_1 \leqslant kx$, где A и k — константы, заданные априори. Авторы эффективно определяют вероятность принятия партии, когда X имеет нормальное распределение и $n=3$. Теоретически определение этой вероятности не представляет трудности (это следует из теории порядковых статистик). Однако получается двойной интеграл, вычисление которого хлопотливо. Авторы предлагают метод вычисления упомянутой выше вероятности на основании выборки из искусственной совокупности. В статье имеется таблица и номограмма, облегчающие разыскания искомой вероятности. W. Sadowski

7997. О мощности оптимумальных допустимых (толерантных) областей, когда выборка производится из нормально распределенных совокупностей. Гатман (On the power of optimum tolerance regions when sampling from normal distributions. Guttman Irwin), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 3, 773—778 (англ.)

Исследуется «мощность» и «достоинство» допустимых областей, описанных в работе Фрейзера, Гатмана (РЖМат, 1958, 1377), когда выборка производится из K-мерной нормальной совокупности. Р. Х. Дивеев

7998. Метод построения планов частично уравновешенных неполных блоков. Арчболд, Джонсон (A method of constructing partially balanced incomplete block designs. Archbold J. W., Johnson N. L.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 624—632 (англ.)

Планы частично уравновешенных неполных блоков были введены Босом и Нейром (Bose R. C., Nair K. R., Sankhyā, 1939, **4**, 337—372), которые описали число способов построения таких планов. Среди этих способов существует метод, основанный на случайных свойствах конечных геометрий. Этот способ использует конечные геометрии, связанные с полем Галуа $GF(p^n)$ сложением и умножением по mod p. Ослаблением геометрической структуры (или, что эквивалентно, ослаблением правил сложения и умножения) можно получить новые планы.

Основной чертой конечной проективной геометрии является то, что координаты есть элементы конечного поля. В этой статье координатам разрешается принадлежать линейной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ конечного порядка и с модулями над конечным полем F. Способ построения формулируется и объясняется более детально относительно двух планов. (Об аналогичной геометрической теории, использующей конечное поле, см. Segre C., Atti Accad. Sci. Torino, **47**, 308, 384; Spampinato W., Mem. Roy. Accad. Lincei, 1936, Ser. 6, **6**, 24; 1938, **7**, 30). По резюме авторов

7999. Некоторые непараметрические методы проверки законности допущения, что выборка происходит из данной совокупности. Джонсон (Some non-parametric methods of testing the validity of assuming that a sample comes from a given population. Johnson Leonard G.), Industr. Math., 1956, **7**, 57—75 (англ.)

Автор указывает ряд критериев для испытания гипотезы, что выборка происходит из данной совокупности, описываемой заданной графически функцией распределения. Рассуждения автора, связанные с оценкой получаемых результатов, ошибочны. М. А. Куликов

8000. Серии из элементов многих типов. Бартон, Дейвид (Multiple runs. Barton D. E., David F. N.), Biometrika, 1957, **44**, № 1-2, 168—178 (англ.)

Число способов, какими r_1 элементов первого рода и r_2 элементов второго рода можно расположить на прямой в виде $2t$ или $2t+1$ групп, было вычислено Уитвортом (Whitworth W. A., Choice and chance. Cambridge: Deighton Bell and Co., 1886), но, вероятно, было известно и до него. Это решение восстановили Стивенс (Stevens W. L., Ann. Eugen London, 1939, **9**, 10), Вальд, Вольфовиц (Wald A., Wolfowitz J., Ann. Math. Statist., 1940, **11**, 112) и Муд (Mood A. M., Ann. Math. Statist., 1940, **11**, № 367). Изучались также последовательности из элементов k различных родов. Уитворт рассматривал случай, когда $k=3$ и имеется одинаковое количество элементов каждого рода. Муд получил общее решение для распределения количества серий из элементов одного рода для данных k типов элементов. Пользуясь несложным обобщением метода Уитворта, автор показывает, как можно построить распределение общего количества серий в общем случае. Для получения сравнительно компактных выражений для моментов общего числа серий употребляется метод характеристик (т. е. случайные величины, принимающие значения 0 или 1). Предположение нормальности общего числа серий не обсуждается подробно, так как она, очевидно, следует из работ Вальда—Вольфовица и Муда. Показывается, однако, что предельное распределение является распределением Пуассона. Резюме авторов

8001. Несмещенные оценки при распределении по закону Пуассона и некоторые применения. Сиражединов С. Х., Докл. АН УзССР, 1956, № 6, 3—5 (рез. узб.)

Пусть случайная величина x распределена по закону Пуассона с параметром λ. Будем называть f_x несмещенной оценкой для $f(\lambda)$ по x, если $Mf_x=f(\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Доказывается теорема: Для того чтобы функция $f(\lambda)$ допускала единственную несмещенную оценку по x, необходимо и достаточно, чтобы она была аналитической на всей плоскости комплексного переменного λ. Эта единственная несмещенная оценка определяется формулой

$$f_x=\sum_{k=0}^{x} C_x^k f_0^{(k)},$$

где $f_0^{(k)}$ — производная k-го порядка от $f(\lambda)$ в точке $\lambda=0$.

Даются примеры применения этой теоремы.

А. А. Петров

8002. Оценки для среднего и стандартного отклонения нормальной совокупности. Диксон (Estimates of the mean and standard deviation of a normal population. Dixon W. J.), Ann. Math, Statistics, 1957, 28, № 3, 806—809 (англ.)

Сопоставляются по своей эффективности некоторые упрощенные оценки для среднего (центра) и стандартного отклонения нормальной совокупности, использующие члены упорядоченной выборки (малого объема $N \leqslant 20$). Из трех оценок — медианы, среднего из крайних и среднего из «оптимальной» (для каждого N) пары членов упорядоченной выборки наибольшую эффективность (не меньшую 82%) имеет последняя из названных оценок. Большую эффективность имеет также среднее из всех наблюдений, за исключением наибольшего и наименьшего (которые часто искажены ошибками), потеря эффективности этой статистики по сравнению с наилучшей линейной комбинацией тех же членов упорядоченной выборки не более одного процента. Для оценки стандартного отклонения рассматривается статистика, построенная путем комбинирования «размахов» порядка i:

$$\omega_{(i)} = x_{N-c+1} - x_i, \quad \omega_{(1)} = x_N - x_1 = R.$$

Так, для $N=12$ предлагается несмещенная оценка для σ вида

$$\eta = 0{,}1524\,(\omega_{(1)} + \omega_{(2)} + \omega_{(4)}).$$

Ее эффективность, по сравнению с обычной (несмещенной) оценкой стандартного отклонения, равна 97,2%.

Н. В. Смирнов

8003. Оценки максимального правдоподобия частично или вполне упорядоченных параметров. Эден (Maximun likelihood estimation of partially or completely ordered parameters. II. Eeden Constance van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 2, 201—211; Indagationes math., 1957, **19**, № 2, 201—211 (англ.)

В предшествовавшей работе автора (РЖМат, 1957, 8067) изучались оценки максимального правдоподобия упорядоченных вероятностей для серий независимых испытаний с двумя исходами. В настоящей статье подобная процедура обобщается на некоторые случаи упорядоченных параметров других вероятностных распределений, например, на параметры пуассоновского распределения или средние нормально распределенных величин с известными дисперсиями. Изучаются оценки максимального правдоподобия и исследуется их состоятельность при безграничном увеличении числа испытаний в каждой серии.

Б. М. Клосс

8004. Неравенство наименьших квадратов для оценок максимального правдоподобия упорядоченных параметров. Эден (A least squares inequality for maximum likelihood estimates of ordered parameters. Eeden Constance van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1957, **A60**, № 5, 513—521; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 513—521 (англ.)

Продолжается исследование оценок максимального правдоподобия для частично или полностью упорядоченных параметров. Один из результатов является обобщением одного неравенства для биноминального случая (РЖМат, 1958, 554).

Если (обозначения см. РЖМат, 1958, 559)

$$P[x_i = 1] = Q_i,\ P[x_i = 0] = 1 - \Theta_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

и

$$a_i = \sum_{\gamma=1}^{n_i} x_{i\gamma}, \qquad b_i = n_i - a_i \quad (i = 1, \ldots, k),$$

то для любой точки $(y_1, \ldots, y_k) \in D$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \left(y_i - \frac{a_i}{n_i}\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} n_i \left\{\left(t_i - \frac{a_i}{n_i}\right)^2 + (t_i - y_i)^2\right\}. \qquad (1)$$

Неравенство (1) равносильно неравенству

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\,(t_i - y_i)\left(t_i - \frac{a_i}{n_i}\right) \leqslant 0, \qquad (2)$$

выполняющемуся для любой точки $(y_1, \ldots, y_k) \in D$.

В настоящей работе неравенство (2) обобщается на случай частично или полностью упорядоченных параметров для других распределений вероятностей.

По резюме автора

8005. О некоторых оптимальных составных решающих процедурах. Нанди Н. К. (On some optimum compound decision procedures. Nandi H. K.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, **7**, № 27, 87—100 (англ.)

Пусть X обозначает n-мерный случайный вектор, с вероятностной плотностью $f(X|\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, включающей k неизвестных параметров $\Theta_1, \ldots, \Theta_k (\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_k))$. Предполагая, что возможные значения Ω_i каждого параметра Θ_i располагаются на интервале оси Θ_i, разделим этот интервал на m интервалов Ω_{ij} $(\Theta_i^{j-1} < \Theta_i \leqslant \Theta_i^j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ так, что $\Sigma_i \Omega_{ij} = \Omega_i$. С каждым Ω_{ij} ассоциируем окончательное решение $d_i = j$. Через $\delta(d_1, \ldots, d_k|X)$ обозначим решающую функцию, которая дает вероятность принятия $d_1, \ldots, d_k$, на базе выборочного наблюдения X.

Пусть, кроме того,

$$\Sigma_{i'} \delta(d_1, \ldots, d_k|X) = \delta_i(d_i|X),$$

где суммирование проводится по всем d, за исключением d_i. За функцию потерь принимается функция вида

$$L(d_1, \ldots, d_k|\Theta) = \Sigma_{i=1}^{k} L(d_i|\Theta_i).$$

Такая функция L приводит к рассмотрению только тех решающих функций, которые имеют форму

$$\delta(d_1, \ldots, d_k \mid X) = \prod_{i=1}^{k} \delta_i(d_i \mid X).$$

Разыскиваются оптимальные решающие правила δ, для выбора окончательных решений $d_1, \ldots, d_k$. Доказывается, что оптимальное (минимаксное) составное решающее правило δ может быть получено как произведение тех правил δ_i, каждое из которых является оптимальным правилом для решений только Q_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Более полно исследуются частные случаи $j = 2$, (два решения) и $j = 3$ (три решения) относительно каждого параметра.

Р. Х. Дивеев

8006. Гипотезы, касающиеся средних значений наблюдений в нормальных выборках. Патнайк (Hypotheses concerning the means of observations in normal samples. Patnaik P. B.), Санкия, Indian J. Statist., 1955, **15**, № 4, 343—372 (англ.)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые, нормально распределенные случайные величины.

1. $D(X_i) = \sigma^2 i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $EX_i = \rho\sigma_i$ (ρ неизвестно). Проверяется гипотеза: $H_0 : \rho = \rho_0$; $H_1 : \rho = c\rho_0$, где $c > 1$, или $c < 1$, или $c \neq 1$.

2. $D(X_i)=\sigma^2$; $EX_i=\rho_i\sigma$, проверяется гипотеза $H_0:\rho_i=\rho_i^{(0)}$; $H_1:\rho_i=c\rho_i^{(0)}$ где $c>1$, или $c<1$, или $c\neq 1$.

Если все X_i распределены одинаково, тест вырождается в нецентральный t-тест, описанный Джонсоном, Уэлшом (Johnson N. L., Welch B. L., Biometrika. 1939, **31**, 362—369).

3. В аналогичных предположениях рассматривается гипотеза о том, что у каких-то $n-m$ наблюдений из X_i $EX_i=\rho\sigma$, а у остальных m $EX_i=(\rho+\gamma)\sigma$ (γ — фиксировано). Проверяется гипотеза $H_0:\rho=\rho_0$; $H_1:\rho>\rho_0$ или $\rho<\rho_0$, или $\rho\neq\rho_0$.

4. Наконец, проверяется гипотеза $EX_i=\mu_1$ ($i=1, 2, \ldots, m$) или $E(X_i)=\mu_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$) $H_0:E(X_i)=\mu_0$ ($i=1, 2, \ldots, n$), $H_1:EX_i=\mu_0$ ($i=m+1, 2, \ldots, n$).

В каждом случае находится класс подобных критериев проверки и из этого класса выделяется наиболее мощный (или, если возможно, то равномерно наиболее мощный) критерий. М. А. Куликов

8007. t-критерий для двух выборок, основанный на размахе. Мур (The two-sample t-test based on range. Moore P. G.), Biometrika, 1957, **44**, № 3—4, 482—489 (англ.)

В качестве упрощения известного критерия Стьюдента Лорд (Lord E., Biometrika, 1947, **34**, 41) предложил использовать отношение разности средних двух нормальных выборок одинакового объема к среднему из размахов этих выборок. Автор показывает, как модифицировать этот критерий, если объемы выборок различны.

В качестве нормирующей статистики предлагается функция $\theta=\omega_1+\omega_2$, где ω_i — размах i-й выборки или, для более точной оценки σ, функция $\varphi=\omega_1+f_1(n_1, n_2)\omega_2$, где $f(n_1, n_2)$ — подходящая весовая функция (David H. A., Biometrika, 1951, **37**, 403):

$$f(n_1, n_2)=\frac{d_{n_2}}{V_{n_2}}\times\frac{V_{n_1}}{d_{n_1}},$$

где d_n и V_n — среднее и дисперсия размаха выборки объема n из нормальной совокупности с дисперсией единица. Автор показывает, что потеря мощности при использовании θ вместо φ незначительна.
Отношение

$$U=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\theta}$$

или аналогичное, использующее φ, где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ — средние значения выборок объемов n_1, n_2, имеет t-распределение, если средние генеральных совокупностей равны, и—нецентральное t-распределение в противоположном случае.

Автор приводит таблицу различных квантилей U_α для всех комбинаций n_1, n_2 от $n=2$ до $n=20$, используя аппроксимацию распределения θ и φ χ^2-распределением с $\nu(n_1, n_2)$ степенями свободы (Patnaik P. B., Biometrika, 1950, **37**, 78). М. А. Куликов

8008. Совместный критерий для среднего и дисперсии нормальной популяции. Бхаттачария (Joint test for the mean and variance of a normal population. Bhattacharya P. K.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1955, **6**, № 22, 73—83 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из нормальной популяции со средним m и дисперсией σ^2. Рассматривается задача проверки гипотезы H_0 ($m=m_0$, $\sigma=\sigma_0$). В случае, когда гипотеза H_0 отвергается, ставится вопрос о том, происходит ли это в силу отклонения величины m, σ или их обоих. Пусть

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i,\quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2,$$

$$s_0^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-m_0)^2,\quad t=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-m_0)}{s}.$$

Для решения указанной задачи предлагаются три критерия, из которых первый основан на t и s^2, второй — на $\bar{x}$ и s^2, и третий — на t и s_0^2. Изучаются распределения статистик, связанных с этими критериями, свойства этих критериев и их сравнительные достоинства. Даются таблицы, необходимые для использования второго и третьего критериев. А. А. Петров

8009. Некоторые замечания об упорядоченных случайных интервалах. Бартон, Дейвид (Some notes on ordered random intervals. Barton D. E., David F. N.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 1, 79—94 (англ.)

Интервалы, полученные в результате случайного бросания точки на отрезок единичной длины, упорядочиваются по величине.

Авторы рассматривают распределения любой пары таких интервалов (g_r, g_s) и полученные результаты обобщают на совокупность большего числа интервалов.

Далее находится плотность таких совместных распределений, а также значения некоторых моментов и смешанных моментов распределений различных комбинаций g_r, g_s и g_t ($1\leqslant r<s<t\leqslant n$).

Наряду с этим, определяется вид коэффициентов корреляции между длинами таких интервалов и вид производящей функции моментов совместного распределения многих переменных.

Наконец, авторами находятся некоторые предельные распределения величин рассматриваемых интервалов и распределения отношения длины r-го интервала к s-му и разности их длин. Имеется 8 таблиц численных результатов. М. А. Куликов

8010. О полигонах, получающихся для распределений переменных, разделенных на интервалы, и о поправке первых двух моментов. Херцель (Sulle poligonali come distribuzioni generatrici di variabili divise in intervalli e sulla correzione dei primi due momenti. Herzel Amato), Statistica, 1957, **17**, № 4, 414—445 (итал.)

Кастеллано (РЖМат, 1957, 7222) подчеркнул те преимущества, в смысле простоты и ясности изложения, которые получаются при изучении переменных, разделенных на интервалы (в частности, относительно поправок первого и второго момента) при предположении, что образующее распределение представляется ломаной линией. Автор в настоящей работе ставит себе целью еще раз развить эту тему для того, чтобы установить, каким условиям должна удовлетворять гистограмма частот для возможности образования ее ломаной линией; какие определенные свойства должны иметь эти ломаные и между какими пределами могут изменяться значения, которые получаются для первых двух моментов из формул поправок, предложенных Кастеллано.

По введению автора

8011. Об априорном бэта-распределении доли дефектных. Шаркади (A selejtarány a priori béta-eloszlásáról. Sarkadi Károly), Magyar tud. akad. alkalm. mat. közl., 1953, **2**, 287—297 (венг.; рез. русск., англ.)

Одерфельд (РЖМат, 1958, 5009) дал метод определения на основе некоторых данных параметров априор-

ного распределения вероятностей, предполагая, что оно принадлежит к типу бэта-распределений. Указывается и исправляется ошибка в упомянутом методе, а также предлагается другой метод, в котором используется максимальное значение доли дефектных вместо второго момента. Ö. Éltetö

8012. Статистические свойства обратных гауссовских распределений. 1. Туиди (Statistical properties of inverse Gaussian distributions. I. Tweedie M. C. K.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 362—377 (англ.)

Даются некоторые статистические свойства семейства функций плотности вероятности

$$\exp\left[-\lambda(x-\mu)^2/2\mu^2 x\right](\lambda/2\pi x^3)^{\frac{1}{2}}$$

для переменной x и параметров μ и λ с x, μ и λ, заключенными в пределах $(0\,\infty)$. Математическое ожидание x есть μ, в то время как λ есть мера относительной точности. Главным результатом является то, что оценки по методу наибольшего правдоподобия (м. н. п.) μ и λ имеют стохастически независимые распределения и являются оценками такого типа, который допускает построение аналога дисперсионного анализа для гнездовых классификаций. Оценка μ по м. н. п. есть выборочное среднее и для выборки фиксированного объема n, ее распределение такого же типа, как распределение x с тем же μ, но с λ, замененным на λn. Распределение оценки по м. н. п. $1/\lambda$ является распределением типа χ^2. Распределение вероятностей и оценка некоторых функций параметров при неоднородности данных также рассматриваются в работе. Резюме автора.

8013. Таблицы для стьюдентизации. Кудо (Tables for studentization. Kudo A.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, **18**, № 1-2, 163—166 (англ.)

Пусть $(X_1,\ldots,X_k)$ — случайная выборка из нормальной совокупности $N(m,\sigma)$, y — статистика. Допустим, что известно распределение $F(X)$ величины y/σ и что мы имеем несмещенную оценку s^2 дисперсии σ^2, обладающую n степенями свободы и не зависящую от y. Проблема вычисления распределения $F_n(y)$ величины y/s называется проблемой стьюдентизации. Некоторые приближенные формулы для $F_n(X)$ предложил Хартли (Hartley H. O., Biometrika, 1943, **33**, 173 — 180), и они применялись в разных задачах, например Наиром (Nair K. R., Biometrika, 1948, **35**, 16— 31; 118 — 144; 1952, **39**, 189 — 191) и Пирсоном и Хартли (Pearson E. S., Hartley H. O., Biometrika, 1943, **33**, 89 — 99). Моригути (РЖМат, 1958, 1390) принадлежит изящное доказательство формулы Хартли, опирающееся на следующее равенство:

$$F_n(X)=\sum_{\nu=1}^{N} b_\nu(n)\,x^\nu F^\nu(X)+R_N,$$

где $F^\nu(X)$ — ν-я производная $F(X)$ и

$$b_0(n)=1,$$

$$b_\nu(n)=\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{m-r}}{r!(m-r)!}\left(\frac{2}{n}\right)^{r/2}\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$|R_N|\leqslant|b_{N+1}(n)|\,|x^{N+1}|\max_{-\infty<u<\infty}|F^{(N+1)}(u)|.$$

К статье приложены таблицы коэффициентов $b_\nu(n)$ для $\nu=1,2,\ldots,13$ и $n=1\,(1)\,20\,(5)\,100$. Резюме автора

8014. Распределение ошибок Стьюдента. Обальский (Rozklad bledów Studenta. Obalski Jan), Romiary, automat., kontrola, 1955, **1**, № 1, 17—19 (польск.)

8015. О предположении Нельдера в математической статистике. Улин (On a conjecture of Nelder in mathematical Statistics. Ulin Bengt), Compositio math., 1957, **13**, № 2, 148—149 (англ.)

Доказано, что единственной функцией распределения, для которой достигается $\sup_F(I_0 I_2 - I_1^2)$, где

$$I_\nu=\int_0^\infty x^\nu e^{-x}\,dF(x)\,(\nu=0,1,2,),$$

является

$$F(x)=F_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

С. С. Кислицын

8016. Единственность одного результата в теории повторяемости несчастных случаев. Джонсон (Uniqueness of a result in the theory of accident proneness. Johnson N. L.), Biometrika. 1957, **44**, № 3—4, 530—531 (англ.)

Рассматривается случай, когда распределение случайной величины x (число несчастных случаев для некоторых индивидуумов за единицу времени) подчиняется закону Пуассона

$$\Pr\{x\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\,(x=0,1,2,\ldots),$$

где параметр λ имеет распределение Пирсона 3-го типа

$$P(\lambda)=\left(\frac{k}{m}\right)^k\frac{1}{\Gamma(k)}e^{-\frac{k}{m}\lambda}\lambda^{k-1}\qquad(\lambda\geqslant 0).$$

Вероятность того, что имело место в течение единицы времени y несчастных случаев выражается равенством

$$\Pr\{y\}=\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}P(\lambda)\,d\lambda \text{ при } My=m \text{ и } Dy=m+\frac{m^2}{k}.$$

Вероятность того, что в течение второго последовательного единичного отрезка времени имело место z несчастных случаев в предположении, что в первом единичном промежутке имело место y случаев, выражается равенством

$$\Pr\{z|y\}=\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^z}{z!}P(\lambda|y)\,d\lambda,$$

где

$$P(\lambda|y)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^y P(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^y P(\lambda)\,d\lambda}.$$

Легко показать, что в этом случае регрессия z по y линейна.

Автор показывает, что если $P(\lambda)$ не является кривой Пирсона 3-го типа, то регрессия z по y не является линейной. А. Г. Корман

8017. Дальнейшее исследование многомерных доверительных пределов. Рой, Гнанадесикан (Further contributions to multivariate confidence bounds. Roy S. N., Gnanadesikan R.). Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 399—410 (англ.)

Излагаются следствия из некоторых результатов, приведенных в предыдущих работах авторов (РЖМат, 1955, 3316; 1956, 8188; 1957, 6557) о доверительных пределах для параметрических функций, связанных с многомерными нормальными распределениями. Это ведет к ряду доверительных пределов (которые, думается, полезны, но до сих пор оставались не замеченными) для характеристических корней, связанных с 1) матрицей рассеяний для одной совокупности, 2) матрицами рассеяний для двух совокупностей, 3) матрицей регрессии между множеством из p элементов и множеством из q элементов и 4) многомерными линейными гипотезами относительно средних, включающие в себя, в частности, проблему анализа различения. В последнем параграфе работы приведены примеры, поясняющие использование приемов, описанных в предыдущих параграфах. Резюме авторов

8018. Доверительные интервалы для интервала поисков радара. Стивенс (Confidence limits for the range of a search radar. Stevens Colin), Appl. Statist., 1957, **6**, № 3, 214—222 (англ.)

Определение доверительных пределов для процентных точек нормального распределения представляет проблему, имеющую точное, но достаточно трудоемкое решение. В данной работе автор излагает сравнительно простое решение, которое оказывается достаточно точным. Резюме автора

8019. О фишеровской нижней границе для асимптотической дисперсии состоятельной оценки. Каллианпур, Рао (On Fisher's lower bound to asymptotic variance of a consistent estimate. Kallianpur G., Rao C. Radhakrishna), Санкия, Indian J. Statist., 1955, **15**, № 4, 331—342 (англ.)

Нижняя граница для дисперсии оценки неизвестного параметра распределения была впервые получена Фишером (Fisher R. A., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1925, **22**, 700) в предположении состоятельности оценки. Одной состоятельности в смысле сходимости оценки по вероятности к оцениваемому параметру, как было выяснено впоследствии в ряде работ, оказывается недостаточно для получения нижней границы для дисперсии оценки, что дало повод для критики концепции эффективности по Фишеру. Авторы указывают, что определение состоятельной оценки по Фишеру отличается от общеупотребительного определения. Доказывается, что условия состоятельности по Фишеру и дифференцируемости по Фреше обеспечивают существование положительной нижней границы для дисперсии оценки. Рассмотренный в работе, наряду со случаем непрерывного распределения, случай оценки параметров полиномиального распределения оказался допускающим более простую трактовку. Ограничимся приведением результата для этого случая.

Пусть вероятности попадания в каждую из k непересекающихся зон равны $p_1,...,p_k (\Sigma p_i = 1)$ и зависят от неизвестных параметров $\Theta_1, \Theta_2,...$; частоты попадания в n испытаниях равны соответственно $l_1, ...,l_k$. Пусть $T(l_1,...,l_k)$ — оценка для функции $\Theta = \varphi(\Theta_1,\Theta_2,...)$

Теорема. Если оценка $T(l_1,...,j_k)$ состоятельна по Фишеру, т. е. $T(p_1,...,p_k) \equiv \Theta$, и имеет непрерывные частные производные, и если $\varphi(\Theta_1, \Theta_2,...)$ и p_i как функции $\Theta_1, \Theta_2,...$ имеют частные производные, то $T(l_1,...,l_k)$ имеет асимптотически нормальное распределение с дисперсией $D(T)$, удовлетворяющей неравенству

$$D(T) \geqslant \sum_{r,s} I^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta_r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta_s},$$

где (I^{rs}) — матрица, обратная информационной матрице Фишера (I_{rs}). В. В. Петров

8020. Приближенные вычисления в дисперсионном анализе, избегающие возведения в квадрат, применительно к оценке полевых опытов в плане блоков. Шваб (A varianciaanalizis megközelítése négyzetreemelés nélkül különös tekintettel blokkelrendezésü szántóföldi kísérletek értékelésére. Sváb János), Növénytermelés, 1957, **6**, № 1, 77—90 (венг.; рез. русск., англ., нем.)

Статья указывает математическую процедуру, позволяющую без возведения в квадрат аппроксимировать значение s_d и F-критерий, получаемые в дисперсионном анализе. Этот способ основан на хорошо известном отношении, равным $\frac{\pi}{2}$, между стандартным отклонением и средним отклонением. Указанная форма процедуры может применяться только при двухсторонней классификации.

Выполнение расчета иллюстрируется на примере и излагается его математическое обоснование.

Из резюме автора

8021. Логическая структура методов и показателей теории корреляции, изложенная в векторном отображении. Четвериков Н. С., Уч. зап. по статист., 1957, **3**, 325—347

Задачей статьи является «более твердое обоснование и уточнение логических схем, лежащих в основании показателей корреляционных связей, а векторная алгебра привлекается как посредница между существующими и могущими народиться показателями корреляции в их математической формулировке, с одной стороны, и лежащими в их основании логическими конструкциями, — с другой». Статья содержит три очерка: 1. Изоморфизм статистической логики и векторной алгебры. 2. Логика показателей корреляции в векторном отображении. 3. Корреляционное отношение в векторном отображении. В первых двух очерках затрагиваются лишь основные типы коэффициентов корреляции, в третьем рассмотрены некоторые вопросы о корреляционных отношениях. По резюме автора

8022. Информационная мера корреляции. Линфут (An informational measure of correlation. Linfoot E. H.), Inform. and Control, 1957, **1**, № 1, 85—89 (англ.)

Обсуждение информационного смысла выражения

$$r_0 = \iint \{p(x, y) \log p(x,y) - p(x) \log [p(x) q(y)]\} dxdy,$$

где $p(x,y)$ $p(x)$ и $q(y)$ —плотности распределения вероятностей соответственно пары (ξ,η), ξ и η. В случае, когда $p(x,y)$ нормальна, найдено, что

$$M\xi\eta = \sqrt{1+e^{-r_0}}.$$

Б. С. Цыбаков

8023. Дальнейшие свойства углового преобразования коэффициента корреляции. Харли (Further properties of an angular transformation of the correlation coefficient. Harley B. I.), Biometrika, 1957, **44**, № 1—2, 273—275 (англ.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1958,2248) обсуждались свойства преобразования $y = \arcsin r$, где r — коэффициент корреляции в выборке объема n из нормальной двумерной генеральной совокупности с коэффициентом корреляции ρ, и было показано, что если $E_n(\arcsin r)$ означает математическое ожидание $\arcsin r$, то

$$E_n(\arcsin r) = \arcsin \rho \qquad (1)$$

для всех значений n. Это было доказано непосредственно только для четных значений n, но рассматривая распределение $r/(1-r^2)^{1/2}$ можно непосредственно получить альтернативное доказательство (1) для нечет-

ных значений n. Результаты наводят на мысль, что распределение $r/(1-r^2)^{1/2}$ подобно нецентральному t-распределению; и это исследовано в другой статье (РЖМат, 1958, 6012). По резюме автора

8024. **Точный критерий для корреляции между двумя временными рядами. Ханнан** (An exact test for correlation between time series. Hannan E. J.), Biometrika, 1955, **42**, № 3—4, 316—326 (англ.)

Сравниваются посредством относительной асимптотической эффективности (РЖМат, 1956, 5393) различные статистики для оценки корреляции между двумя временными рядами x_t, y_t в случае, когда: 1) $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$, где остаток ε_t не зависит от x_t и является гауссовским марковским процессом, 2) x_t, y_t — марковские процессы, остатки которых коррелированы, 3) усложнение случая 2), когда x_t — процесс авторегрессии второго порядка. Б. А. Севастьянов

8025. **Приближенные моменты для серийного коэффициента корреляции. Уайт** (Approximate moments for the serial correlation coefficient. White John S), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 3, 798—802 (англ.)

Как и в работе Кендалла (РЖМат, 1958, 6985), получены формулы для вычисления моментов $E(r^k)$ распределения Лейпника в виде полиномов степени k по ρ. Хотя окончательные формулы, полученные двумя авторами, по существу одинаковы, пути их расчета различны. Из формул вытекает, что $\lim_{N\to\infty} E(r^k) = \rho^k$ для всех k (N — объем выборки), а также известный факт об асимптотической нормальности r. А. П. Хусу

8026. **Совместное распределение коэффициентов круговой серийной корреляции. Уотсон** (On the joint distribution of the circular serial correlation coefficients. Watson G. S.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 161—168 (англ.)

Кенуй (Quenouille M. H., Ann. Math., 1949, **20**, 561—571) применил метод Купманса (Anderson R. L., Ann. Math. Statist., 1942, **13**, 1—13) к проблеме нахождения точного совместного распределения серийных коэффициентов корреляции в нулевом случае. Схема Мэдоу (Madow W. G., Ann. Math. Statist., 1945, **16**, 308—310) была использована для вывода ненулевой совместной функции плотности. Для нечетных объемов выборок он дал явную формулу для точной функции плотности. Так как непосредственное сглаживание этой функции очень трудно, Кенуй предложил сглаженное приближение точной плотности и привел в его пользу разные аргументы, касающиеся ожидаемого вида результата. Дженкинс, применяя метод Диксона, нашел сглаженную плотность для первых двух коэффициентов серийной корреляции, которая — в отличие от плотности, данной Кенуйем — имеет точные моменты до n-го включительно. Эти сглаженные плотности вычислены без исправления среднего.

В § 2 обобщается метод Дж. Неймана для получения интегральных уравнений для совместной плотности серийных корреляций. Из этих уравнений легко получается связь между нулевой и ненулевой плотностями. В § 3 вычисляется точная плотность для круговых серийных корреляций при любом объеме выборки и дается более полное обсуждение интересного правила суммирования. В § 4 делается попытка вычисления приближенной нулевой плотности, когда исправления среднего сделаны по новому методу сглаживания. Она лишь незначительно отличается от функции, данной Кенуйем, и имеет те же слабые места. Резюме автора

8027. **Таблицы значений математического ожидания коэффициента корреляции для выборок из нормальной совокупности (статья 3). Диковская Э. И., Султанова Ж. С.**, Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 75—85

Предыдущие части см. РЖМат, 1957, 2540, 2541.

Приведена таблица значений математического ожидания эмпирического коэффициента корреляции в выборках из нормальной совокупности:

$$\frac{2}{s-1}\,\frac{\Gamma^2(s/2)}{\Gamma^2((s-1)/2)}\,r\cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{s+1}{2};r^2\right)$$

(F — знак гипергеометрической функции) для объемов выборки s от 2 до 400 и значений r от 0,01 до 0,09. А. А. Петров

8028. **Таблица значений математического ожидания коэффициента корреляции для выборок из нормальной совокупности (статья 5). Диковская Э. И., Султанова М. С.**, Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 20, 47—51

Продолжение работ (РЖМат, 1957, 2540, 2541, 3336, реф. 8027), в которых были составлены таблицы для значений математического ожидания эмпирического коэффициента корреляции

$$R=\frac{2}{S-1}\,\frac{\Gamma^2(S/2)}{\Gamma^2((S-1)/2)}\,r\cdot F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{S+1}{2};r_2\right),$$

когда объем выборок $S=\overline{2,400}$, а $r=\overline{0,01;\ 0,09}$; $r=\overline{0,1;\ 09}$ и $S=\overline{5,400}$ для $r=\overline{0,91;\ 0,99}$, причем объемы от 2 до 50 давались подряд, от 50 до 100 — через 5, от 100 до 200 — через 10 и от 200 до 400 — через 20.

В данной работе мы приводим таблицы значений, когда объем выборок

$S=\overline{400;500}$, а $r=\overline{0,01;0,09}$, $r=\overline{0,1;0,9}$ и $r=\overline{0,91;0,99}$

объемы здесь даются через 20. Из резюме авторов

8029. **Обобщение доверительных интервалов для функции регрессии. Кроу** (Generality of confidence intervals for a regression function. Crow Edwin L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 271, 850—853 (англ.)

При получении доверительного интервала для ординаты линии (поверхности) регрессии обычно предполагается, что независимой переменной приписываются определенные значения, т. е. что в гипотетически повторяющейся выборке вероятности модуля величин x должны иметь такое же распределение, что и в выборке действительно наблюдаемой.

Пусть на основании случайной выборки $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$, полученной из двумерной генеральной совокупности (X, Y) мы теоретически рассчитали при фиксированных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ доверительный интервал с доверительным коэффициентом γ для ординат линии регрессии, соответствующих заранее данной величине X. Отсюда следует, что при гипотетически бесконечно повторяемой выборке, для каждой выборки $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n)$, взятой из генеральной совокупности при условии $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, коэффициент доверия для соответствующих доверительных интервалов, охватывающих истинную линию регрессии, есть γ, но это справедливо для всех x_i, отсюда вероятность того, что доверительный интервал охватывает истинную линию регрессии для любого x_i, выражается равенством

$$\int\!\!\int\!\!\cdots\!\int \gamma\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \gamma,$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть плотность вероятности n-мерной случайной величины X.

Другими словами, автор утверждает, что доверительный интервал, вычисленный для фиксированной величины X, есть доверительный интервал с тем же доверительным коэффициентом для произвольной величины X.

Доказательство, как видно, состоит в усреднении доверительного коэффициента по распределению всевозможных значений x размерности n.

Дается обзор 12 авторов по этому вопросу.

А. Г. Корман

8030. **Об определении коэффициента регрессии. Винце** (A regressziós együttható meghatározása adott alappontok esetén. Vincze I.), Alkalmazott mat. intéz. közl., 1952, **1**, 215—237 (венг.)

Между переменными x и y существует линейная связь: $y = Rx + Q$. Для определения констант R и Q производим N измерений при фиксированных значениях x: $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Спрашивается, как подразделять N измерений между точками a_i, чтобы дисперсия эмпирического коэффициента регрессии была минимальна. Полагается, что a_i — точные значения, т. е. неслучайные величины; далее, величины y, измеренные в точках a_i, имеют тождественные распределения, но их дисперсия $\sigma(a_i)$ зависит от точки a_i.

Доказывается, что при этих условиях достаточно определить прямую регрессии на основе измерений, исполненных в двух или не более трех точках из s точек a_i. Для определения экстремальных двух и трех точек, т. е. для выбора a_i и разделения числа измерений между точками, указывается определенный прием.

Если σ_i — константа ($i = 1, 2, \ldots$), то мы всегда должны исполнять измерения в двух точках — именно в двух краевых точках a_i, — разделяя число измерений в равной пропорции.

Ав.ор занимается тоже модифицированным определением коэффициента регрессии, при котором задача экстремума трактуется проще и приводит к более простому результату, хотя не безусловно лучшему.

Резюме автора

8031. **Оценка коэффициентов линейной регрессии во временных рядах (заметка об обобщении метода минимального расстояния). Минэ** (Estimation of linear regression coefficients in time series. (A note on the generalization of minimum distance method.). Mine Akiko. Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1955, **6**, 181—189) (англ.)

8032 К. **Математика для экономистов (Элементы анализа бесконечно малых, теории вероятностей и математической статистики). Боярский А. Я.**, М., Госстатиздат, 1957, 367 стр., илл., 8 р. 25 к.

Содержание книги отображено в ее подзаголовке. Каждое новое понятие поясняется на примерах из экономики. В различных местах книги много ссылок на произведения классиков марксизма-ленинизма, в частности на «Капитал» Маркса. Б. А. Севастьянов

8033 К. **Элементы математической статистики. Ионеску** (Elemente de statistică matematică. Ionescu Haralambie M. Bucuresti, Ed. stiintifică, 1957, 312 p., 7 lei), Bibliogr. RPR, 1957, **6**, № 18, 632 (рум.)

8034 К. **Сборник элементарных задач по статистике с подробными решениями. Хемелрейк, Вабеке** (Elementaire statistische opgaven met uitgewerkte oplossingen. Hemelrijk J., Wabeke Daraline. Gorinchem, J. Noorduijn en zoon N. V., 1957, 154 blz., ill.) (гол.)

Сборник задач по математической статистике и ее приложениям, предназначенный для студентов высших учебных заведений. Большинство задач дано с подробными решениями. В начале книги даны некоторые теоретические сведения по статистике. М. К. Керимов

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

8035. **Игра Банаха—Мазура и теория Банаха о категориях. Окстоби** (The Banach—Mazur game and Banach category theorem. Oxtoby John C.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 159—163 (англ.)

Дано обобщение игры Банаха—Мазура на произвольное топологическое пространство. Устанавливается критерий выигрыша, из которого следует теорема Банаха о категориях множества. Л. И. Горьков

8036. **Редуцированные стратегии для игр в обобщенной форме. Воробьев Н. Н.**, Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 5, 855—857

Заметка представляет сообщение о трех теоремах, касающихся игр в обобщенной форме (позиционных). Последняя из этих теорем является основной и относится к изучению некоторого вида памяти игроков — упорядочивающей памяти; она распространяет результат Куна (РЖМат, 1954, 2672) о стратегиях поведения в его достаточной части на этот более общий случай памяти. Доказательства не приведены.

Н. М. Митрофанова

8037. **Изучение простых игр с помощью экспериментов на счетных машинах. Уолден** (A study of simple games through experiments on computing machines. Walden W.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 201—211 (англ.)

Пусть E — множество двоичных последовательностей длины n; W — подмножество E. Первый игрок выбирает α_1 (0 или 1), второй — α_2 и т. д., до тех пор пока не получается $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in W$, то первый игрок выигрывает единицу. Для игр с 8 и 10 ходами получены с помощью экспериментов на счетной машине приближенные вероятности выигрыша первого игрока в зависимости от W при различных уровнях умения игроков и при условии, что первый игрок знает стратегию второго. С. С. Кислицын

8038. **Решение с помощью метода аналогии обобщенной задачи о перевозках с частным приложением к размещению товаров. Бринк, Кани** (An analogue solution of the generalized transportation problem with specific appalication to marketing location. Brink Edward L., Cani John S. de), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 122—136 (англ.)

Проблема размещения и снабжения m пунктов распределения, обслуживающих n рынков, спрос которых I_i известен, сводится к задаче подбора векторов в пространстве цен $y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jr})$, $j = 1, \ldots, m$

и чисел t_{ij}, $i = 1, \ldots n$; $j = 1, \ldots, m$, $\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = T_i$,

минимизирующих функцию цены:

$$c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_{ij} |x_i - y_j|.$$

Строится итеративный метод решения задачи. Метод электрической аналогии, следующий итеративному методу решения, основан на соответствии между пространством цен и некоторым скалярным электростатическим полем. О. Г Фаянс

8039. **Проблема распределения пустых товарных вагонов. Фини** (The empty boxcar distribution problem. Feeney George J.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 255—268 (англ.)

Проблема экономического распределения пустых товарных вагонов в некоторой железнодорожной сети

сводится к задаче нахождения программы $\mathbf{X} = (x_i)$, минимизирующей выражение

$$\min_x M = \int_{t=0}^{\infty} e^{-at} \left\{ \sum_k \overline{C}_k \left[I_k(0) - L_k(t + \alpha_{L_k}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \overline{U}_k(t - \alpha_{U_k}) + \sum_i \gamma_{ik}(t)\, x_i \right] + \sum_i \beta_i(t)\, x_i \right\} dt,$$

при условии $0 \leqslant e_i \leqslant x_i \leqslant u_i$. Здесь $\overline{C}_{(s)} > 0$, $\dfrac{d^2\overline{C}}{ds_2} > 0$.

Указывается на возможность итеративного метода решения задачи путем изменения только одной составляющей x_i вектора $\mathbf{X}$ при каждом шаге, причем сходимость последовательности должна следовать из условия $\overline{C}''(s) > 0$. О. Г. Фаянс

8040. Решение задач программирования по аналогии. Аблоу (An analog solution of programming problems. Ablow C. M. Brigham-Georges. J. Operat. Res. Soc. Amer., 1955, 3, 388—394) (англ.)

8041. Математическое программирование и распределение рабочих. Каруш, Важоньи (Mathematical programming and employment scheduling. Karush W., Vazsonyi A.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, **4**, № 4, 297—320 (англ.)

Приведен алгорифм для решения задачи о минимизации $C(x_0, x_1, \ldots x_N) = \sum_{i=0}^{N} F_i(x_i) + \sum_{i=1}^{N} H(x_i - x_{i-1})$,

где $H(\Delta) = \max(\alpha\Delta, -\beta\Delta)$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$, $F_i(x)$ — полумонотонная непрерывная функция и $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$ (функция называется полумонотонной на (a, b), если существует такое m $(a \leqslant m \leqslant b)$, что $F(x)$ убывает на $a \leqslant x \leqslant m$, $F(x)$ возрастает на $m \leqslant x \leqslant b$).

Приведена экономическая интерпретация.

Л. И. Горьков

8042. Применение линейного программирования в анализе экономических изменений в сельском хозяйстве. Фэрис, Мак-Ферсон (Application of linear programming in an analysis of economic changes in farming. Faris J. E., McPherson W. W.), Rev. Econ. and Statist., 1957, **39**, № 4, 421—434 (англ.)

8043. Линейное программирование. Эйземан (Linear programming. Eisemann Kurt), Quart. Appl. Math., 1955, **13**, № 3, 209—232 (англ.)

Перечислен ряд вопросов, возникающих в экономике, которые могут быть решены с помощью линейного программирования. Подробнее рассмотрены транспортная задача и задача о смесях. Дано описание симплекс-метода и его модификации. И. Л. Канторович

8044. Что такое линейное программирование? Манайра (Che cos'è la programmazione lineare? Manaira Mario), Riv. mecc., 1957, **8**, № 154, 17—21; № 156, 9—15; № 159, 43—48; № 165, 19—27 (итал.)

Начало см. РЖМат, 1957, 8106; 1958, 2277.

8045. Методы расчета линейных программ. Кауфман (Méthodes de calcul des programmes linéaires. Kaufmann A.), Automatisme, 1957, **2**, № 12, 462—469 (франц.)

8046. Многократные действия. Савидж (Cycling. Savage I. Richard), Naval Res. Logist. Quart., 1956, **3**, № 3, 163—175 (англ.)

Рассматриваются некоторые конкретные задачи динамического программирования, называемые автором задачами о замене, о вложениях, о производстве и о готовности.

Задача о замене состоит в отыскании последовательности интервалов времени $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ между заменами оборудования, минимизирующей среднее значение полных затрат $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (A + F(x_i))}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$, где A — постоянная затрата на замену и $F(x_i)$ — потери от использования старого оборудования. Аналогичный характер имеют остальные задачи. В них также требуется минимизировать среднюю величину полных затрат, складывающуюся из затрат по проведению последовательности мероприятий (иногда различных) и потерь от задержки в их осуществлении. А. А. Иванов

8047. Аналог вложения оборудования. Феттер, Гудман (An equipment-investment analog. Fetter Robert B., Goodman Thomas P.), Operat. Res., 1957, **5**, № 5, 657—669 (англ.)

Исследуется полученная с помощью электронной вычислительной машины зависимость минимизируемой стоимости замещения оборудования от времени, выражаемая формулой

$$C' = \left[B\left(1 - e^{-(1+k)T}\right) - \frac{GT}{i}\left(e^{-iT}\right) \right] \frac{1}{1 - e^{-iT}}$$

Анализируется влияние всех входящих в задачу параметров. О. Г. Фаянс

8048. Алгебраическая модель помогает решать вопрос о замене инструмента на станке. Варнум (Algebraic model helps make decisions on machine tool replacement. Varnum Edward C.), Tooling and Product., 1957, **23**, № 9, 77—83 (англ.)

8049. Исследование операций в Институте технологии Кейса. Арнов (Operations research at Case Institute of Technology. Arnoff E. Leonard), Operat. Res., 1957, **5**, № 2, 289—292 (англ.)

Описывается структура научной и учебной работы по исследованию операций в Институте технологии Кейса.

Отмечаются следующие стороны этой деятельности: 1) годичные циклы лекций для студентов по теории управления; 2) циклы лекций по исследованию операций для лиц, готовящихся к научной деятельности в этой области; 3) краткосрочные циклы лекций по общему ознакомлению с исследованием операций; 4) тренировка студентов и практиков в проведении исследования операций; 5) исследовательская работа в основных областях исследования операций; 6) информационная и популяризационная деятельность (ежегодные конференции, издание трудов конференций и другие публикации). А. А. Иванов

8050. Программирование выпуска продукции. Мак-Гарра (Production programming. McGarrah R. E.), J. Industr. Engng, 1956, **7**, № 6, 263—271 (англ.)

Рассматривается задача о выборе оптимального решения по увеличению или уменьшению объема выпускаемой продукции, вызываемому увеличением или уменьшением спроса.

В первой части анализируется структура потерь перехода на новую программу выпуска и их количественные характеристики. Во второй части дается метод отыскания совокупности мероприятий по переходу с минимальными потерями на новую программу, основанный на решении соответствующей задачи линейного программирования. А. А. Иванов

8051. Исследование операций. Туэри (Operations research. Twery Raymond), J. Mach. Account., 1957, 8, № 10, 141—145 (англ.)

8052. Исследование операций и планирование систем сообщения. Хигдон (Operations research and communications systems planning. Higdon Robert V.), IRE Trans. Communs Systems, 1957, 5, № 3, 20—28 (англ.)

8053. Современное состояние исследования операций в Италии. Брамбилла (The present state of operations research in Italy. Brambilla Francesco), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 436—439 (англ.)

8054. Применение теории игр к вопросам управления. Шубик (The uses of game theory in management science. Shubik Martin. Management Sci., 1955, 2, 40—54) (англ.)

8055. Производственно-хозяйственное применение современных вычислительных устройств. Пихлер (Betriebswirtschaftliche Anwendungs-gebiete für moderne Rechenanlagen. Pichler O.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 5—13 (нем.)

8056. Роль исследования операций в организации принятия решений. Эйбрамс Дж. (The role of operational research in a decision-making organization. Abrams John W.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 40—47 (англ.)

Проводятся рассуждения о количестве необходимых сведений об исследуемой области и из области математики для успешного решения задач. О. Г. Фаянс

8057. Договорная деятельность. Мак-Кензи (Contractor performance. MacKenzie D. C.), Naval Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 1—2, 17—23 (англ.)

Излагаются соображения общего характера относительно возможных причин невыполнения сроков поставок по договорам и методов устранения подобных нарушений договорных обязательств. А. А. Иванов

8058. Повышение общественного интереса к журналу. Мер (Promoting the public's interest in a magazine. Meer B. van der), Papers Internat. Conf. Operat. Bristol, Stonebridge Press, 1957, 403 (англ.)

Указывается на связь между интересом к политическому журналу и социальным, экономическим и т. п. положением населения рассматриваемого административного района. О. Г. Фаянс

8059. Замечание о проблемах сглаживания. Антосевич, Гофман (A remark on the smoothing problem. Antosiewicz H., Hoffman A. Management Sci., 1954, 1, 92—95) (англ.)

8060. Эмпирический вывод древовидной полезности. Строц (The empirical implications of a utility tree. Strotz Robert H.), Econometrica, 1957, 25, № 2, 269—280 (англ.)

Под древовидной полезностью понимается функция

$$U = U\,[V^A(q_{a_1}, \ldots, q_{a_\alpha}), V^B(q_{b_1}, \ldots, q_{b_\beta}), \ldots$$
$$\ldots, V^M(q_{m_1}, \ldots, q_{m_\mu})],$$

где

$$\frac{\partial^2 V^I}{\partial q_i\, \partial q_j} = 0, \qquad I = A, B, \ldots, M;$$

q_i, q_j принадлежат различным группам переменных. Максимизация U при бюджетном ограничении $\sum_n P_n q_n = Y$ (P_l — значения цены) определяет поверхности спроса. Установлен ряд свойств коэффициентов уравнений гиперплоскостей, касательных к этим поверхностям; вводятся вспомогательные величины, полезные для задачи первоначального распределения бюджета по группам $A, B, \ldots, M$. С. С. Кислицын

8061. Математический анализ марксистской теории о воспроизводстве. (II). Об условиях подъема быстрым темпом производства. Хэ Цзо-сю, Ло Цзин-бо, Лисюэ сюэбао, Chinese J. Mech., 1957, 1, № 2, 184—192 (кит.; рез. русск.)

I ч. см. РЖМат, 1958, 7012. Рассматривается вопрос о том, как можно быстрым темпом увеличить стоимость совокупного общественного продукта или общую стоимость предметов потребления. Доказывается, что в условиях расширенного воспроизводства, продолжающегося как за определенный период времени, так и в течение бесконечно многих лет, сумма общей стоимости общественного продукта, или сумма общей стоимости предметов потребления была максимальной, необходимо развивать в первые несколько лет производство первого подразделения с максимальным темпом, и лишь после этого ускорить развитие производства второго подразделения. Резюме авторов

8062. О раздвоенной экономике. Керубино (Sulle economie bipartite. Cherubino Salvatore), Giorn. econ. e ann. econ., 1957, 16, № 3-4, 162—173 (итал.)

Изучаются некоторые арифметические соотношения, касающиеся экономических систем, в которых деятельность производителей разделена на два сектора. Некоторые из этих соотношений аналогичны отношениям и понятиям, введенным Вольтерра при изучении двух биологических видов, живущих в одной и той же среде и питающихся или одной и той же пищей или друг другом (Volterra V., Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Paris, 1931). В § 1 рассматривается открытая система двух секторов производителей, в § 2 система включена в третий, первоначальный, сектор, который рассматривается как потребительный — рабочий сектор. Обе системы изучаются элементарными средствами, с точки зрения статистики; следовательно, результаты более или менее понятны априори. В § 3, посвященном динамической экономике, доказывается, что, кроме очень частных случаев, коэффициенты обмена относительно первоначального сектора не могут быть сохранены постоянными даже в столь малых промежутках времени, в которых коэффициенты обмена практически постоянны для открытой системы. Это замечание имеет силу для экономических систем с любым числом ($\geqslant 2$) секторов. Из резюме автора

8063. Проективное построение кривой спроса. Кутоло (Generazione proiettiva di una curva di domanda. Cutolo Italo), Industria (Ital.), 1957, № 1, 67—77 (итал.)

8064. Достаточное условие для увеличения. Нейссер (A sufficient condition for magnification. Neisser Hans), Rev. Econ. and Statist., 1957, 39, № 4, 468—469 (англ.)

8065. Сущность переменного экономического капитала. Бруно (Costituzione di un capitale a valore economico variabile. Bruno Angelo), Riv. polit. econ., 1957, 47, № 6, 394—405 (итал.)

8066. К вопросу об изучении распределения богатств. Д'Аддарио (Contributo allo studio della ripartizione della ricchezza. D'Addario Raffaele), Industria (Ital.), 1957, № 2, 247—255 (итал.)

8067. К вопросу об изучении теории международных цен. Паломба (Contributo allo studio della teoria dei valori internazionali. Palomba Giuseppe), Industria (Ital.), 1957, № 2, 232—246 (итал.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

8068. Европейская организация контроля качества и ее первое годовое собрание в Париже. Штанге (Die EOQC (European Organisation for Quality Control) und ihre erste Jahrestagung in Paris vom 1. bis 4. Juli 1957. Stange Kurt), Allgem. statist. Arch., 1957, **41**, № 2, 168—170 (нем.)

8069. Совещание Академии РНР по вопросу о применении теории вероятностей и математической статистики в промышленности (Consfatuirea Academiei R. P. R. privind aplicarea calculului probabilitatilor si statisticii matematice în industrie), An. Acad. RPR, 1955, **5**, № 1, 191—198 (рум.)

8070. Необходимое и достаточное условие для представления некоторой матрицы в виде произведения матриц. Гатман (A necessary and sufficient formula for matric factoring. Gattman Louis), Psychometrika, 1957, **22**, № 1, 79—81 (англ.)

Решается следующая задача: Пусть A — произвольная матрица порядка pxq ранга r. Требуется выделить из A такие матрицы A_1, A_2, B, D и C, чтобы имели место равенства

$$A_1 = BDC, \tag{1}$$

$$A_2 = A - A_1, \tag{2}$$

причем $r(A_1) = s$, $(s \leqslant r)$, $r(A_2) = r - s$, $r(B) = r(C) = s$, B, C, D — матрицы порядка pxs, sxq и s соответственно, кроме того, D — неособенная.

Дается необходимое и достаточное условие одновременного выполнения (1) и (2). Указывается область применимости данной задачи. М. К. Камалов

8071. О проблеме оценок в модели Леонтьева. Бригс (On problems of estimation in Leontief models. Briggs F. E. A.), Econometrica, 1957, **25**, № 3, 444—455 (англ.)

Рассматриваются проблема статистических оценок параметров Леонтьева и другие линейные модели. Рассуждения основаны на предположении, что в таких взаимозависимых моделях можно рассматривать одну переменную с бо́льшим или меньшим правом как внешнюю (подлежащую исключению) и что случайные ошибки могут быть эффективным образом описаны с помощью нормального распределения вероятностей.

Утверждается, что в некоторых обстоятельствах непосредственное применение метода оценки по принципу наименьших квадратов к таким моделям вызывают большие смещения и недооценку случайного отклонения. Кроме того, эти результаты тем больше отличаются от оценок наибольшего правдоподобия, чем больше степень взаимосвязи и чем значительнее остаточное отклонение в моделях.

Анализ основан на некоторых результатах, в частности из теории моделей Леонтьева и методов оценки одновременных уравнений и вообще из теории статистических оценок и регрессии. Резюме автора

8072. О выборочной проверке. Тагути Гэнъити, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, **8**, № 11, 771—774 (японск.)

8073. Приложение выборочных испытаний при отчете. Волф (The application of sample testing in auditing. Wolff P. de), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 396—398 (англ.)

8074. Метод разделения в анализе временных рядов. Рудра (A method of discrimination in time series analysis. Rudra A. A.), Санкия, Indian J. Statist., 1955 **15**, 9—34 (англ.)

8075. Исскуственное изображение систем. Моррис (Pencil and paper simulation of systems. Morris William T.), News Engng, 1957, **29**, № 4, 10—14 (англ.)

8076. Приложение теории цепей Маркова к контролю партий. Кордонский Х. Б., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 75—78

Рассмотрена схема контроля, представляющего систему k фаз, причем первой фазе ω_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ отвечает объем выборки и допустимое число c_j дефектов в выборке. Переход от одной фазы к другой совершается в зависимости от результатов приемки предшествующей партии. Одна форма подобного контроля рассмотрена в работе автора (РЖМат, 1957, 5040).

И. В. Смирнов

8077. Выборочный метод в контроле качества, учитывающем ошибки, сделанные контролерами. Одерфельд, Висневский (Odbiór statystycznyz uwzglednieniem bledów kontrolera. Oderfeld J., Wiśniewski K.), Zastosow. Mat., 1955, **2**, № 3, 312—327 (польск.)

Работа состоит из двух частей. Первая, написанная Висневским, имеет дело только с теорией приемочного контроля, принимающего во внимание ошибки проверки. Ошибка контроля может быть двух видов: или хороший кусок классифицируется как дефектный (ошибка первого рода), или дефектный кусок классифицируется как хороший (ошибка второго рода). На основании выполненных экспериментов автор дает очертание теории, учитывающей ошибки обоих родов. Условия, при которых выборочный прием лучше, чем стопроцентный прием, являются особенно интересными. По-видимому, выборочный план лучше, чем стопроцентная проверка, при условии, что $1/2 < \omega < p/(1+p+q)$, где ω обозначает процент дефекта, $1-p$ — вероятность ошибки второго ряда. Для определенного выборочного плана сформулированное выше условие, конечно, принимает (предполагает) различные формы.

Вторая часть работы, написанная Одерфельдом, дополняет первую часть исследованием эффекта ошибок контролера на харакеристику плана при выборе с возвращением (Висневский имеет дело с выбором без возвращения). W. Sadowski

8078. Статистические методы контроля качества и задачи Института прикладной математики в области введенеия этих методов. Винце (Az ipari minoségellenorzés statisztikai módszerei és az intézet feladatai e módszerek bevezetése terén. Vincze I.), Alkalmazott mat. intéz. közl, 1952, **1**, 239—249 (венг.)

Работа знакомит с простыми методами статистического контроля в течение производства и статистического контроля готового продукта; затем перечисляются задачи Института при введении этих методов в производстве. Для иллюстрации этих задач в работе приводится текст соцдоговора, заключенного между Институтом и автозаводом «Чепель» при введении статистических методов на автозаводе, и некоторые первые результаты, полученные при введении этих методов на телефонном заводе. Резюме автора

8079. Статистический контроль качества продукции. Руис-Пала (Control estadístico por atributos. Ruiz Palá Ernesto), Dyna, 1957, **32**, № 12, 766-769 (исп.)

8080. Анализ размерности в выборочном исследовании товаров. Дробот, Вармус (Analiza wymiarowa w badaniu wyrywkowym towarów. Drobot S., Warmus M.), Zastosow. mat., 1954, **2**, № 1, 1—33 (польск.; рез. русск., англ.)

См. РЖМат, 1957, 729.

8081. Исследование выбора планов простого отбора по их стоимости. Куртийо (Étude du choix des plans d'échantillonage simples d'après leurs conséquen-

ces pécuniaires. Courtillot M.), Rev. statist. appl., 1957, **5**, № 1; 43—56 (франц.)

Рассматривается задача рационального выбора плана исследования в зависимости от составляющих его издержек. Различаются два случая: а) общая стоимость плана независимо от поставляемого качества отражается на потребителе, б)начиная с некоторой доли дефектности, стоимость выборки начисляется на поставщика, а остальные элементы общей стоимости ложатся на потребителя. Ограничения экономического характера: общая средняя стоимость не должна превышать стоимости 100%-ного контроля и должна быть минимальной для среднего поставляемого качества.

Выписаны системы уравнений для отыскания параметров плана. Получено приближенное решение для случая, когда вероятность принятия партии можно считать подчиняющейся закону Пуассона. Дан пример.

А. П. Хусу

8082. Связь свойства продукта со свойствами исходного материала (Вопросы методологии построения эмпирической формулы этой связи). **Добычин В. П.**, Научно-исслед. тр. Центр. н.-и. ин-та луб. волокон, 1957, **11**, 52—105

«Основная задача настоящей работы — разработка методологии исследования связи свойства продукта со свойствами исходного материала с конечной целью построения эмпирической формулы этой связи и определения условий ее практического применения». Содержание статьи можно усмотреть из следующего оглавления: Введение; Общее о многофакторной зависимости; Теоретико-статистическая схема; Связь свойства продукта с одним свойством исходного материала; Связь свойства продукта с двумя и более свойствами исходного материала.

Н. В. Смирнов

8083. О некоторых методах приемки сырья. Горалек (O některých přejímacích způsobech surovin. Horálek Vratislav), Aplikace mat., 1957, **2**, № 5, 370—389 (чешск.; рез. русск., англ.)

Теоретический разбор трех методов приемки сырья.

А. О качестве принимаемой партии судят по выборке, случайно выбранной из партии.

Б. О качестве принимаемой партии судят по результату анализа усредненной выборки, полученной перемешиванием m случайно выбранных из партии выборок (одинакового веса или объема).

В. О качестве принимаемой партии судят по значению выборочного среднего значения результатов анализа n случайных выборок, причем каждая из них подвергается самостоятельному анализу.

Показано влияние ошибки анализа выборки (химического анализа и т. п.) на эффективность отдельных методов приемки. На основании сравнения соответствующих оперативных характеристик в случае, когда имеются ошибки анализа, и в случае, когда таких ошибок нет, выводятся заключения для обработки приемочных схем и соотношения между объемами выборок приемных планов Б и В. Решение дается при условии, что ошибки анализа не зависят от фактического значения наблюдаемого признака образца. О распределениях значений наблюдаемого признака в партии и о распределении ошибок анализа предполагается, что они являются нормальными со средними значениями μ и 0 и квадратическими отклонениями σ_y и σ_z соответственно. Производя приемку, считают значения σ_y и σ_z известными. Во всех случаях построение приемочных схем проводится на основании как допустимой, так и недопустимой доли качественно неудовлетворительного сырья в партии.

Далее решается вопрос ошибок первого и второго рода, возникающий при обсуждении обнаруженного и фактического значения образца по отношению к определенному наперед заданному значению. Конечное выражение соответствующих рисков дается известными табулированными функциями одномерного и двумерного нормального распределений.

Для практических целей будут составлены таблицы и номограммы, которые будут опубликованы позднее.

По резюме автора

8084. Заметки о трансцендентальной функции продукции. Холтер, Картер, Хоккинг (A note on the transcendental production function. Halter A. N., Carter H. O., Hocking J. G.), J. Farm Econ., 1957, **39**, № 4, 966—974 (англ.)

8085. Частота взятия проб при текущем контроле производственного процесса. Цихович (Crestoščpobierania próbek w kontroli biezacej procesu wytwórczeko. Cichowicz Andrzej), Pomiary, automat., kontrola, 1956, **2**, № 7, 275—278 (польск.)

Излагается способ (Cavé R. Microtecnic, 1952, № 2) установления частоты взятия проб в текущем контроле и предлагается метод определения объема пробы, учитывающий потери, вызываемые ошибочными заключениями контроля и стоимостью контроля.

Я. И. Лукомский

8086. Определение при помощи теорий вероятностей электрического энергопотребления и фактора одновременности, т. е. потребления заводов машиностроительной промышленности. Реньи, Сентмартони (Gépipari uzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejuségi, illetoleg szükségleti, tényezijének valószinuségszamitási meghatározása. Rényi A., Szentmártony T.), Alkalmazott mat. intéz. közl., 1952, **1**, 85—104 (венг.)

Эффективная мощность (затрата энергии в единицу времени) заводов машиностроительной промышленности не достигает своего теоретически возможного максимума (так называемой «встроенной» мощности), а колеблется под этим уровнем. Верхняя граница частного этих двух величин, вероятность которой имеет практическое значение, называется «фактором потребности» завода. В случае завода, использующего машины одинаковых мощностей, он упрощается на «фактор одновременности». Даны формулы, дающие для этих факторов пределы с уровнем вероятности 99,99%, вместо грубых эмпирических правил, бывших до сих пор, они выведены для случая n машин, действующих независимо друг от друга, при временной плотности вероятности включения λ_k и при среднем времени функционирования $1/\mu_k$ k-й машины, если $p_k = \lambda_k/(\lambda_k+\mu_k)$ степень эксплуатации этой машины, f_k — ее мощность в случае функционирования.

Работа содержит оценку и для наименьшего n, обеспечивающего применяемость формул, и дает связь между величинами t некоторого завода и его цехов.

Резюме автора

8087. Рациональный расчет компрессоров и воздушных резервуаров для снабжения заводов сжатым воздухом. Реньи (Kompresszorok és légtartályok racionális mézétezése uzemek surített levegovel valo ellatására. Rényi A.), Alkalmazott mat. intéz. közl., 1952, **1**, 105—138 (венг.)

Решение следующей задачи: на некотором заводе работает много машин, действующих со сжатым воздухом. Машины могут быть включены и выключены случайно. Сжатый воздух прибавляется компрессором, насыщающим резервуар; потребители получают сжатый воздух из резервуара. Если давление воздуха в резервуаре превысит некоторую границу γ_2, компрессор выключается автоматически и включается только тогда, когда давление понижается до некоторой границы γ_1. Наша задача: определить мощность компрессора так, чтобы давление в резервуаре практически никогда не понижалось ниже границы v_0, достаточной для обеспече-

ния бесперебойной работы машин. Проблема решается методами теории цепей Маркова. Результаты изображены графически так, как при данном потреблении и размере резервуара измерение компрессора отсчитывается без графика. Резюме автора

8088. Повреждения в поплиновых тканях и критерий знаков. Антер (Les rayures dans les tissus de popeline et le test des signes. Enters J. H.), Rev. statist. appl., 1957, **5**, № 3, 85—89 (франц.)

Перевод из ж-ла Sigma, 1955, № 1.

8089. Исчисление вероятностей. Ортлиб (Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ortlieb Ivar), Industr. Organis., 1957, **26**, № 11, 395—414 (нем.)

Для решения вопросов, возникающих при планировании операций крупных предприятий, применяется логарифмически-нормальное распределение.

А. К. Митропольский

8090. Частота несчастных случаев на производстве. Томиссен (The frequency of industrial accidents. Thomissen F. X.), Statist. neerl., 1956, **10**, № 3-4, 163—176 (англ.; рез. гол.)

Магуайр, Пирсон и Уинн (Maguire B. A., Pearson E. S., Wynn A. H. A., Biometrika, 1951, **39**, part I. II, April) ввели метод изучения распределения интервалов времени между несчастными случаями на производстве.

Применение этого метода предполагает одно, молчаливо подразумеваемое условие, именно постоянную рабочую силу в течение рассматриваемого периода. Однако так как временные ряды рабочей силы на производстве даже за короткие периоды показывают заметные изменения, очевидно, что это условие ухудшает результаты применения метода.

Настоящая статья имеет целью исключить этот дефект, развивая статистический метод для той же цели, но учитывающий изменения рабочей силы.

Введение статьи открывает поле деятельности для новых приложений. Теперь становится возможным или подвергнуть испытанию постоянство соотношения между временными интервалами и рабочей силой на различных фабриках, или подвергнуть испытанию постоянство этого соотношения на одной фабрике для различных периодов. Резюме автора

8091. Скорость увеличения выпуска продукции в зависимости от рабочей силы, рабочего времени и производительности труда. Бремс (Growth rates of output, labor force, hours, and productivity. Brems Hans), Rev. Econ. and Statist., 1957, **39**, № 4, 415—420 (англ.)

8092. Асимтотическое решение уравнения Томаса — Ферми. Иванов Т. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 20—21

Ищется решение уравнения $\varphi'' = \frac{\varphi^{1,5}}{x^{0,5}}$, определяющее плотность распределения электронов в атоме и удовлетворяющее краевым условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi^1(\infty) = 0$; оно находится в виде $\varphi = \frac{144}{x^3 z^4}$ причем для z получается разложение в ряд $s = 1 + a_1 x^{\alpha} + a_2 x^{2\alpha} + \ldots$, где $\alpha = -0{,}772$ для начальных условий имеем: $a_1 = 3\,316$, $a_2 = -0{,}03067$, $a_3 = 0{,}00831$, $a_4 = -0{,}00340$.

Решение оказывается полезным в статистической теории атомов в пределах применимости атомных моделей Томаса—Ферми. Н. В. Смирнов

8093. Математические основы теории переноса радиации. Прейзендорфер (A mathematical foundation for radiative transfer theory. Freisendorfer R. W.), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 6, 685—730 (англ.)

Аксиоматически вводятся понятия оптической среды множество X с σ-конечной неотрицательной мерой ν на σ-алгебре S его подмножеств; в физике X пятимерно: оно есть декартово произведение данной области трехмерного пространства E_3 на единичную сферу в E_3), лучистой энергии (значение радиационной меры $\mu(E)$, $E \in S$) радиационного процесса, интенсивности радиации (определяется через производную Радона — Никодима от радиационной меры μ) и переноса лучистой энергии (некоторое соответствие множества упорядоченных пар моментов времени множеству преобразований оптической среды в себя, сохраняющих меру). С помощью этих понятий определяются в абстрактной форме величины, аналогичные фигурирующим в уравнении переноса лучистой энергии (в изотропной среде и без учета поляризации), и выводятся уравнения, являющиеся абстрактными обобщениями уравнения Смолуховского и уравнения Колмогорова для вероятностей перехода, соответствующего переносу лучистой энергии марковского процесса. А. С. Монин

8094. Случайные функции каскадных процессов космического излучения. Гаррис (The random functions of cosmic-ray cascades. Harris T. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 6, 509—512 (англ.)

Фотон положительной энергии ε, двигаясь через однородный материал, с вероятностью λdt на интервале $(t, t+dt)$ превращается в электрон и позитрон, которые получают энергии соответственно $\varepsilon(1-u)$ и $\varepsilon u (0<u<1)$ с плотностью вероятности $q(u)$. Электрон (позитрон) теряет при столкновениях или ионизации энергию, равную βt в интервале длины t. λ и β независимы от величины интервала t и начальной энергии. С другой стороны, электрон и позитрон могут испускать фотон с энергией между εu и $\varepsilon(u+du)$ в интервале dt с вероятностью $k(u)du dt$. Вводятся следующие упрощенные предположения:

$$k(u) = \frac{\mu}{u} + k_0(u), \qquad \left|\frac{dk_0(u)}{du}\right| \leqslant c(1-u)^b,$$

где $0 \leqslant u < 1$, $b < 2$.

Описанный выше процесс превращения частиц является марковским процессом с двумя состояниями. Первая часть статьи посвящена случаю $\beta = 0$. В этом предположении энергии электронов (позитронов) рассматриваются как случайные функции, зависящие от t. Для них приводится ряд соотношений, которые вытекают из общей теории марковских процессов. Приводятся также уравнения для производящих функций. Во второй части статьи рассматриваются случайные функции энергий электронов (позитронов) для случая $\beta > 0$. Автор отмечает, что вследствие введенных упрощений полученные результаты нуждаются в подтверждении с помощью более тщательного аналитического исследования.

Ю. М. Барабошкин

8095. Оценка распределения скоростей с помощью подсчета числа частиц. Линдли (The estimation of velocity, distributions from counts. Lindley D. V.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954. Vol. 3. Groningen — Amsterdam, 1956, 427—444 (англ.)

Согласно известной теории вероятностного последействия М. Смолуховского (см., например, Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, М. Изд-во ин. лит., 1947, гл. III) при подсчетах через равные промежутки времени τ числа n_i движущихся частиц, находящихся в данный момент $t_l = t_0 + i\tau$ в заданной области A пространства (например, в поле зрения микроскопа) имеет место соотношение

$$\mathbf{M}[(n_{i+1} - n_i)^2] = 2\nu[1 - p(\tau)], \qquad (1)$$

где ν — среднее значение числа частиц в области A,

приближенно равное $\frac{1}{k}\sum_{k=0}^{k=1} n_l\ a\ p(\tau)$ — вероятность того, что частица, находящаяся в момент t в области A будет находиться в ней также и в момент $t+\tau$. Иначе этот результат может быть еще выражен так: случайные величины n_l образуют стационарную случайную последовательность со средним значением $\mathbf{M}n_l = \nu$, дисперсией $\mathbf{M}[(n_l-\nu)^2] = \nu$ и нормированной корреляционной функцией $\mathbf{M}[(n_l-\nu)(n_{l+k}-\nu)]/\nu^2 = p(k\tau)$. При выводе формулы (1) используется предположение о том, что число частиц в области A в любой момент времени подчиняется одному и тому же распределению Пуассона с параметром ν (поэтому и $\mathbf{M}n_l = \mathbf{M}[(n_l-\nu)^2] = \nu$).

На основе несколько более узкого, но столь же естественного, предположения подсчитывается характеристическая функция многомерного распределения вероятностей для нескольких величин n_l (явные формулы приводятся лишь для случая трех величин n_1, n_2 и n_3); эта функция зависит от величин $p(u, v, \ldots, w)$ — вероятностей нахождения частицы в области A в моменты t, $t+u$, $t+u+v, \ldots, t+u+v+\ldots+w$. Отсюда легко находятся явные выражения для моментов величин n_l. Показывается, что распределение вероятностей величин для нормированных $(n_l-\nu)/\nu^{1/2}$ при $\nu\to\infty$ стремится к нормальному распределению с нулевым средним значением, единичной дисперсией и корреляционной функцией $p(k\tau)$.

Изучается связь функции $p(\tau)$ с распределением вероятностей средних (за время τ) скоростей частиц. В предположении стационарности распределения частиц в пространстве, независимости их движения друг от друга и однородности свойств пространства, для случая одномерного движения и области A, являющейся интервалом длины a, доказывается простая формула:

$$p'(0) = -c/a, \qquad (2)$$

где штрих является символом правой производной, а c — средняя скорость частиц. Используя при малых τ приближенную формулу $p(\tau)\approx 1-\tau p'(0)$ и оценивая $p(\tau)$, исходя из формулы (1), можно получить отсюда и оценку средней скорости c; поскольку ν можно оценивать и исходя из формулы $\nu = \mathbf{M}n_l$ и исходя из формулы $\nu = \mathbf{M}[(n_l-\nu)^2]$, то удается получить даже сразу три внешне различных оценки этой величины. Для выяснения вопроса о точности этих оценок подсчитывается их дисперсия; здесь используются некоторые результаты Бартлетта (Bartlett M. C., J. Roy. Stat. Soc. Suppl., 1946, 8, 27—41), касающиеся дисперсии выборочных оценок корреляционной функции стационарной последовательности. Наиболее простые и наглядные результаты удается получить в предположении, что $k\gg 1$ (где k — число наблюденных величин n_l), $\tau\ll t_0$, но $k\tau\gg t_0$ (t_0 — время, начиная с которого значения функции $p(t)$ становятся очень малыми) и $\nu\gg 1$; в таком случае все введенные оценки величины c имеют примерно одну и ту же дисперсию, близкую к $2c^2/k$. К сожалению, предположение $\nu\gg 1$ сильно ограничивает применимость полученной формулы. Для получения обозримых результатов для более общего случая произвольного ν приходится ограничиться случаем «необращаемого» движения частиц, т. е. движения, при котором направление движения каждой отдельной частицы все время остается одним и тем же. В заключение более детально изучается частный случай «необращаемого» движения, при котором каждая частица сохраняет постоянным не только знак, но и величину своей скорости; рассматриваются некоторые специальные случаи распределения скоростей частиц и приводится сравнение с результатами Ротшильда (РЖБиол, 1953, 2235), полученными в связи с исследованием движения сперматзоидов А. М. Яглом

8096. О приложении функционального анализа к статической теории турбулентности. Хопф (On the application of functional calculus to the statistical theory of turbulence. Hopf Eberhard), Appl. Probability., New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., 1957, 41—50 (англ.)

Излагается метод описания поля скорости турбулентного потока в несжимаемой жидкости, предложенный в предыдущих работах автора. В качестве исчерпывающей характеристики поля скорости $u(x, t)$ используется характеристический функционал

$$\Phi(y, t) = \exp[i(u, y)],$$

где (u, y) обозначает интеграл повс ему пространству от скалярного произведения функций $u(x, t)$ и $y(x)$, а черточка означает интегрирование по вероятностной мере $P'(A)$ в фазовом пространстве функций $u(x)$. Используя вместо функционального аргумента $y(x)$ его трансформацию Фурье $z(k)$, где k — волновой вектор, из уравнений Навье—Стокса удается вывести для функционала $\Phi(z, t)$ следующее линейное уравнение в функциональных производных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mu L_1(\Phi) + L_2(\Phi);$$

$$L_1(\Phi) = \int k^2 z_\alpha(k)\frac{\partial\Phi}{\partial z_\alpha(k)\,dk}\,dk;$$

$$L_2(\Phi) = \int\frac{\partial}{\partial z_\beta(k')\,dk'}\left[\int\overline{z}_\alpha(k'+k'')\,k_\beta''\,\frac{\partial\Phi}{\partial z_\alpha(k'')\,dk''}\,dk''\right]dk',$$

где μ — коэффициент вязкости, $\overline{z}$ — компонента z, перпендикулярная k. В качестве возможных способов решения уравнения для Φ рассматриваются разложение в ряд Тэйлора $\Phi = 1+\Phi_2+\Phi_3+\ldots$ около точки $y=0$ или $z=0$, разложение в ряд Брунса—Шарлье $\Phi = e^{\Phi_2}(1+\Phi_3+\ldots)$ и разделение переменных вида $\Phi(z, t) = \Psi\left[\sqrt{f(k, t)}\,z(k)\right]$, где f — спектральная плотность энергии (в случае однородной изотропной турбулентности). Отмечается, что уравнение для Φ является частным видом уравнения Лиувилля для случая гидродинамики.

Подобно известным асимптотическим упрощениям средних значений в статистической механике очень большого числа частиц, можно ожидать, что при очень больших числах Рейнольдса функционал Φ должен принимать некоторый простой асимптотический вид. Отмечается также, что в случае жидкости, заполняющей бесконечное пространство, даже и при наличии вязкости, предположение о единственности фазовой троектории, выходящей из заданной точки, требует специального рассмотрения. А. С. Монин

8097. Приложение статистической аппроксимации к теории турбулентной диффузии. Робертс (On the application of a statistical approximation to the theory of turbulent diffusion. Roberts P. H.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 6, 781—799 (англ.)

8098. Сингулярность в спектре однородной тубулентности. Батчелор (The singularity in the spectrum of homogeneous turbulence. Batchelor G. K.), Appl. Probability. New York — Toronto — London, McGraw-Hill Book Co., 1957, 67—72 (англ.)

Анализируется вопрос о существовании старших производных спектрального тензора однородной турбулентности $\Phi_{ij}(k)$ в точке $k=0$ (что эквивалентно существованию сответствующих интегральных моментов корреляционной функции $R_{ij}(r)$. Поскольку давление определяется интегральным образом полем скорости в целом, поток, в котором скорость убывает экспоненциально с удалением от начала координат, может существовать лишь в фиксированный момент времени, в дальнейшем же действие сил давления приводит к степенному затуханию поля скорости на больших расстояниях, вследствие чего старшие моменты корреляционного тензора расходятся. В случае однородной турбулентности можно ожидать аналогичных результатов, так как расстояния, на которых еще выражена корреляция между значениями скорости, ограничены. Эти рассуждения подкрепляются расчетом, приводящим к следующей формуле для спектрального тензора в окрестности точки $k=0$:

$$\Phi_{ij}(k) = \frac{1}{4\pi^2} C_{pqmn}\left(\delta_{ip} - \frac{k_i k_p}{k^2}\right)\left(\delta_{iq} - \frac{k_i k_q}{k^2}\right) k_m k_n + \\ + O(k^3 \log k).$$

В соответствии с этим старшим из сходящихся моментов корреляционной функции является момент $\int r_k r_l R_{ij}(r)\,dr$, в случае изотропной турбулентности, сводящийся к так называемому инварианту Лойцянского. Утверждается, что расчеты указывают на неинвариантность этого момента с течением процесса вырождения изотропной турбулентности. Наконец, для заключительного периода вырождения указывается закон затухания энергии пропорционально $t^{-5/2}$.

А. С. Монин

8099. Кинетическое уравнение для примесей. Климов В. Н., Теория вероятностей и ее применения, 1957, **2**, № 2, 266—274 (рез. англ.)

Путем подсчета баланса частиц, движущихся в пространстве с различными скоростями $\mathbf{v}$ под воздействием силового поля, создающего ускорения $\mathbf{a}$, и подверженных актам рассеяния с частотой

$$\lambda_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \Gamma(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}')\,d\mathbf{v}'$$

и актам поглощения с частотой λ_c, для фазовой плотности n числа частиц выводится кинетическое уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} n + \cdot\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{v}} n + n\,\mathrm{div}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} + (\lambda_c + \lambda_s)\,n = \int \Gamma n'\,d\mathbf{v}' - q,$$

где q — плотность источников частиц. Индикатриса рассеяния Γ представляется в виде

$$\Gamma(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}') = N(t, \mathbf{r}) \int |\ \mathbf{v} - \mathbf{V}\ |\, \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{V}, \mathbf{v}')\, F(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})\,d\mathbf{V},$$

где $\mathbf{V}$ — скорость рассеивающей среды, N — плотность числа частиц среды, $\sigma\,d\mathbf{v}'$ — эффективное поперечное сечение рассеяния (изменения скорости с $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}'$), F — плотность вероятности для $\mathbf{V}$. Подсчитывается (в системе центра инерции) сечение упругого рассеяния, причем особо рассматриваются наиболее важные для кинетики примесей в плазме случаи рассеяния нейтронов на ядрах и рассеяния заряженных частиц. При некоторых упрощающих предположениях находится общее выражение для индикатрисы Γ (что требует пересчета σ к лабораторной системе отсчета), а затем конкретные выражения (при определенном виде функции распределения F) для нейтронов и заряженных частиц. Аналогично подсчитываются частоты поглощения и рассеяния.

А. С. Монин

8100. Двустороннее движение магнитной ленты и цифровое обращение потока данных телесчетчика для входа в цифровые вычислители. Даннал с (Magnetic tape playback and digital conversion of telemetered flight data for entry into digital computers. Dannals G. C.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, **5**, № 5, 31—36 (англ.)

8101. Теория передачи информации. Колмогоров (Theorie der Nachrichtenübermittlung. Kolmogoroff A. N.), Math.-Forschungsber., 1957, **4**, 91—116 (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1958, 2219).

8102. Математика, физика и информация. Бриллюэн (Mathematics, physics, and information. (An editorial). Brillouin L.), Inform. and Control, 1957, **1**, № 1, 1—5 (англ.)

Обсуждается приложимость математических теорем к физике и практике с точки зрения теории информации. Статья повторяет ряд положений книги автора «Science and information theory», Acad. Press, New York, 1956.

Б. С. Цыбаков

8103. О теории информации и метрических структурах. I. Ватанабэ (On the information theory and metric lattices. I. Watanabe Sigekatu. Rept Univ. Electro-Commun., 1953, **5**, 19—38) (японск.; рез. англ.)

8104. Связь между теорией последовательных фильтров и теорией информации и ее приложения к обнаружению сигнала в шуме при помощи испытаний Бернулли. Бласбалг (The relationship of sequential filter theory to information theory and its application to the detection of signals in noise by Bernoulli trials. Blasbalg Herman), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, **3**, № 2, 122—131 (англ.)

Пусть задана последовательность независимых величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ с общей функцией распределения $F(x, \Theta)$. Ставится задача различения гипотез $\Theta<\Theta_1$ и $\Theta>\Theta_2$ $(\Theta_1<\Theta_2)$. Предполагается, что при фиксированном x функция $F(x, \Theta)$ монотонна по Θ. Сравнивается среднее число испытаний, необходимое для различения этих гипотез с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода при обычном методе последовательного анализа, при последовательном анализе, примененном к величинам $\eta_i = f(\xi_i)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_0, \\ 1, & x > x_0, \end{cases}$$

а x_0 — выбрано оптимальным образом. Изучается зависимость этих средних чисел от неизвестного параметра Θ. Результаты применяются к задаче обнаружения слабого синусоидального сигнала на фоне гауссовского шума.

Р. Л. Добрушин

8105. К обнаружению случайного сигнала в аддитивном нормальном шуме. Ч. I. Мидлтон (On the detection of stochastic signals in additive normal noise. Part I. Middleton David), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, **3**, № 2, 86—121 (англ.)

Рассматривается задача оптимального обнаружения случайного сигнала на фоне шума. По данным наблюдения за время T требуется вынести одно из двух альтернативных решений: присутствует сигнал или нет. Сигнал и шум считаются стационарными гауссовскими независимыми процессами с нулевыми средними и с известными функциями корреляции $K_S(t, u)$ и $K_N(t, u)$. Сначала рассмотрен случай, когда используются значения наблюдаемых данных $V(t)$ только в дискретные моменты времени $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T$. Для вынесения решения о присутствии сигнала приме-

няется видоизмененный критерий Неймана—Пирсона, использующий отношение правдоподобия $\Lambda_n = pF_{S+N}(\overline{V})/qF_N(\overline{V})$. Здесь p — априорная вероятность присутствия сигнала; $q = 1 - p$, F_{S+N} — плотность вероятности вектора $(\overline{V}) = \{V(t_1) \ldots V(t_n)\}$ в том случае, когда $V(t)$ состоит из сигнала и шума, а F_N — соответствующая плотность для случая, когда $V(t)$ состоит из одного шума.

Для $\log \Lambda_n$ получено следующее выражение:

$$\log \Lambda_n = \log \frac{p}{q} - \frac{1}{2} \log \det (E - K_S K_N^{-1}) + \frac{1}{2} \overline{V}' C \overline{V},$$

где K_S и K_N — матрицы, составленные из элементов $K_S(t_i, t_j)$ и $K_N(t_i, t_j)$; $C = K_N^{-1} - (K_S + K_N)^{-1}$; E — единичная матрица; $\overline{V}'$ — вектор-строка, составленная из $V(t_1), \ldots, V(t_n)$ и $\overline{V}$ — вектор-столбец из этих же элементов.

В виде контурных интегралов записаны вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. В случае малого отношения сигнал/помеха для $\log \Lambda_n$ и вероятностей ошибок приведены более простые выражения. Далее автор совершает формальный переход к пределу, увеличивая безгранично число точек наблюдения. В результате для $\log \Lambda_n$ получается следующее предельное выражение

$$\log \Lambda_T \equiv \lim_{n \to \infty} \log \Lambda_n = \log \frac{p}{q} - \frac{1}{2} \log D_T + \frac{1}{2} \Phi_T [V(t)].$$

Здесь $D_T = \lim_{n \to \infty} \det (E - K_S K_N^{-1})$ — детерминант Фредгольма, а

$$\Phi_T [V(t)] = \frac{1}{\Psi_N} \int_{0-}^{T+} \int x(t) \zeta(u) K_N(t, u)\, dt du,$$

причем $x(t)$ и $\zeta(u)$ — решения пары интегральных уравнений:

$$V(t) = \int_{0-}^{T+} K_N(t, u) x(u)\, du;$$

$$\int_{0-}^{T+} K_S(t, u) x(u)\, du = \frac{1}{\Psi_N} \int_{0-}^{T+} [K_N(t, u) + K_S(t, u)] \zeta(u)\, du, \qquad (1)$$

Ψ_N — средняя мощность шума.

По замечанию автора, этот формальный переход к пределу нужно оправдывать в каждом конкретном случае. Вероятности ошибок даны в виде контурных интегралов, из которых при малом отношении сигнал/помеха получаются простые приближенные выражения. Детально рассмотрены 2 случая обнаружения сигнала в белом шуме, т. е. когда $K_N(t, u) = W \delta(t - u)$. В первом случае сигнал имеет спектральную плотность $f(\lambda) = A/(\alpha^2 + \lambda^2)$, а во втором случае $f(\lambda) = B\lambda^2/\lambda^2 + \beta^2(\lambda^2 - \lambda^2_0)^2$.

Примечание референта. В пространстве функций $V(t)$, определенных на отрезке $[0\ T]$, имеются 2 меры, соответствующие 2 гипотезам о присутствии сигнала. Предельное отношение правдоподобия Λ_T здесь является производной Радона—Никодима одной меры по другой. Интересно отметить, что эти меры могут быть взаимно сингулярны. Это соответствует случаю безошибочного обнаружения сигнала. Примером взаимной сингулярности мер, как легко показать, является случай одинаковых спектров сигнала и шума. Следует также отметить, что полученная формальным предельным переходом пара интегральных уравнений (1) не имеет решения в классе функций, имеющих конечное математическое ожидание квадрата. Однако, по-видимому, решение (1) может существовать в некоторых классах обобщенных случайных функций. В. Ф. Писаренко

8106. Квантование сигнала с аддитивным шумом. **Майерс** (Quantization of a signal plus random noise. Myers George H.), IRE Trans. Instrum., 1956, **PIG—5**, June, 181—186, 12 (англ.)

Сигнал $s(t)$ — случайный стационарный процесс — для каждого t равномерно распределен в промежутке $[-s_0, s_0]$. На передающем конце имеется квантующие устройство, которое сопоставляет значению $s(t)$ величину $\nu(t) \cdot \Delta$, где $\Delta > 0$ — фиксированная постоянная, а целое число $\nu(t) > 0$ выбирается из условия

$$\left(\nu(t) - \frac{1}{2}\right)\Delta \leqslant s(t) < \left(\nu(t) + \frac{1}{2}\right)\Delta.$$

Разбирается случай, когда к сигналу прибавляется шум $n(t)$ — случайный стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и дисперсией σ^2. При этом квантованию подвергается процесс

$$x(t) = s(t) + n(t), \qquad \left(\nu_1(t) - \frac{1}{2}\right)\Delta \leqslant x(t) < \left(\nu(t) + \frac{1}{2}\right)\Delta.$$

Ошибка при передаче определяется как $|\nu_1(t)\,\Delta - s(t)|$. При пренебрежении корреляцией вычисляется плотность распределения вероятностей величины ошибки $p(\omega)$

$$p(\omega) = \frac{1}{2\Delta}\left[\operatorname{erf}\left(\omega/\Delta + \frac{1}{2}\right) \Big/ \sigma/\Delta\sqrt{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\omega/\Delta - \frac{1}{2} \Big/ \frac{\sigma}{\Delta}\sqrt{2}\right)\Big].$$

Приводятся графики $p(\omega)$ и вероятности ошибки в зависимости от $\frac{\sigma}{\Delta}$. Б. С. Цыбаков

8107. О пропускной способности канала с шумами. **Мурога** (On the capacity of a noisy continuous channel. Muroga Saburo), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, **3**, № 1, 44—51, 82 (англ.)

Используя теорему о функциях с ограниченным спектром (эту теорему, известную в советской литературе как теорему Котельникова В. А. (Матер. к 1 Всес. съезду вопр. реконстр. дела связи и разв. слаботоч. пром., 1933), автор связывает с именами независимо опубликовавших ее Сомея (Somey I., Theory of waveform transmission, Tokyo, Shukyosha, 1944) и Шеннона (Shannon C. E., Proc. I **28**, 1949, 37, 10—21)), автор сводит изучение пропускной способности канала с непрерывным временем к случаю канала с дискретным временем. Это рассуждение не вполне корректно с точки зрения математика.

Далее рассматривается канал, в котором сигналы на входе . . . , ξ_1, ξ_0, ξ_1, . . . и сигналы на выходе . . . η_{-1}, η_0, η_1, . . . принимают непрерывное множество значений, причем задана условная плотность $p_x(y)$ того, что $\eta_i = y$ при условии, что $\xi_i = x$. Автор использует тот факт (считая его очевидным), что верхняя грань информации достигается, когда η_i не зависит от ξ_j, η_j, $j \neq i$, и поэтому вычисляет далее верхнюю грань информации ξ_0 относительно η_0 (математическое доказательство этого факта не очевидно). Предполагается дополнительно, что на канал наложено ограничение вида

$$\iint S(x, y, p(x), \widetilde{p}(y))\, dxdy = \text{const}, \qquad (1)$$

где $p(x)$ — плотность величины ξ_0, $\widetilde{p}(y)$ — плотность величины η_0, а S — заданная функция. Нахождение пропускной способности канала сводится, таким образом, к задаче на условный экстремум. Эта задача решается методом множителей Лагранжа. В результате автор сводит вопрос к некоторому интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Указывается метод решения этого уравнения путем разложения в ряд. Автор делает оговорку, что полученное им выражение является пропускной способностью исследуемого канала лишь если функция $p(x)$, на которой достигается экстремум, не отрицательна. Вопрос о том, когда это верно и как вычислять пропускную способность канала, если это неверно, остается открытым.

Особо разбирается случай аддитивного шума, т. е. случай, когда $p_x(y) = k(y - x)$ (здесь $k(z)$ — плотность шума). Условие (1) заменяется на более частное условие

$$\int x^2 p(x)\, dx = p = \text{const} \qquad (2)$$

(задана средняя мощность сигнала на входе). Здесь найдено явное выражение для пропускной способности

$$C = -H(n) + {}^1/_2 \log\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) + \gamma[p + \overline{n}^2 - (\overline{n})]^2,$$

где $H(n) = -\int k(z) \log k(z)\, dz$ — энтропия шума, $\overline{n}^2$ и $\overline{n}$ — средний квадрат и среднее значение шума и

$$\gamma = {}^1/_2 \left(\overline{p} + \overline{n}^2 - 3(n^2)\right)^{-1}$$

Однако здесь нужна та же оговорка, что и в общем случае. Применяя (2) к случаю гауссовского шума, автор приходит к известной формуле Шеннона: пропускная способность C канала с полосой частот W и белым шумом мощности N равна

$$C = W \log \frac{P + N}{N}.$$

Рассматривается также случай, когда шум имеет распределение Релея. т. е., когда

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} \exp\left\{-\dfrac{z}{\sqrt{N}}\right\}, & z \geqslant 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Здесь удается найти асимптотическое выражение

$$C = W \log_2 \frac{2}{e^2}\frac{\pi}{}\left(\frac{P}{N} - 1\right) + \frac{P + N}{P + N} \log_2 e$$

верное при $P/N \to \infty$.

Далее предполагается, что канал задается условной плотностью $P_{x'xy}(y')$ вероятности того, что $\eta_{ln} = y'$, при условии, что $\eta_{ln-1} = y$, $\xi_{n-1} = x$, $\xi_n = x'$. Подразумевается как очевидный тот факт, что верхняя грань информации, равная пропускной способности канала, достигается, когда ξ_l — марковский процесс. Используя снова метод Лагранжа, автор проводит исследования, аналогичные предыдущим. Результат очень громоздок. Автор указывает на связь изучаемого вопроса с эргодической теорией цепей Маркова и излагает поэтому известные результаты Деблина. Эти замечания автора не вполне ясны референту.

Дана краткая биография автора. Р. Л. Добрушин

8108. **Об оптимальном нелинейном выделении и кодирующих фильтрах. Балакришнан, Дреник** (On optimum non-linear extraction and coding filters. Balakrishnan A. V., Drenick R.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 3, 166—172 (англ.)

Пусть сигнал $\{s_n\}$ — стационарный в широком смысле процесс с дискретным параметром n и пусть шум $\{N_n\}$ — такой же процесс, не зависимый от первого. Принимаемый сигнал есть $\{x_n\}$, где $x_n = s_n + N_n$.

Ставится задача: найти оператор F, действующий на x_m $(m \leqslant n)$ такой, чтобы среднеквадратическая погрешность

$$\varepsilon^2 = E[(s_n - F[x_m,\ m \leqslant n])^2]$$

была бы минимальной.

Задача решается в предположении, что сигнал и шум формируются с помощью фильтрации «белого» шума, т. е.

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \xi_{n-k} \text{ и } N_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \eta_{n-k},$$

где ζ_k, так же как и η_k, — некоррелированные случайные величины. Известно, что наилучшее приближение к s_n осуществляет $s_n^+ = E[s_n/x_m,\ m \leqslant n]$. Показывается, что

$$s_n^+ = \sum_{k=0}^{\infty} w_k f(\zeta_{n-k}),$$

где $\zeta_n = \xi_n + \eta_n$. При вычислении вида функции $f(x)$ вводится предположение, что отлично от нуля лишь конечное число N коэффициентов в разложении плотности распределения вероятностей в ряд Грамма — Шарлье. При этом получается

$$f(z) = \frac{\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{a_n}{n!} H_n(z)}{1 + \sum_{n=3}^{2N} \frac{\gamma_n}{n!} H_n(z)},$$

где $H_n(z)$ — полиномы Эрмита степени n, связанные с $\exp\left\{-z^2/\sigma^2{}_s + \sigma_N^2\right\}$, а величины a_n и γ_n определяются по распределениям ξ_n и η_n. Для аппроксимации предлагается использовать n первых членов разложения

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z).$$

Здесь $P_n(z)$ — ортонормированные с весом $P(z)$ (распределение ζ_k) полиномы, а $c_n = \int P_n(z)\, g(z)\, dz$. В этом

случае минимальная ошибка есть

$$\varepsilon^2 = \sigma_s^2 - \sum_{e=0}^{n} c^2_e .$$

На основе разобранной задачи предлагаются системы кодирующих фильтров для передачи в одном канале (без шумов) двух независимых сигналов $\{s_n^1\}$ и $\{s_n^2\}$, имеющих одинаковые статистические характеристики. Системы позволяют уменьшить ошибку при передаче.
Б. С. Цыбаков

8109. Финально-значные системы с гауссовым входом. Бутон (Final-value systems with Gaussian inputs. Booton R. C.,Jr), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 3, 173—175 (англ.)

На вход прибора поступает последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_N$ случайных величин. Выходом прибора является последовательность $r_1, \ldots, r_N$, причем $r_k = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Из-за ограниченности скорости работы прибора на r_k накладывается условие $|r_k - r_{k-1}| \leqslant V_k$. Показание прибора есть величина r_N. Желаемое показание прибора обозначается через ρ и задается гауссовская совместния плотность распределения вероятностей $p_{\xi_1, \ldots, \xi_N, \rho}(x_1, \ldots, x_N, y)$. Определяется стоимостная функция $f(x)$, обладающая свойствами: $f(x) = f(-x)$ и $f'(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Ставится задача минимизировать среднее значение $Mf(\rho - r'_N)$ путем подбора последовательности $r_1, \ldots, r'_N$.

Индуктивным методом доказывается, что минимизирующая последовательность $r_1', \ldots, r'_N$ строится так, что

$$r'_k = r'_{k-1} + L_k(\rho^*_k - r'_{k-1}) \quad (k = 2, 3, \ldots, N), \quad \text{где}$$

$$L_k(x) = \begin{cases} -V_k & x < -V_k, \\ 0 & |x| < V_k, \\ V_k & x > V_k \end{cases}$$

и ρ^*_k — условное среднее величины ρ при фиксированных значениях $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_k = x_k$. Величина r_1' выбирается равной r_1.
Б. С. Цыбаков

8110. Комплексные процессы в применении к исследованию огибающей нормального шума. Аренс (Complex processes for envelopes of normal noise. Arens Richard), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 3, 204—207 (англ.)

Как известно (Бунимович Е. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., 1951), с любым стационарным процессом

$$X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, X_1(d\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t \, X_2(d\lambda)$$

можно сопоставить сопряженный процесс

$$Y(t) = \int_0^\infty \sin \lambda t \, X_1(d\lambda) - \int_0^\infty \cos \lambda t \, X_2(d\lambda),$$

причём процесс

$$E(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}$$

называется огибающей процесса $X(t)$. Автор вводит комплексный процесс $Z(t) = X(t) + iy(t)$, называя его предогибающей (preenvelope). Тогда огибающая $E(t) = |Z(t)|$. Основная цель статьи — показать серьезные методические преимущества, которые дает использование предогибающей $Z(t)$. Для этого выводятся при помощи $Z(t)$ некоторые известные свойства огибающей.
Р. Л. Добрушин

8111. Теория весового сглаживания. Юл (A theory of weighted smoothing. Ule Louis A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 2, 131—135 (англ.)

Рассматривается фильтр, преобразующий функцию $f(i)$, подаваемую на его вход, в

$$g(t) = \int_0^\infty W(\tau, t) f(t - \tau) \, d\tau .$$

На вход такого фильтра поступает линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) + \xi(t)$. При этом $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — известные функции, и $\xi(t)$ — случайный стационарный процесс с нулевым средним и функцией корреляции $R(\tau)$, имеющий смысл шума. Вводится весовая функция $H(\tau)$, отличная от нуля лишь на конечном интервале τ.

Ставится задача: среди всех $W(\tau, t)$, обращающихся в нуль вместе с $H(\tau)$, найти такую, которая бы давала минимум взвешенной ошибке $\sigma_0^2(t)$,

$$\sigma_0^2(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(x, t) \, W(y, t)}{H(x) \, H(y)} \, R(x - y) \, dx dy,$$

при условиях

$$\int_0^\infty W(\tau, t) f_i(t - \tau) \, d\tau = p_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Функции $p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ задаются и являются желаемыми откликами фильтра, если на его вход подаются соответственно $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В случае, когда $H(\tau) = 1$ при $\tau < T$ и $H(t) = 0$ при $\tau > T$, $\sigma_0^2(t)$ совпадает со среднеквадратической ошибкой на выходе фильтра, обусловленной $\xi(t)$. Задача решается в общем виде методом неопределенных множителей Лагранжа.

В качестве примера разобран фазовый детектор, т. е. случай, когда $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \cos t$, $p_1(t) = 1$, а $p_2(t) = 0$.
Б. С. Цыбаков

8112. Оценка параметров закона распределения случайной функции при ограниченных априорных данных. Леонов Ю. П., Телькснис Л. А., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 11, 985—998 (рез. англ.)

Рассмотрен случай оптимальной оценки математического ожидания случайной функции. Рассматривается случайная функция

$$y(t) = g(t) + n(t) \text{ с } My(t) = g(t).$$

Априори известно, что $g(t)$ всюду представима рядом Тейлора, а $n(t)$—станционарная случайная функция с известной корреляционной функцией $R(t)$. Задавшись, кроме того, степенью полинома r и памятью системы T (время наблюдения) можно построить оптимальный в смысле Заде и Рагазини фильтр для оценки $My(t) = g(t)$ (с минимальной дисперсией оценки). Оптимальная в вышеуказанном смысле оценка обращает в минимум функционал λ, связанный со средним квадратом разности сигнала на входе и выходе оптимального фильтра.

Указаны возможности обобщения на случай нестационарных шумов.

Далее рассмотрения ведутся в более общем плане, когда производится последовательное уточнение заранее неизвестных значений параметров r и T, а также $R(t)=c^2\delta(t)$, где c — неизвестная константа, а $\delta(t)$ — известная функция. Критерием правильности выбора тех или иных значений r, T и c по-прежнему является величина функционала λ. Б. С. Флейшман

8113. Исследование линейных и нелинейных систем с помощью корреляций. Спунер, Райдаут (Correlation studies of linear and nonlinear systems. Spooner M. G., Rideout V. C.), Proc. Nat. Electronics Conf., 1956 (1957,) **12**, 321—335 (англ.)

Рассматривается ошибка системы регулирования с единичной обратной связью

$$e(t,\ \tau)=r(t)-c(t+\tau).$$

Здесь $r(t)$ есть сигнал на входе и $c(t)$ — сигнал на выходе системы. Определяется обобщенная функция ошибки $E(\tau)$

$$E(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^\infty e^2(t,\ \tau)\,dt=\Phi_{rr}(0)+\Phi_{cc}(0)-2\,\Phi_{rc}(\tau),$$

где $\Phi_{rc}(\tau)$ есть функция взаимной корреляции функций $r(t)$ и $c(t)$, $\Phi_{rr}(0)$ и $\Phi_{cc}(0)$ есть средние по времени от функций $r^2(t)$, $c^2(t)$. Определяется нормированная функция ошибки ${}_nE(\tau)$

$${}_nE(\tau)=\frac{E(\tau)}{\Phi_{rr}(0)}=1+{}_n\Phi_{cc}(0)-2\,{}_n\Phi_{rc}(\tau).$$

Для случая линейных систем второго порядка выводятся формулы вычисления корреляционных функций, в предположении, что на вход системы подается случайный шум, проходящий через фильтр с ограниченной полосой пропускания. Для функции ${}_n\Phi_{rc}(\tau)$ получено следующее выражение:

$${}_n\Phi_{rc}(\tau)=\frac{2\,e^{-\xi\tau}}{\beta T_1(M^2-N^2)}[M\sin\beta\tau-NT_1\zeta\sin\beta\tau-$$

$$-N\beta T_1\cos\beta\tau]+\frac{e^{-\tau/T_1}}{M-N},\quad\text{для }\tau>0$$

и ${}_n\Phi_{rc}(\tau)=\frac{T_1^2e^{\tau/T_1}}{T_1^2+2\zeta T_1+1}$, для $\tau<0$. Здесь T_1 — постоянная времени фильтра, ζ — показатель затухания системы,

$$\beta=(1-\zeta^2)^{1/2},$$

$$M=\frac{1+T_1^2}{T_1^2},\qquad N=\frac{2\,\zeta}{T_1}$$

Далее показывается, что для случая рассматриваемых систем

$${}_n\Phi_{cc}(0)=T_1\left[\frac{1+T_1^2(1-4\zeta^2)+2\zeta T_1^3}{\gamma\zeta}\right],$$

где $\gamma=1-2\alpha T_1^2+T_1^4$, $\alpha=2\zeta^2-1$, и выводится выражение для обобщенной функции ошибки. Приводятся результаты вычислений функций ${}_n\Phi_{rc}(\tau)$ и ${}_nE(\tau)$, произведенных на машине ИМБ-650. Приводятся также результаты вычислений этих функций методами моделирования и блок-схемы моделирующих устройств. В заключение рассматривается вопрос об использовании обобщенной функции ошибки для сравнения нелинейных систем. Много опечаток. Ю. М. Барабошкин

8114. Математическое определение измерительных свойств прибора. Фогел (Mathematical definitions for transducer measure' criteria. Fogel Lawrence J.), IRE Trans: Instrum., 1956, **PGI—5**, June, 187—191, 12—13 (англ.)

В терминах теории вероятности даются определения ряда общих свойств приборов как-то: точности, надежности, четкости, допустимого отклонения, разрешающей способности, легкости считывания, уверенности, асимметрии. Так, например, точность определяется как

$$\frac{\min}{x_i}\ \frac{\max}{y}\ p(y\mid x_i),$$

где x_i — возможные величины на входе прибора, y — данное на выходе, а $p(y/x_i)$ — условная плотность распределения. Б. С. Цыбаков

8115. Случайные обобщенные процессы и их применение в телефонии. Форте (Random distributions with an application to telephone engineering. Forte R. M.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 2. Berkeley — Los Angeles, 1956, 81—88 (англ.)

Определяется пуассоновское распределение на произвольных пространствах. Пусть X — любое пространство элементов x, B — борелевское поле подмножеств e из X, $m(e)$ — мера на B. Случайное семейство F элементов из X является пуассоновским распределением на X, если число $M(e)$ элементов из F, принадлежащих $e\in B$, удовлетворяет следующим условиям: 1) если $m(e)<\infty$, случайная величина $B(e)$ почти достоверно конечна и ее функция распределения есть пуассоновский закон с параметром $m(e)$, 2) если k — любое целое число и $e_1\ e_2\ldots e_k$ — любые непересекающиеся множества из B с $m(e_j)<\infty$ $(j=1,2\ldots n)$, то случайные величины $M(e_j)$ независимы.

Автор рассматривает обобщенные случайные процессы согласно определению Гельфанда, и как пример нелинейной проблемы, т. е. проблемы не решаемой при помощи характеристических функционалов, приводится обобщенный случайный процесс, встречающийся в теории обслуживания на телефонных станциях. Задача решается при помощи некоторого стохастического интегрального уравнения. В простейшем случае классической модели Эрланга оно имеет вид

$$Y(t)=\int X(u)\,R(u,t)\,dN(u),$$

$$X(t)=V(Y(t)),\qquad(1)$$

где $V(k)=\begin{cases}1, & k=1,2,\ldots,n\\ 0, & k>n\end{cases}$;

$Y(t)$ — число разговоров в момент t, $N(u)$ — ф. р. числа вызовов, $R(u,t)=\begin{cases}1, & t-u\in[0,T(t)]\\ 0, & t-u\notin[0,T(t)]\end{cases}$;

$T(t)$ — время обслуживания потребителя, прибывшего в момент t.

Доказывается, что система (1) имеет единственное решение при допущении, что $N(t)-N(0)$ конечно для любых $t<\infty$. Определено м. о. $E(Y(t))$ в станционарном случае с $n=1$. С. М. Броди

8116. Распределение времени ожидания и включения. Еккель (Verteilungen vor Warte- und Anschlußzeiten. Jaeckel K.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 9—10, 404—406 (нем.)

Рассматривается элементарная задача о распределе-

нии времени ожидания в работе некоторой индустриальной установки, приводящейся к отысканию распределения абсолютной величины разности двух нормально и одинаково распределенных величин. Указываются методы оценки параметров искомого распределения и приемы проверки некоторых гипотез. Н. В. Смирнов

8117. **Оценка по методу наибольшего правдоподобия параметра дисперсии хи-распределенной радиальной ошибки из усеченных и цензурированных выборок с приложениями к анализу результатов стрельбы по мишени. Коэн** (Maximum likelihood estimation of the dispersion parameter of a chi-distributed radial error from thruncated and censored samples with applications to target analysis. Cohen A. Clifford, Jr), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 272, 1122—1135 (англ.)

Радиальная ошибка $r = (x^2_1 + \ldots + x^2_p)^{1/2}$, где компоненты x_j $(j = 1, \ldots, p)$ представляют множество p независимых случайных величин, каждая из которых нормальна $(0, \sigma)$ имеет функцию плотности $[2r / \sigma^2] f_p(r^2 / \sigma^2)$, причем $f_p(\chi^2)$ есть функция плотности χ^2 с p степенями свободы. Это распределение представляет интерес для анализа результатов стрельбы по мишени, когда начало или «центр удара» известны или предполагаются известными. Для $p = 2$ и $p = 3$ σ служит мерой ошибки рассеивания и, следовательно, мерой точности орудийной системы. В работе исследуется оценка σ по усеченным, цензурированным выборкам и по полным выборкам. В этих случаях получены уравнения для оценок по методу максимального правдоподобия, и там, где точные оценки невозможны, уравнения сводятся к формам, которые дают решение интерполяцией с помощью таблицы. Для облегчения решения в случаях усеченых выборок для $p=2$ и $p=3$ даны таблицы и графики оценивающих функций. Получена оценка в явном виде для случая цензурированным выборки, когда $p = 2$. Асимптотически дисперсии оценок получены для каждого из рассматриваемых случаев. Включены иллюстративные примеры, относящиеся к изучению анализа мишени для стрельбы. Для случая, когда положение начала неизвестно, при $p = 2,3$, описывается графическая процедура для оценки его координат, основанная на использовании «оценивающего круга» фиксированного радиуса, расположенного так, чтобы заключить в себе максимальное число выборочных точек или точек поражения. Резюме автора

8118. **Точная прогрессивность и валовая прогрессивность налогового обложения. Де-Нардо** (Progressività puntuale e progressività globale di una imposta. De Nardo Vincenzo), Riv. polit. econ., 1957, **47**, № 7-8, 547—578 (итал.)

Анализ разных форм меры прогрессивности количественной системы, т. е. системы, касающейся разных классов или ступеней дохода с возрастающими отчислениями. Автор предлагает новый показатель для степени точной прогрессивности налогового обложения, а также показатель меры валовой эффективной прогрессивности. Выводы сделаны с целью объяснения практического превосходства меры валовой эффективной прогрессивности над принятой официальной мерой. Из резюме автора

8119. **Определение выигрыша в страховании по основам теории риска. Амметер** (Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage. Ammeter Hans), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungs-mathematiker, 1957, **57**, № 2, 145—200 (нем.)

8120. **Применение методов статистики к задачам геодезии. Мейер** (Application of statistical methods to survey problems. Meyer H. Arthur), Surveying and Mapping, 1954, **14**, № 4, 427—437 (англ.)

Излагаются основы теории ошибок и способа наименьших квадратов. Рассматривается применение в геодезии способа анализа дисперсии, предложенного Фишером. Разбирается пример анализа этим способом невязок трех треугольников с различными длинами сторон, углы которых были многократно измерены четырьмя различными инструментами. Различия полученных невязок объясняются ошибками наблюдений, различными для разных инструментов и треугольников.

Анализ дисперсии дает возможность установить, зависят ли наблюденные невязки от качеств инструмента длин сторон треугольников. Для этого сумма квадратов дисперсий невязок от ее среднего значения представляется в виде четырех сумм: суммы квадратов дисперсий для различных треугольников; суммы квадратов дисперсий для различных групп измерений; суммы квадратов дисперсий взаимосвязи инструмента и треугольника. Приводятся правила для вычисления указанных сумм. Делением каждой из этих сумм на число избыточных измерений получают квадрат среднего квадратического уклонения с весом единица.

Образуя отношение соответственного среднего квадратического отклонения к общему и определяя вероятность появления этого отношения в случае нормального распределения ошибок, мы можем установить, влияют ли качества инструмента и длины сторон треугольников на точность измерения углов, а также оценить это влияние. В. Н. Меньшутин

8121. **Применение теоретико-вероятностных и статистических методов. Об оценке параметров геологических залежей. Зубжицкий** (O szacowaniu parametrów złóż geologicznych. Zubrzycki S.), Zastosowania mat., 1957, **3**, № 2, 105—153 (польск.; рез. русск.)

Рассматривается произвольный параметр $y(p)$ месторождения в точке p области D, на которой оно залегает. Предполагается, что $y(p)$ — непрерывный изотропный случайный процесс в области D. В предположении, что результаты измерений параметра $y(p)$ в нескольких точках области D обременены случайными ошибками, которые не зависят ни от измеряемого параметра, ни друг от друга и дисперсия которых одна и та же, автор дает оценку математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции процесса $y(p)$. При этом принимается, что корреляционная функция $f(d)$ (d—расстояние между точками) процесса $y(p)$ дана одной из формул

$$f(d) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left\{\arccos\frac{d}{A} - \frac{d}{A}\sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}\right\} & \text{при } d \leqslant A, \\ 0 & \text{при } d \geqslant A, \end{cases}$$

$$f(d) = e^{-\frac{d^2}{A^2}}, \qquad f(d) = e^{-\frac{d}{A}},$$

где A — положительная константа. Величины эти определены на основании измерений содержимости цинка в месторождениях Верхней Силезии.

Кроме того, автор изучает точность наилучшей линейной оценки процесса $y(p)$ по сравнению с другими линейными оценками. Устанавливается предельное значение коэффициента корреляции выборки $y^*(p)$ и интеграла $\iint y(p)dp$, когда площадь области D стремится к бесконечности. Отсюда определяется расстоянние выборок, при котором выборки эти можно рассматривать как некоррелированные величины. K. Urbanik

8122. **Стохастические процессы, представляющие интерес для астрономии. Мюнх** (Stochastic processes of astronomical interest. Münch Guido), Appl. Probability. New York — Toronto — London, McGraw — Hill Book Co., 1957, 51—66 (англ.)

Предполагается, что облака космической пыли распределены в пространстве по закону Пуассона с дисперсией vs, где s — расстояние по лучу зрения (среднее расстояние между облаками равно $4 \cdot 10^{20}$ см), и аналогично распределены звезды (со средним расстоянием между ними 10^{19} см). Поглощение радиации облаками пыли приводит к флюктуациям яркости Млечного Пути. Наблюдаемая яркость (в безразмерной форме) равна

$$U_q(t) = \int_0^t q^{N(t')}\, dt',$$

где t — безразмерное расстояние, q — пропускаемая каждым облаком доля радиации, $N(t)$ — число облаков на интервале $(0, t)$. Дополнительно рассматриваются случайные функции

$$U_q(t, n) = \int_0^t q^{N(t', n)}\, dt'; \quad U_\varphi(t) = \int_0^t \prod_{i=1}^{N(t')} q_i\, dt,$$

где $n = N(t)$, а $N(t', n)$ — число облаков на интервале $(0, t')$, имеющее биномиальное распределение $P_n(m)$, соответствующее частоте $p = t'/t$; q_i — независимые случайные величины $(0 \leqslant q_i \leqslant 1)$ с функцией распределения $\varphi(q)$.

Изучается функция распределения $F(u, t)$ случайной величины $U_q(t)$, для которой выводится и решается уравнение

$$\left(1 + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t}\right) F(u, t) = F\left(\frac{u}{q}, t\right)$$

при краевых условиях $F = 1\,(u > t)$ и $F = 0\,(u = 0)$. В частности, находится предельное распределение $F(u, \infty)$. Находятся также распределение для $U_q(t, n)$ и моменты двумерного распределения для $U_q(t)$, $U_q(t')$. Наконец, для функции распределения $W(u, t)$ случайной величины $U_\varphi(t)$ выводится уравнение

$$\left(1 + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t}\right) W(u, t) = \int_0^1 W\left(\frac{u}{q}, t\right) d\varphi(q),$$

и изучаются его моменты и предельное распределение $W(u, \infty)$. А. С. Монин

8123. Одна проблема минимального планирования в архитектуре. Сороа-Тероль (Un problema de mínimo planteado en arquitectura. Zoroa Terol Procopio), Trab. estadist., 1955, **6**, № 3, 197—208 (исп.; рез. англ.)

В планировании строительства имеем следующую ситуацию.

В одном и том же коридоре имеется несколько дверей; и этот коридор имеет только один выход на улицу; известна также частота людей, которые должны пройти из двери i в конец A или в конец B (коридора). Возникает вопрос: в каком месте должна быть сделана дверь P, чтобы обеспечить минимальное суммарное прохождение (по коридору) для выходящих людей.

Автор дает ответ на этот вопрос и в наиболее общем случае с заменой частот на функции плотности.

Резюме автора

8124. Применения статистики в инженерном деле. Коллинс (The engineering applications of statistics. Collins David N.), Industr. Math., 1956, **7**, 1—15 (англ.)

Статья не содержит новых математических результатов. Цель статьи — привлечь внимание к более широкому и квалифицированному использованию статистических методов в инженерном деле. А. П. Хусу

8125. Потребление автомобилей, 1940—1950. Бандин (Automobile consumption, 1940—1950. Bandeen Robbert A.), Econometrica, 1957, **25**, № 2, 239—248 (англ.)

В качестве показателя потребления автомобилей используется величина ежегодного снижения их стоимости. Эта характеристика сопоставляется с доходом владельца вследствие эксплуатации автомобиля.

А. М. Бендерский

8126. О некоторых вопросах медицинско-биологического применения математической статистики. Юванц, Липтак (A matematikai statisztika orvosi-biológiai problémájáról. Juvacz I., Lipták T.), Alkalmazott mat. intéz. közl., 1952, **1**, 175—193 (венг.)

В первой части работы трактуются принципиальные вопросы применений. Здесь группируются специальные проблемы, вытекающие из характера медицинско-биологического исследования, вокруг двух центральных вопросов. Один круг проблем связан с исследованием «значимости», именно с правильным толкованием понятия «значимости». Другой круг проблем относится к выборкам медицинско-биологического исследования, имеющим часто, в силу необходимости, лишь малое число элементов. Что касается этой группы вопросов, в работе предлагается ввести непараметрические статистические методы, вырабатываемые также и для малых выборок, т. е. предлагается применение методов, независимых от почти всех предварительных предположений, относительно исследуемой статистической совокупности.

Вторая часть работы знакомит с главными теоремами теории вариационных рядов и сообщает новейшие результаты советских ученых в этой области. С помощью этих результатов в третьей части работы вырабатываются для исследования значимости методы которые не зависят от распределения совокупности и являются применимыми и при малых выборках. Наконец, иллюстрируется практическое применение этих новых методов несколькими примерами медицинской научно-исследовательской работы, и сообщаются необходимые для вычислений таблицы, составленные Группой математической статистики Института прикладной математики.

Автор исходит из мелицинско-биологических применений, а большинство трактуемых принципиальных вопросов имеет общий характер. Статистические методы, изложенные в этой работе, могут широко применяться.

Резюме автора

8127. Статистическая проблема, возникающая из обзора прошлых исследований. Корнфилд (A statistical problem arising from retrospective studies. Cornfield Jerome), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 4. Berkeley—Los Angeles, 1956, 135—148 (англ.)

Исходной является следующая задача медицинской статистики: имеются две или более групп лиц, обладающих некоторыми особенностями. Нужно определить для них относительный риск заболевания определенной болезнью. В тексте общие положения иллюстрируются данными о заболевании раком отдельно для курящих и некурящих. Математическая задача, изучаемая в статье, такова: имеются два биномиальных распределения с неизвестными параметрами $p_1\,(q_1 = 1 - p_1)$ и $p_2\,(q_2 = 1 - p_2)$. Требуется определить доверительные интервалы для $z = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}$. Пусть x_1 и x_2 независимы и имеют соответственно первое и второе указанные распределения, тогда условное распределение при условии $x_1 + x_2 = m$ есть $f(x_1) = C_0 C_{n_1}^{x_1} C_{n_2}^{m - x_1} z^{x_1}\,(x_1 = 0, 1, \ldots, n_1)$, C — нормирующий множитель.

Обозначим через z_1 и z_2 соответственно решения уравнений $\sum_{y=x'}^{n} f(y) = \frac{1}{2}\alpha$, $\sum_{y=0}^{x'} f(y) = \frac{1}{2}\alpha$, тогда $P(z_1 \leqslant z \leqslant z_2) \geqslant 1 - \alpha$ (x' — наблюденное значение x_1). Если $f(y)$ достигает максимума при $\tilde{x}$, то для больших n_1 и n_2 величина x_1 распределена почти нормально со средним x и дисперсией

$$\left[\frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{n-\tilde{x}} + \frac{1}{m-\tilde{x}} + \frac{1}{n_2-m+\tilde{x}}\right]^{-1}.$$

Рассмотрены также два обобщения на мультиномиальные распределения и на случай N пар независимых биномиальных распределений. Б. В. Гнеденко

8128. Проблемы заражения. Тейлор (Problems in contagion. Taylor William F.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 4. Berkeley — Los Angeles, 1956, 167—179 (англ.)

Излагается обзор некоторых идей и результатов, касающихся теории распространения эпидемий и базирующихся на теории случайных процессов. Обзор составлен исключительно на исследованиях, проводившихся в США и Англии. Б. В. Гнеденко

8129. Изучение страхования индивидуального заболевания. Нольд (Contribution à l'étude de l'assurance individuelle maladie. Nolde Boris), Bull. trimestr. Inst. actuaires franç., 1957, **68**, № 221, 151—173 (франц.)

8130. Приближенное вычисление возврата премий при увеличенной смертности. Цвинги (Approximative Berechnung der Prämienrückerstattung bei erhöhter Sterblichkeit. Zwinggi Ernst), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 201—203 (нем.)

8131. Анализ различий двух выборочных данных о венесуэльских индейцах. Диас-Унгрия, Камачо, Риос (Analisis discriminante de dos muestras de indios venezolanos. Diaz Ungria A., Camacho A., Rios S.), Trab. estadist., 1955, **6**, № 3, 237—242 (исп.)

8132. Элементарный метод решения проблемы ожидания в очереди с единственным обслуживающим устройством и постоянными параметрами. Чамперноун (An elementary method of solution of the queueing problem with a single server and constant parameters. Champernowne D. G.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**. № 1, 125—128 (англ.)

Проблема ожидания в очереди, в которой время поступления заявок и время обслуживания имеют независимые отрицательно-показательные распределения с постоянными параметрами, изучалась для случая одного обслуживающего устройства. «Простая» проблема — с постоянными параметрами — впервые изучалась Ледерманом и Рёйтером (РЖМат, 1955, 2318), а более общие проблемы рассматривались Кларком (РЖМат, 1957, 3370) совместно с теми же авторами. Проблема просто разрешается в одном специальном случае: Этот специальный случай недавно был исследован Бейли (РЖМат, 1957, 1671) с помощью метода производящих функций. Ввиду его важности автор предполагает получить этот результат непосредственно: он будет выражаться в терминах бесселевых функций в форме, полученной Кларком. Последний указал, что это решение также применимо к случаю, когда отношение показательных параметров для двух времен ожидания постоянно, но при этом каждый параметр не является необходимо постоянным. Резюме автора

8133. Система очереди со временем обслуживания, распределенным по χ^2. Уишарт (A queueing system with, χ^2 service time distribution. Wishart David M. G.), Ann. Moth. Statistics, 1956, **27**, № 3, 768—779 (англ.)

Стохастический процесс, связанный с системой ожидания в очереди, определяется знанием 1) распределением заявок, 2) порядка очереди, 3) обслуживающего механизма. Система, в которой заявки «полностью независимого» типа и времена обслуживания независимы и одинаково распределены согласно произвольному общему закону, обозначается через $GI/G/s$, где s — число обслуживаемых механизмов (РЖМат, 1956, 3218). Точно определенная система поступлений заявок времени прибытий (или времен регулярного обслуживания) обозначается через D (детерминистская); M описывает случайных порядок прибытий (или времен отрицательно-показательного обслуживания), а E_k (эрлангиан) указывает, что масштабно-измененное χ^2 распределение с $2k$ степенями свободы есть распределение. Отметим, что M эквивалентно E_1.

Для того чтобы распространить описание системы $GI/M/s$ (РЖМат, 1956, 3218) на систему $GI/E_k/s$, Кендалл предложил следующий прием. Время обслуживания мыслится как сумма независимых компонент, одинаково распределенных с отрицательно-показательным законом. Общая система $GI/E_k/s$, однако, оказывается в этой форме неудобна, так что автор ограничивается в данной работе системой $GI/E_k/1$. Автор анализирует ее с помощью теории цепей Маркова, получая стационарное распределение для числа потребителей в системе в моменты прибытия и распределения времени ожидания для произвольного потребителя.

Линдли (Lindley D. V., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, 277—289) изучил проблему времени ожидания в системе $D/E_k/1$, решив для этого частного примера интегральное уравнение, описывающее все системы типа $GI/G/1$: эквивалентность этого результата найденному автором распределению времени ожидания, рассматривается в разделе 2.

Полачек (Pollaczek F., C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 2334—2336; РЖМат, 1953, 354) и Смит (РЖМат, 1954, 5200) также рассматривали системы этого типа.

По резюме автора

8134. Некоторые результаты, касающиеся устойчивости очереди $E_k/M/1$. Джексон, Никколс (Some equilibrium results for the queueing process $E_k/M/1$. process $E_k/M/1$. Jackson R. R. P., Nickols D. G.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 2, 275—279 (англ.)

Рассматривается система очереди с показательным распределением времени обслуживания, в которой промежутки времени между последовательными прибытиями потребителей имеют распределение, пропорциональное χ^2. Показывается, что в эргодическом случае и стационарности система уравнений для pv—вероятностей того, что в системе находится v потребителей, имеет единственное решение. Это решение зависит от единственного действительно положительного корня знаменателя производящей функции p_v. Определено распределение времени ожидания потребителей. Для частных случаев получены ранее известные результаты. С. М. Броди

8135. Исследование операций в проблемах ожидания в очереди. Гандер (Operational research on queueing problems. Gander R. S.), Research, 1956, **9**, № 8, 295—301 (англ.)

Краткий обзор ряда известных результатов по математической теории скученности. По резюме автора

8136. О проблеме столкновений. Вайда (A problem of encounters. Vajda S.), Trabajos Estadist., 1954, **5**, 217—228 (англ.; рез. исп.)

8137 К. Теория информации. Голдман Станфорд. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1957, 446 стр., илл., 17 р. 10 к.

Термин «теория информаций» применяется в настоящее время в двух разных смыслах. В математической литературе под теорией информации понимается круг

идей, идущих от работы Шеннона (Сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», М., Изд-во ин. лит., 1953) и связанных с использованием величин энтропии и информации. В технической литературе термин «теория информации» понимается гораздо выше (см., например, содержание журнала Transaction of IRE, Section of Theory of Information). Сюда включается, кроме теории информации в узком смысле, теория фильтрации стационарных процессов, применения методов математической статистики для обнаружения сигналов на фоне шума и другие технические приложения теории вероятностей. Аннотируемая книга посвящена теории информации в таком широком смысле. Книга написана инженером для инженеров. Сколько-нибудь сложные математические рассуждения вынесены в приложение к книге (всего их 13). По четкости построений книга значительно уступает другим техническим книгам близкой тематики, например книги Бунимовича (Флуктационные процессы в радиоприемных устройствах. М., 1951) или Лейннинга, Баттина (реф. 8139).

Гл. 1 книги посвящена изложению шенноновской теории передачи сообщений для дискретного случая. Нововведение состоит в том, что количество информации, являющееся случайной величиной, определяется как

$$\log\left\{\frac{\text{Вероятность у приемника данного события после приема сообщения}}{\text{Вероятность у приемника данного события до приема сообщения}}\right\}$$

Количество информации по Шеннону возникает как среднее от так определенной информации. Дано много примеров.

В гл. 2 и 3 обсуждаются вопросы, связанные с известной формулой для предоставления процесса с ограниченным спектром через его значения в периодической последовательности точек, опубликованной независимо Котельниковым (Матер. к I Всес. съезду вопр. реконстр. дела связи и разв. слаботоч. пром. 1933), Сомея (Someya I., Theory of waveform tranmission, Tokyo, Shukyosha, 1944) и Шенноном (Shannon C. E., Proc. IRE, 1949, 37, 10—21). Кроме того, здесь излагаются идеи, вошедшие, с точки зрения математика, в теорию стационарных процессов.

Гл. 4, 5 и 6 содержат изложение свойств энтропии в непрерывном случае, вычисление скорости передачи информации для каналов с ограниченной полосой частот, вопрос о потере энтропии в линейном фильтре и, наконец, геометрическое доказательство теоремы Шеннона в непрерывном случае. Изложение основано на известных работах Шеннона.

Гл. 6 посвящена обсуждению с точки зрения теории информации различных применяемых в радиотехнике методов модуляции сигнала (т. е. методов кодирования сигнала). Многие рассуждения кажутся спорными.

В обширной гл. 8 излагается обычным образом спектральная теория стационарных процессов, теория фильтрации и прогнозирования этих процессов. Наконец, в последней главе, посвященной общефилософской трактовке идей и приложений теории информации, нет математического содержания.

В целом книга полезна читателю-математику, так как она, несмотря на свои недостатки, может служить введением в теоретически и практически важный круг вопросов. Р. Л. Добрушин

8138 К. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. Вудворд Ф. М. Перев. с англ., М., «Сов. радио», 1955, 128 стр., илл., 5 р. 15 к.

Первые три главы посвящены изложению элементов теории вероятностей, частотно-временному анализу сигналов и шумов и теории информации. Описательное изложение известных фактов этой теории сопровождается привычными для радиоинженеров примерами.

Оригинальная часть монографии охватывает последние четыре главы. Здесь приведены новые результаты, ряду старых результатов дана новая интерпретация. Гл. IV трактует прием как статистическую задачу. На самом деле автор уходит от статистического решения этой задачи, требующего вынесения решений с фиксированными вероятностями их правильности.

Идеальный приемник в смысле автора — это устройство, выдающее на его выход апостериарную вероятность $P_y(x)$ входного эффекта x при обнаружении на его выходе y. По формуле Байеса эта величина пропорциональна функции правдоподобия $P_x(y)$. Визуальным анализом этих величин без вынесения окончательных решений по ним и ограничивается автор, указывая на неизбежные потери информации, связанные с принятием решений. Однако в дальнейшем изложении, рассматривая примеры, автор часто ищет наивероятнейшее значение сигнала, что приводит к решению задачи методом максимума правдоподобия.

В качестве иллюстрации приведенных рассуждений рассматривается задача выделения одного из совокупности точно известных (до приема) сигналов при наличии аддитивного белого шума. В случае априорной равновероятности сигналов задача сводится к выбору сигнала с максимальной взаимной корреляцией с принятым эффектом на выходе (корреляционный приемник). Если сигналы содержат неизвестные параметры, то приводится усреднение по ним.

Автор видит большое преимущество систем связи над системами наблюдения в наличии у первых возможности определения априорных вероятностей сигналов, чего нет у вторых.

Гл .V посвящена элементарной теории радиолокационного приема. В этом случае автор подчеркивает неотделимость задачи обнаружения от задачи извлечения сигнала (РЖМат, 1958, 5032). Специфика простейшего случая радиолокационного приема состоит в том, что сигналами является совокупность сдвигов во времени одного и того же сигнала известной формы и требуется найти по выходному эффекту лишь величину сдвига. Решение задачи приводит здесь к необходимости рассмотрения корреляционного приемника, сводящегося в этом случае к образованию свертки между выходным эффектом и сигналом с неизвестным сдвигом. Последнее обстоятельство позволяет трактовать полученные результаты с точки зрения теории фильтрации сигналов на фоне шумов.

Гл. VI продолжает исследование задачи радиолокационного обнаружения. Вычисление «точности» определения сдвига сводится к грубой аппроксимации его апостериорного распределения нормальным с последующим подсчетом стандартного отклонения последнего.

Количество информации в смысле Шеннона вычисляется в зависимости от отношения сигнал/шум (соответствующее отношение энергией).

Вводится несколько определений порогового сигнала.

Последняя, гл. VII, исследует зондирующий радиолокационный сигнал и имеет специальный технический интерес. Ь. С. Флейшман

8139 К. Случайные процессы в автоматическом регулировании. Лейнинг, Баттин (Random processes in automatic control. Laning J., Malcombe, Jr, Battin Richard. New York — Toronto — London. McCraw-Hill Book Co., Inc., 1956, 434 pp.) (англ.)

Изложение основ теории случайных процессов с особым упором на вопросы, касающиеся прохождения случайных шумов через линейные и (в гораздо меньшей степени) нелинейные системы. Книга состоит из 8 глав и 10 приложений. В гл. I дается общее представление о задачах теории автоматического регулирования, роли

статистических методов в этой теории и различии между стационарными и нестационарными задачами; здесь же дается краткий обзор дальнейшего содержания. Гл. 2 посвящена основам теории вероятностей. После краткого рассмотрения классического определения вероятности излагаются понятия о множествах, операциях над множествами и функциях множеств; после этого понятие вероятности вводится аксиоматически (по А. Н. Колмогорову) и дается представление о случайных величинах и их основных характеристиках (включая характеристические функции); в заключение рассматриваются важнейшие специальные распределения вероятностей (биномиальное, распределение Пуассона, нормальное и многомерное нормальное), причем при рассмотрении распределения Пуассона отмечается его связь с простейшим чисто дискретным случайным процессом с независимыми приращениями, а при рассмотрении нормального распределения дается представление о центральной предельной теореме (без строгого доказательства, но с поясняющими примерами).

Гл. 3 посвящена понятию случайного процесса. После кратких вводных замечаний эвристического характера дается представление о строгом определении случайного процесса; далее рассматриваются многомерные распределения вероятностей для значений случайного процесса в конечном числе точек и моменты этих распределений (особое внимание уделяется корреляционной функции), а также обобщение этих понятий на случай системы нескольких статистически связанных между собой процессов. Определяются стационарные случайные процессы и подробно обсуждается эргодическое свойство; доказательство эргодической теоремы не приводится, но она иллюстрируется на нескольких изящных примерах. В следующем параграфе вводится понятие спектральной плотности и отмечается ее связь с корреляционной функцией; спектральное разложение самих стационарных случайных процессов отсутствует, но зато спектральная плотность и ее связь с корреляционной функцией рассматриваются и для нестационарных процессов (ср. Page C. H., J. Appl. Phys., 1952, 23, № 1, 103—106; РЖМат, 1956, 3199; РЖФиз, 1956, 7874). В заключение главы рассматриваются некоторые специальные примеры случайных процессов (в частности, в качестве предельного понятия здесь рассмотрен так называемый «белый шум»). Гл. 4 называется «Дробовой эффект и гауссовские случайные процессы» и состоит из сравнительно мало связанных друг с другом частей. В начале главы изучается случайный процесс вида

$$V(t) = \sum_k a_k W(t, t_k),$$

где a_k — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, $W(t, t')$ — заданная функция двух переменных, а моменты t_k распределены вдоль всей временной оси по закону Пуассона; для такого процесса подсчитывается среднее значение, корреляционная функция и спектральная плотность, а также доказывается, что предельный процесс такого типа, описывающий реальной дробовой эффект, будет гауссовским. Далее рассматриваются общие свойства гауссовских случайных процессов и приводится формула для дисперсии выборочного значения корреляционной функции, определенного по конечному отрезку реализации такого процесса. Основная часть главы посвящена вычислению корреляционных функций на выходе важнейших нелинейных систем (например, квадратичного или линейного детектора, ограничителя), на вход которых подается заданный стационарный гауссовский случайный процесс. В заключение рассматривается одна конкретная задача теории автоматического регулирования, связанная с гауссовскими процессами.

Гл. 5—8 посвящены почти исключительно теории прохождения случайных шумов через линейные системы. В гл. 5 рассматриваются в основном стационарные случайные процессы и система с постоянными параметрами; дается представление об общих задачах экстраполирования и фильтрации случайных процессов и о соответствующих линейных задачах, вводится понятие импульсной переходной функции и частотной характеристики линейной системы (с подробным разбором систем, задаваемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами), указывается связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями на входе и на выходе линейной системы и приводятся методы аналитического вычисления среднего квадрата процесса на выходе для случая рациональных спектральной плотности на входе и частотной характеристики системы, а также методы вычисления этого среднего квадрата в любом случае при помощи моделирующих устройств. Гл. 6 посвящена нестационарным задачам (случаю нестационарного процесса на входе, или системы с переменными параметрами, или того и другого вместе); основное внимание здесь уделяется различным методам практического определения корреляционных функций процесса на выходе (применению моделирующих устройств, частотному анализу, методу сопряженной системы и др.). Здесь же специально рассматриваются переходные явления при прохождении стационарных процессов через системы с постоянными параметрами (случай такой системы, включенной лишь до или после некоторого момента времени, можно рассматривать как частный случай переменной системы); кроме того, в заключительном параграфе излагается метод нахождения оптимальной системы из некоторого специального класса переменных систем при помощи метода скорейшего спуска. Гл. 7 посвящена теории Колмогорова—Винера (впрочем, имя А. Н. Колмогорова автором не упоминается) линейных экстраполирования и фильтрации стационарных случайных процессов. После вводного параграфа, в котором задачи об экстраполировании и фильтрации сводятся к решению некоторых интегральных уравнений типа Винера—Хопфа, дается наглядный (но не вполне строгий) разбор этих задач на основе метода Боде и Шеннона (Bode H. W., Shannon C. E., Proc. I. R. E., 1950, 38, № 4, 417—425); затем приводится аналитическое решение соответствующих интегральных уравнений с привлечением теории функций комплексного переменного, и в заключение указывается метод явного нахождения решения для случая рациональных спектральных плотностей с помощью метода неопределенных коэффициентов (основанный на том, что заранее предполагается, что существует решение некоторого специального вида, содержащее неизвестные нам коэффициенты, определяемые затем при помощи непосредственной подстановки «решения» в уравнение). Заключительная гл. 8 содержит некоторые обобщения результатов гл. 7; содержащийся здесь материал во многом опирается на ранее нигде не опубликованные оригинальные исследования авторов. Основное внимание здесь уделено задачам экстраполирования и фильтрации заданного на конечном интервале сигнала $s_1(t)$ вида $s_1(t) = s(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t)$, где $s(t)$ — случайный процесс с известной корреляционной функцией, а $f_k(t), k = 1, \ldots, n$ — известные (случайные) функции; при этом отдельно рассматривается случай, когда $C_1, \ldots, C_n$ — неизвестные нам числа, и ищется наилучшее «несмещенное» решение и отдельно случай, когда $C_1, \ldots, C_n$ — это случайные величины, не коррелированные с процессом $s(t)$ (и с шумом) и имеющие заданную матрицу вторых моментов. В обоих случаях задача сводится к решению некоторых интегральных уравнений, эффективно осуществимому (с привлечением весьма громоздкой техники) лишь в случае стационарных процессов с ра-

циональной спектральной плотностью; кроме того, в случае нестационарного процесса $y(t)$ (суммы «сигнала» $s(t)$ и «шума») такого, что $L_t y(t) = M_t x(t)$, где L_t и M_t — дифференциальные операторы по t (с переменными коэффициентами), а $x(t)$ — «белый шум», решение соответствующих интегральных уравнений удается свести к решению некоторых обыкновенных интегральных уравнений. В последнем параграфе главы (и книги) излагается метод решения некоторых специальных задач об оптимальном нелинейном экстраполировании и фильтрации при наличии гауссовского шума. В приложения вынесены наиболее сложные математические выкладки, требующиеся по ходу изложения (в основном тексте в таких случаях приводится сразу окончательный результат со ссылкой на соответствующее приложение), а также сравнительно подробное изложение ряда вопросов теории моделирующих устройств, используемых в книге.

Общий математический уровень изложения книги выше уровня изложения большинства аналогичных руководств; достоинством книги является также наличие в ней очень богатого числа примеров и задач. А. М. Яглом

8140 К. Теория коммуникации. Доклады, сделанные на симпозиуме «Применение теории коммуникации», состоявшемся в Институте инженеров-электриков в Лондоне, с 22 по 26 сентября 1952 г. Джексон (Communication theory. Papers read at a Symposium on «applications of Communication Theory» held at the Institution of Elecktrical Engineers, London, September 22nd-26th 1952. New York, Academic Press Inc., Publishers London Bufterworths scientific Publications, 1953, 532 s.) (англ.)

8141 К. Вероятность исследования наследственности в единокровных семьях. Комацу, Нисимия (Probabilistic investigations on inheritance in consanguineous families. (Chapters XII—XIV). Komatu Yusaku, Nishimiya Han. Bull. Tokyo Inst. Technol., 1957, B, № 1, 44 pp.) (англ.)

8142 К. Основы статистики для коммерсантов и экономистов. Нитер, Уассерман (Fundamental statistics for business and economics. Neter, Wasserman William New York. Allyn and Bacon, 1956, XIV, 638 pp., ill., maps) (англ.)

8143 К. Стохастические задачи, возникающие в явлении образования очереди у одного объекта, а также в других родственных явлениях. Поллачек (Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phenomènes apparentés. Pollaczek Félix (Mém. sci. math. № 136). Paris, Gauthier—Villars, 1957, 123 p., 2500 fr.) (франц.)

Изучаются системы с ожиданием с одним аппаратом. Через законы распределения времени обслуживания и промежутков времени между прибытиями клиентов определяется функция распределения времени ожидания n-го клиента. Помимо изучавшегося ранее многими авторами стационарного случая, разобран также случай, когда нет стационарного распределения. Показывается, что при пуассоновском потоке вызовов и нормировке $\sqrt{n}$ (n— номер клиента в порядке прихода) получается при $n \to \infty$ предельный закон (усеченный в нуле нормальный закон). Изучается также условное время ожидания, если задан момент прибытия клиента. Рассматриваются некоторые усложненные системы (введение дополнительных задержек, квантование времени ожидания). Исследуется двумерное распределение времен ожидания двух клиентов. Поток вызовов в большей части работы предполагается пуассоновским. В гл. 3 разобран бернулиевский поток вызовов. В последних главах рассматривается общий случай потока. Распределение времени обслуживания считается произвольным, но некоторые частные формулы получены для специальных видов этого распределения. В последней главе изучается система с отказами. Метод исследования — прямые теоретико-вероятностные рассуждения с широким привлечением аппарата аналитических функций и интегрирования в комплексной плоскости. Б. А. Севастьянов

См. также: 7486, 7489, 7741, 7846

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев*

8144 К. Янош Бояи. Жизнь и творчество великого геометра. Тот (Janos Bolyai. Viata si opera marelui geometru. Toth Emeric. Colectia Societatii pentru raspîndirea stiintei si culturii, 98, Bucuresti, Ed. tehnica 1954, 0.75 lei), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 1, 12 (рум.)

8145 К. Сочинения. Том. 6. Конгруэнции прямых и сфер и их изгибание. Бианки (Opere. Vol. 6. Congruenze di rette e di sfere e loro deformazioni. Bianchi Luigi. Roma, Ed. Cremonese, 1957, IV, 331 p., 3000 L), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 674, 363 (итал.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

8146. Интересное приложение тригонометрии. Уэстфал (An interesting application of trigonometry. Westphal Walter R.), School Sci. and Math., 1957, 57, № 9, 735—738 (англ.)

Предлагается при изучении тригонометрических функций в средней школе не ограничиваться их геометрическими приложениями, а рассматривать их приложения к техническим вопросам, в частности рассматривать вращение прямолинейного проводника в однородном магнитном поле относительно оси, параллельной самому проводнику. Ю. А. Шуб-Сизоненко

8147. Условия, при которых движение точки является плоским. Соколов Б. В., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7(а), 101—105

Приведено доказательство общеизвестного факта, что если всякая соприкасающаяся плоскость линии проходит через одну и ту же точку, то эта линия — плоская. На основании этого предложения доказывается, что траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, при сопротивлении, направленном обратно скорости, является плоской. В. Н. Скрыдлов

8148. Аналитическая кинематика пространственного механизма иглы стачивающе-обмоточной машины. Можаев И. В., Научн. тр. Моск. технол. ин-та легкой пром-сти, 1956, № 7, 192—199

Рассматриваемый механизм состоит из кривошипа, нескольких коромысел, поводка, и игловодителя. Из элементарных геометрических фигур получается выражение угла поворота одного коромысла в функции угла поворота кривошипа и устанавливается зависимость между расстоянием, проходимым игловодителем и углом поворота того же коромысла.

Найденные уравнения движения иглы позволяют аналитически определить положение иглы для произвольного положения кривошипа. В. С. Люкшин

8149. Некоторые вопросы геометрии проекции сферической эвольвенты. Данилюк П. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1955, вып. 12, 47—51

Рассматриваются некоторые вопросы из геометрии конических зубчатых колес. Доказывается, что:

1) общая нормаль сферической эвольвенты при симметричном измерении больше суммы длин радиусов

кривизны проекций разноименных сферических эвольвент в точках, совпадающих с концами общей нормали,

2) общая нормаль сферической эвольвенты при симметричном измерении больше общей нормали при несимметричном измерении.

Выводятся формулы для определения: 1) угла развернутости проекции сферической эвольвенты в точке пересечения ее с проекцией делительной окружности конического зубчатого колеса, 2) угла зацепления проекции сферической эвольвенты в той же точке, 3) эвольвентного угла проекции сферической эвольвенты.

З. И. Прянишникова

8150. О равновесии оболочки с краевой нагрузкой. Гюнтер (Über das Gleichgewicht an einer randbelasteten Schale. Günther Wilhelm), Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges., 1956, 8, 111-120 (нем.; рез. англ.)

Рассматривается под действием сил и момента упругая оболочка в равновесии. Если поверхность относительно ортогональной сети параметрических линий дана дифференцируемой векторной функцией, то условия равновесия приводятся к шести линейным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка с 12 величинами, характеризующими состояние напряжения. Общее решение зависит от 6 произвольных функций. Автор показывает, что эти последние могут быть сведены к двум векторным функциям напряжений. Для оболочки, край которой нагружен силами и моментами, автор решает задачу о построении величин напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия.

Для безмоментной оболочки общее решение зависит от четырех произвольных функций. Формулы применяются к мембране и получается для нахождения одной неизвестной функции напряжения дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, найденное ранее Лагалли. Имеются опечатки. В. С. Люкшин

8151. Графический способ построения поверхностей влияния для реакций стержней, прикрепляющих твердое тело к фундаменту. Бойдалов А. К., Уч. зап. Ярославск. технол. ин-та, 1957, 2, 273—281

Поверхности влияния позволяют просто найти величины реакций стержней и произвести весь расчет пространственной стержневой системы при наличии подвижной внешней нагрузки. В работе рассматривается для общего случая закрепления твердого тела шестью стержнями графический способ построения поверхностей влияния, являющихся плоскостями. На основании разложения одной силы на шесть направлений по способу автора определяются опорные реакции всех стержней и строятся их поверхности влияния. В. С. Люкшин

8152. Обратная геодезическая задача. Бахвалов С. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 143—151

Обратная геодезическая задача состоит в следующем: на эллипсоиде вращения $x=a\cos u\cos v$, $y=a\cos u\sin v$, $z=b\sin u$, $a=6378{,}245$ *км*, $b=6356{,}86$ *км* определить длину дуги геодезической линии, соединяющей данные точки $M_1(u_1, v_1)$, $M_2(u_2, v_2)$.

В решении предполагается, что: 1) $v_2>v_1$, $u_2>u_1$; 2) точки M_1 и M_2 расположены так, что u изменяется монотонно вдоль дуги геодезической, соединяющей точки M_1, M_2.

Длина дуги геодезической определяется формулой

$$S=a\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{(1-\lambda^2\cos^2 u)+\cos^2 u\left[\frac{\cos t\sqrt{1-\lambda^2\cos^2 u}}{\cos u\sqrt{\cos^2 u-\cos^2 t}}\right]^2}\,du,$$

где $\lambda^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=0{,}00669342$, t — приведенная широта параллели, которой касается геодезическая.

Е. А. Морозова

8153 Д. Приложения винтовых операторов к механике. Кислицын С. Г. Автореф. дисс. докт. физ-матем. н., Ленингр. политехн. ин-т, Л., 1958

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8154. Относительно объема тетраэдра. Поп (Asupra volumului tetraedrului. Pop Leontina), Gaz. mat. si fiz., 1958, **BIX**, № 1, 24—26 (рум.)

8155. Элементарные теоремы о простых отношениях. Лауффер (Elementare Sätze über Teilverhältnisse. Lauffer R.), Math.-phys. Semesterber., 1957, 5, № 3-4, 289—292 (нем.)

Рассмотрены некоторые свойства простого отношения $T(ABC)$ трех точек на прямой. Полагая $T(ABC)=t$, автор элементарными приемами устанавливает следующие зависимости: $T(ACB)=1-t$; $T(BAC)=1:t$; $T(BCA)=(t-1):t$; $T(CAB)=1:(1-t)$; $T(CBA)=t:(t-1)$.

Далее, с помощью этих зависимостей доказаны четыре теоремы, относящиеся к полному четырехугольнику A_1, A_2, A_3, A_4 с прямыми $g_{ik}=[A_iA_k]$ и углами $P_l=g_{ik}\times g_{i4}$ полярного треугольника

1) $T(P_3A_2A_1)\cdot T(A_2A_3P_1)\cdot T(A_3P_3A_4)=1$;

2) $T(A_1A_2P_3)\cdot T(A_2A_3P_1)\cdot T(A_3A_1P_2)=-1$;

3) $T(A_4A_1P_1)+T(A_4A_2P_2)+T(A_4A_3P_3)=1$;

4) $T(A_4A_1P_1)=\operatorname{ctg}\widehat{g_{12}g_{23}}\cdot\operatorname{ctg}\widehat{g_{23}g_{31}}$.

В. С. Малаховский

8156. Относительно «ножа» Архимеда. Тебо. (A propos du tranchet d'Archimède. Thébault Victor), Enseign. math., 1957, 3, № 2, 141—149 (франц.)

В заметке использована инверсия. Автор показывает на решении следующих задач, что удачный выбор полюса и модуля инверсии упрощает решение и дает ценные результаты.

В концах фиксированной хорды AB круга (O) радиуса R проведены два круга (O_1) и (O_2) радиусов R_1 и R_2, касающиеся круга (O) и пересекающиеся в точке C на хорде AB, далее построены окружности (ω_1), (ω_2),...,(ω_n) радиусов ϱ_1, ϱ_2,...,ϱ_n, касающиеся каждый соседнего круга и кругов (O) и (O_1) или (O) и (O_2). Таким образом получаются две цепи (C_1), (C_2) кругов (ω_1), (ω_2),...,(ω_n), касающиеся круга (O_1) по одну или другую сторону хорды AB и две другие цепи, касающиеся круга (O_2) и аналогично расположенные относительно хорды AB. Используя инверсию $i=(A, AB^2)$ с полюсом A и модулем AB^2, автор просто решает задачи: 1) находит огибающую кругов (ω_n), 2) находит геометрическое место центров кругов (ω_n), 3) геометрическое место точек касания круга (O_1) и (ω_n). Эти задачи решаются при данном n. При совпадении хорды AB с диаметром окружности (O) получается известная задача Архимеда (РЖМат, 1956, 4018). Задача обобщается на пространство. С. И. Зетель

8157. Построение осей для эллипса, заданного парой сопряженных диаметров или кинематически. Краер (Eine Achsenkonstruktion für eine durch konjugierte Durchmesser gegebene oder dieselbe, aber kinematisch erzeugte Ellipse. Kraker J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 7, 319—320 (нем.)

Пусть эллипс задан сопряженными диаметрами u и d. Точка X — один конец диаметра d: $d\cap u\equiv M$.

Построим прямую $g=XU\perp u$; $U\subset u$. На g построим отрезок $XV=\dfrac{XU}{2}$. Если отрезок UV будет скользить своими концами соответственно по прямым u и $v=MV$, то

точка X, закрепленная на прямой UV, будет описывать эллипс, имеющий данные сопряженные диаметры. Около $\triangle MUV$ опишем окружность h с центром O. XO пересекает h в точках P и Q. MP и MQ определяют положение осей эллипса (большая ось равна $2XQ$, малая $2XP$).

В. А. Маневич

8158. Элементарная теория построения правильных 3-, 5-, 7-, 13-, 17- и 19-угольников циркулем и трисектором. Россье (Théorie élémentaire de la construction des polygones réguliers de 3, 5, 7, 13, 17 et 19 côtés, au compas et au trisecteur. Rossier Paul), Arch. sci., 1957, **10**, № 1, 100—105 (франц.)

Теорема сложения косинусов позволяет установить, что 3-, 5- и 17-угольники могут быть построены циркулем, 6-, 7-, 13- и 19-угольники циркулем и трисектором — прибором для деления угла на три равные части.

Пусть C — центр, $0, 1, 2 \ldots n-1$ — вершины правильного n-угольника. Проектируя векторы $C0, C1, \ldots, C(n-1)$ на вектор $C0$, получаем $\sum \cos j\alpha = 0$ $(j = 0, 1, \ldots n-1)$. Отсюда

$$\sum \cos j\alpha = -\frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1/2).$$

Полученное уравнение эквивалентно известному уравнению Гаусса и используется автором для построения правильных n-угольников.

С. И. Зетель

8159. Теорема, эквивалентная теореме Чевы. Лоповок (Twierdzenie równowazne twierdzeniu Cevy. Łopowok Lew), Matematyka, 1957, **10**, № 4, 2—5 (польск.)

Теорема. Если прямые AD, BE, CF, выходящие из вершин треугольника ABC, образуют со сторонами треугольника соответственно углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ и пересекаются в одной точке, то

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$$

Справедлива и обратная теорема. На основании обратной теоремы доказывается, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, биссектрисы двух внешних углов пересекаются на биссектрисе третьего внутреннего угла, высоты треугольника пересекаются в одной точке. На основании прямой теоремы получается, что

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C,$$

где φ — угол Брокара (известное соотношение).

С. И. Зетель

8160. Теоремы, эквивалентные теоремам Менелая и Чевы. Ионеску (Teoreme echivalente cu teoremele lui Menelaus si Ceva. Ionescu D. V.), Gaz. mat. si fiz., 1957, **B8**, № 10, 534—541 (рум.)

Доказываются теоремы:

1. (Эквивалентная теорема Менелая). Для того чтобы точки A', B', C', взятые на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\overline{A'B}\,\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} - \overline{A'C}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A'B} - \overline{A'C}. \qquad (1)$$

2). (Эквивалентная теореме Чевы): Если A', B', C' — точки на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC и прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке или параллельны, то

$$\overline{A'B}\,\frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} + \overline{A'C}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \overline{A'B} + \overline{A'C}. \qquad (2)$$

3) (Обратная теореме Чевы): Если A', B', C' — точки на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC и выполняется соотношение (2), то прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке или же параллельны.

И. К. Парно

8161. Об одном построении, связанном с треугольником. Боттема (Une construction par rapport à un triangle. Bottema O.), Nieuw arch. wiskunde, 1957, **5**, № 2, 68—70 (франц.)

Заметка развивает результаты Тюммерса (Tummers J. H., РЖМат, 1958, 2314), показавшего, что если в плоскости треугольника ABC даны две точки L_1 и L_2 и если стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, образованного основаниями прямых AL_1, BL_1, CL_1, пересекаются прямыми AL_2, BL_2, CL_2 соответственно в точках P, Q, R, то прямые A_1P, B_1Q, C_1R пересекаются в одной точке $L_3 = (L_1, L_2)$. Точки L_1 и L_2 могут быть переставлены, т. е. $(L_1, L_2) = (L_2, L_1)$. В заметке Туммерса приводятся различные примеры, в частности если L_1 — центр тяжести треугольника, а L_2 — его ортоцентр, то L_3 — точка Лемуана.

В настоящей заметке доказана теорема, что точка L_3 — полюс прямой L_1L_2 относительно конического сечения, определяемого точками A, B, C, L_1, L_2. Если точка L_1 — центр тяжести треугольника, точка L_2 — его ортоцентр, то из доказанной теоремы следует, что точка Лемуана — полюс прямой Эйлера относительно конического сечения, проходящего через точки A, B, C, Z, H. Если точки L_1 и L_2 — изотропные точки плоскости, то L_3 — центр круга, описанного около треугольника. Ставится и решается следующая задача: отыскать тройку точек L_1, L_2, L_3 такую, что $(L_1, L_2) = L_3$; $(L_2, L_3) = L_1$; $(L_3, L_1) = L_2$. Такими точками являются изотропные точки плоскости и вершины равностороннего треугольника.

С. И. Зетель

8162. О торичеллиевых отрезках. Тоскано (Sui segmenti torricelliani. Toscano Letterio), Giorn. mat. Battaglini, 1957, **85**, № 1, 118—125 (итал.)

Рассматриваются отрезки Торичелли t и t', определенные в треугольнике равенствами

$$2t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\Delta\sqrt{3},$$

$$2t'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta\sqrt{3}$$

(a, b, c — стороны треугольника, Δ — площадь). $t = AA'$, где A' — вершина равностороннего треугольника BCA', построенного на стороне BC в плоскости треугольника и расположенного вне треугольника; $AA' = BB' = CC'$, $t' = AA''$, где A'' — вершина равностороннего треугольника BCA'', построенного на стороне BC в плоскости треугольника и расположенного внутри треугольника; $AA'' = BB'' = CC''$. Приводится ряд метрических соотношений, некоторые из которых даны Кавалларо, например $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{t^2 - t'^2}{t^2 + t'^2}$, где ω — угол Брокара треугольника ABC.

Дается обобщение торичеллиевых отрезков на случай, когда вершины A, B, C равносторонних треугольников находятся не в плоскости треугольника, а в плоскостях, образующих с плоскостью треугольника угол φ.

В этом случае

$$2t^2(\varphi) = a^2 + b^2 + c^2 + 4\Delta\sqrt{3}\cos\varphi;$$

$$2t'^2(\varphi) = a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta\sqrt{3}\cos\varphi;$$

при $\varphi = 0$ получаются соответственно отрезки $2t^2$ и $2t'^2$.

С. И. Зетель

8163. Об инверсии относительно треугольника. Гурматай (Sur l'inversion triangulaire. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1956, **65**, № 4-6, 268 (франц.)

Теорема. Степень точки P относительно круга, описанного около треугольника, подерного основному треугольнику $A_1A_2A_3$ (относительно точки P), равна произведению расстояния точки P' (инверсной P относительно треугольника $A_1A_2A_3$) до одной из вершин и расстоянию точки P до соответствующей стороны треугольника, подерного точке P относительно $A_1A_2A_3$.

Теорема доказана при помощи комплексных координат. С. И. Зетель

8164. Об инверсии относительно треугольника. Тебо (Sur l'inversion triangulaire. Thébault V.), Mathesis, 1956, **65**, № 7-9, 417—418 (франц.)

Теорема. Произведение расстояния точки F' до одной из вершин основного треугольника T и расстояния изогональной ей точки до соответствующей стороны треугольника подерного точки F относительно треугольника T, равно квадрату нефокальной полуоси конического сечения с фокусом F и F', вписанного в треугольник T. С. И. Зетель

8165. Определение ядра произвольного трапезоида. Барта (Die Ermittlung des Kerns einer beliebigen Viereckfläche. Barta J.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1957, **18**, № 3-4, 393 — 398 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Показан метод определения ядра трапезоида без использования момента инерции и антиполярности. Пусть дан трапезоид $FGHE$. $FH \cap GE \equiv I$.

$IG = I'E$ (I' и I по одну сторону от E),

$FI'' = HI$ (I'' и I по одну сторону от F),

Z — середина отрезка $I'I''$.

Соединим точку Z с серединами сторон трапезоида. Пусть M — середина стороны GH, тогда точка A ядра трапезоида, лежащая на ZM, определяется по формуле

$$ZA = \left(1 - \frac{1/2}{1 - \frac{IG \cdot IH}{EG \cdot FH}}\right) ZM.$$

Точки ядра, соответствующие остальным сторонам трапезоида, находятся аналогично. В. А. Маневич

8166. О вписанном шестиугольнике. Тебо (Sur l'hexagone inscriptible. Thébault V.), Mathesis, 1957, **66**, № 7—9, 325—326 (франц.)

Мато (Mathot E., Mathesis, 1897, 139) доказал теорему: Если главные диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 шестиугольника $H \equiv A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (выпуклого или невыпуклого), вписанного в круг, пересекаются в одной точке, то произведение $A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6$ нечетных сторон равно произведению $A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1$ четных сторон, и обратно.

В заметке показано, что обратная теорема верна только для выпуклого шестиугольника. С. И. Зетель

8167. Наглядное изображение алгоритма арифметического-гармонического среднего на касательных к кругу. Бёрма (Des Algorithmus des arithmetisch-harmonischen Mittels, veranschaulicht an der Kreis—tangente. Boerma E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 8, 360 — 361 (нем.)

Возьмем полукруг с концами в точках M и N и центром O. Из точек M, N и O проведем соответственно перпендикуляры a,b и c к отрезку MN. Проведем произвольную касательную t к полукругу; T — точка касания. $t \cap a \equiv A$; $t \cap b \equiv B$; $t \cap c \equiv S$. Из S опустим на a перпендикуляр SA_1; из T опустим на b перпендикуляр TB_1; A_1M и B_1M — соответственно средняя арифметическая и средняя гармоническая между AM и BM. A_1B_1 будет касательной к полуокружности.

Повторяя указанные построения для A_1B_1 и т. д., получим на a ряд точек (1) A, A_1, A_2, ...; на b ряд точек (2) B, B_1, B_2, ... Если примем MN за ось абсцисс в прямоугольной системе координат, то числовые ряды, соответствующие точечным рядам (1) и (2), стремятся к одному и тому же пределу. Этим пределом является число соответствующее точкам A_n и B_n, высекаемым на a и b касательной к полукругу, параллельной MN, $A_nM = B_nN = \sqrt{AM \cdot BN} = r$. В. А. Маневич

8168. Аксиома Архимеда и теорема Мора-Маскерони. Кейне (Het axioma van Archimedes en de stelling van Mohr-Mascheroni. Kijne D.), Simon Stevin, 1957, **31**, № 3, 97—111 (гол.)

Аксиому Архимеда автор формулирует следующим образом: Если a, b, и p — три точки в евклидовой плоскости E, причем расстояние $(ab) > 0$, а Z — совокупность окружностей c_n с центром a и радиуса $o_n = n(ab)$, $n = 1, 2, 3....$, то Z содержит по крайней мере одну окружность, внутри которой лежит p.

Теорема Мора-Маскерони в ее обычной форме гласит: все евклидовы построения циркулем и линейкой, если не считать проведения прямых, можно выполнить и одним циркулем.

Боттема (1938) предложил доказательство необходимости аксиомы Архимеда для справедливости теоремы Мора-Маскерони. Однако у Бибербаха (Bieberbach L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel, 1952) это значение аксиомы Архимеда обходится молчанием (хотя фактически аксиома и используется), а у Лебега (Lebesgue H. Leçons sur les constructions géométriques, Paris, 1950) сделана неудачная, по мнению автора, попытка оспорить это значение.

В статье исследуется связь между аксиомой Архимеда и теоремой Мора-Маскерони при условии, что конструктивная задача разрешима лишь в том случае, когда число элементарных операций, необходимых для решения ограничено (а не только конечно). При указанном условии, как заметил Фрёйденталь, из принятия аксиомы Архимеда следует несправедливость теоремы Мора-Маскерони в ее обычной форме.

Автором предложена следующая «корректная» форма теоремы Мора-Маскерони:

Пусть B — базис (исходная фигура, *реф.*), состоящий по крайней мере из двух различных точек, в архимедовски упорядоченной евклидовой геометрии E', V — совокупность операций, выполнимых циркулем и линейкой, M — совокупность операций, выполнимых циркулем. Тогда все точки и окружности, достижимые из B в конечное число шагов посредством операций из V, достижимы в конечное число шагов и посредством операций из M.

При этом совокупность V содержит следующие постулируемые операции: 1) операцию L_1, порождающую для каждой пары различных точек a и b инцидентную с ними прямую; 2) операцию P_1, порождающую точку пересечения двух непараллельных прямых; 3) операцию C_1, порождающую для двух различных точек a и b окружность с центром a и радиуса (ab); 4) операцию P_2, порождающую из прямой и окружности, пересекающихся или касающихся друг друга, обе (возможно совпадающие) точки их пересечения; 5) операцию Bpp, позволяющую определить, какому из двух соотношений $a = b$, $a \neq b$ удовлетворяют точки a и b; 6) операцию Bll позволяющую определить, какому из двух соотношений $\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{b}$ удовлетворяют прямые $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 7) операцию $Bppp$ позволяющую определить, какая из трех коллинеарных точек a, b, c лежит между двумя другими; 8) операцию S, позволяющую выбрать из конечного множества построенных равноценных объектов некоторой определенный объект. (За доказательством, что эта система постулатов достаточна для выполнимости обычных постро-

ний циркулем и линейкой, автор отсылает к своей монографии (Plane construction field theory. Assen, 1956).;

Совокупность M охватывает операции: 1) операцию C_1 2) операцию P_3, порождающую обе (возможно и совпадающие) точки пересечения двух окружностей; 3) операцию B^{pp}; 4) операцию B^{cc}, позволяющую определить, имеют ли две различные окружности хотя бы одну общую точку; 5) операцию S.

Автор дает доказательство необходимости аксиомы Архимеда для теоремы Мора-Маскерони в ее „корректной" форме.

Затем устанавливается аналог теоремы Мора-Маскерони в упорядоченной евклидовой геометрии без аксиомы Архимеда. Отсутствие последней компенсируется дополнением системы постулатов M специальной операцией адъюнкции A_n, позволяющей присоединять к фигуре F n-ю точку мажорантного ряда $\{t_k\}$. При этом под мажорантным рядом понимается последовательность точек $t_1, t_2, \ldots,$ обладающая двумя свойствами: 1) $(at_i) < (at_{i+1})$ для всякого $i > i_0(a)$; 2) для всякой точки p существует хотя бы одна точка t_ν такая, что $(ap) < (at_\nu)$ (здесь a — определенная точка). Библ. 13 назв.

Ю. М. Гайдук

8169. О двойных точках конформных преобразований E^3. Алардэн (Sur les points doubles des transformations conformes de E^3. Alardin Félix), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 6, 369 — 386 (франц.)

Дается классификация конформных преобразований трехмерного евклидова пространства по двойным точкам. Задача сводится к исследованию уравнения $y^2 = by + c$, в котором b, c и y — кватернионы. А.С. Феденко

8170. О взаимных свойствах геометрических образов. Никулин Н. А., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, **21**, 5—40

Дается распространение принципа двойственности двумерного пространства на метрическую область. Из рассмотрения равенства $\xi x + \eta y = 1$, как уравнения точки (ξ и η — плюкеровы коэффициенты прямой), выводятся понятия углового коэффициента точки, угла двух точек, расстояния между двумя прямыми на плоскости и др. Приводится аналогия между основными формулами аналитической геометрии на декартовой плоскости и соответствующими формулами геометрии на плоскости Плюкера. Рассматриваются понятия абсолюта взаимной плоскости, а также взаимные свойства плоских алгебраических кривых.

Далее определяются некоторые взаимные понятия, основанные на применении принципа двойственности в трехмерном пространстве, например понятия угла между двумя точками, расстояния между двумя плоскостями, а также некоторые свойства взаимных поверхностей.

З. И. Прянишникова

8171. Полярные тангенциальные координаты в пространстве и их применение. Жакоб (Les coordonnées polaires tangentielles dans l'espace et leurs applications. Jacob Maurice), Rev. math. spéc., 1958, **68**, № 8, 193—196 (франц.)

8172. Кривизна кривой в экстремуме. Гофман (Kurvenkrümmung an Extremstellen. Hofmann O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 2, 66 — 69 (нем.)

При преподавании экстремумов кривых автор считает, что выгодно вводить кривизну кривой в экстремуме. После наводящих рассуждений устанавливается соотношение $\rho = \frac{1}{f''(x_0)}$, причем $f'(x_0) = 0$. По знаку ρ легко различается min и max.

Е. А Морозова

8173. Симметрия относительно некоторой кривой. Крейндлер (Simetria față de o curbă. Kreinbler O.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, **18**, № 3-4, 17 — 34 (рум.; рез. русск., франц.)

Точка B' называется симметричной с точкой B по отношению к данной кривой M, если прямая BB' является нормалью к кривой M в какой-либо точке A и точка A делит отрезок BB' пополам.

Кривая E, симметричная с некоторой кривой I по отношению к кривой M, определяется как геометрическое место точек, симметричных с точками кривой I по отношению к кривой M.

Показано, как найти уравнение кривой E, если известны уравнения кривых M и I и рассмотрен ряд примеров.

К. С. Сибирский

8174. Острый угол в аналитической геометрии. Субраманьям (Acute angle in analytical geometry. Subramanyam S. S.), Math. Student, 1957, **25**, № 1-2, 32 — 39 (англ.)

Для трех различных прямых $y = m_1x$, $y = m_2x$ и $y = mx$ средствами проективной геометрии устанавливается элементарное правило: если $1 + m_1m_2 \neq 0$, то прямая $y = mx$ проходит внутри острого угла, образованного первыми двумя прямыми, в том и только том случае, когда $sgn(m_1 - m)(m - m_2) = sgn(1 + m_1m_2)$. В частности, если $y = mx$ есть биссектриса $\frac{y - m_1x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = +\frac{y - m_2x}{\sqrt{1 + m_2^2}}$, то условие приобретает вид $1 + m_1m_2 < 0$.

И. С. Иохвидов

8175 К. Геометрия на плоскости. Изд. 3-е переработ. Кеплер (Plane geometry. Rev. 3rd ed. Keppler K. Bassler. New York, F. Ungar, 1957, 359 pp. 4,75 doll.), Publishers' Weekly, 1957, **172**, № 26, 86 (англ).

8176 К. Элементы практической геометрии. Изд. 14-е. Бурдон (Notions de géométrie pratique. 14e éd. Bourdon Jules. Paris, Eyrolles, 1956, 95 p., ill., 400 fr.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 46, 1046 (франц.).

8177 К. Дополнения, касающиеся векторов. Лакас-Нетту (Complemento sôbre vetores. Lacaz Netto Francisco A. S. Paulo, Liv. Notel, 1957, 111 p., 90,00 cruz), Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 4, 189 (порт.)

8178 К. Курс аналитической геометрии. Т. 1. Геометрия на плоскости. Годьо (Cours de géométrie analytique. T. 1. Géométrie plane. 8e éd. Gaudiot Paul Paris, Eyrolles, 1956, 381 p., ill., 1400 fr.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 45, 1020 (франц.)

8179 К. Высшая математика. Ч. I. Аналитическая геометрия. 3. стереот. изд. Брадистилов (Висша математика. Ч. I. Аналитична геометрия. 3. стереот. изд. Брадистилов Г. София, Наука и изкуство, 1957, VII, 368 стр., 11.70 лв.), Бълг. книгопис, 1957, **61**, № 4, 10 (болг.)

8180 К. Векторный анализ. Учебн. пособие для студ. III курса. 2 изд. Никитин Б. Д., Родионов С. В., Всес. заочн. энерг. ин-т, М., 1957, 75 стр., илл.

8181 К. Сборник задач по аналитической геометрии. Учебное пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Изд. 2-е, переработ. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. М., Гостехиздат, 1957, 384 стр., илл.

Во втором издании сборник содержит 1901 задачу, охватывающую аналитическую геометрию на плоскости, векторную алгебру и аналитическую геометрию в пространстве. Задачи расположены в систематическом порядке и сопровождаются в начале каждой главы основными определениями, формулами и теоремами, а также разбором решений некоторых типовых и более трудных задач. В конце задачника даны ответы, часть из которых дополнена небольшими указаниями.

Л. Е. Евтушик

8182 К. Элементарная координатная геометрия. Изд. 2-е. Максуэлл (Elementary coordinate geometry.

2nd ed. Maxwell Edwin Arthur. Oxford, Clarendon Press, 1958, 336 pp., ill., 25 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 427, 11 (англ.)

8183 К. **Трактат по геометрии. Новое издание. I часть. Геометрия на плоскости. Руше, Комбрусс** (Traité de géométrie. Nouv. éd. I part. Géométrie plane. Rouché Eugène, Comberousse Charles de. Paris, Gauthier-Villars, 1957, XLII, 547 p., ill., 1500 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 4, 101 (франц.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8184. **Уточнение некоторых теорем. А. К. Власова, Анисимова Е. П.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 157—163

Даны уточнения некоторых теорем А. К. Власова о свойствах кубических полярных систем для тех случаев, когда среди их корней имеются кратные. Рассматривается линейный ряд g_3^2 третьего порядка второй размерности (∞^2 троек точек) на кривой второго порядка a^2, который высекается связкой (∞^2) конических сечений S_2, принадлежащей сети конических сечений (∞^3) S_3 с двумя базисными точками. В дальнейшем доказывается, что построенный линейный ряд g_3^2 тождествен кубической полярной системе Власова.

В известном отображении сети конических сечений S_3 в точки трехмерного пространства (PC) образом связки кривых S_2, определяющих полярную систему, является плоскость α; кривые сети S_3, оскулирующие кривую второго порядка a^2, отображаются в точки пространственной кривой третьего порядка a^3; корням полярной системы (совпадающим тройкам точек) соответствуют точки пересечения плоскости α с кривой α^3. При таком отображении теоремы Власова формулируются в терминах инцидентностей трехмерного пространства. Полярным системам с кратными корнями соответствуют плоскости, касающиеся или соприкасающиеся α^3, а возникающие при этом особенности легко учитываются.

О. А. Котий

8185. **Теоремы Чевы и Менелая в n-мерном пространстве. Бескин Н. М.**, Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 119—127

Основная часть реферируемой работы была сообщена на III Всес. матем. съезде (РЖМат, 1957, 5826). В работе сформулированы аналоги теоремы Чевы и Менелая для n-мерного проективного пространства. Приведены проективное (в терминах инцидентности) и аффинное (с использованием барицентрических координат) доказательства теоремы Чевы. Теорема Менелая выводится из теоремы Чевы.

П. М. Олоничев

8186. **Проведение касательных к произвольным выпуклым плоским кривым. Белов П. М.**, Тр. Астраханск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 4, 70—82

Предлагаются способы приближенного построения касательных: 1) прямой — к двум кривым (3 способа), 2) окружности — к двум кривым (3 способа) и 3) окружности — к трем кривым.

Для всех трех задач первый способ заключается в построении последовательных приближений при помощи секущих прямых или соответственно, окружностей. Точки касания находятся при помощи построения вспомогательной кривой типа кривой ошибок. В других способах в качестве последовательных приближений используются касательные или нормали к заданным кривым. Исследование сходимости и возможности построения не дается.

Примечание референта. Автор не замечает того, что построение каждой касательной или нормали в способах 2-м и 3-м также требует построения серии последовательных приближений, что делает эти способы практически непригодными.

А. С. Лейбин

8187. **Получение фронтальной аксонометрии и военной перспективы методом деформации. Русишвили О. С.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1, (49), 198—206

Предлагается оригинальный способ построения фронтальной аксонометрии по данному эпюру Монжа при помощи двух воображаемых деформаций точек тела в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций. Доказывается, что полученная соответственным образом фронтальная проекция может рассматриваться как фронтальная аксонометрия.

Аналогичная двукратная деформация в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости, дает в горизонтальной проекции изображение, являющееся военной перспективой.

З. И. Прянишникова

8188. **О точном построении разверток конических поверхностей. Лаперашвили М. Л.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1 (49), 166—175

Подсчитывается погрешность, которая получается при построении развертки наклонного кругового конуса. Предлагается построение развертки с использованием номограммы, учитывающей влияние на точность развертки отношения радиуса основания конуса к радиусу кривизны обертки.

Показано применение метода к построению разверток конусов с другими плоскими, а также с пространственными направляющими.

З. И. Прянишникова

8189. **Новые приемы построения собственных и падающих теней в ортогональных проекциях и перспективе. Метревели М. И.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 207—217

Предлагается метод точного построения собственных и падающих теней в ортогональных проекциях с применением аксонометрической проекции оригинала, основанный на обобщении метода обратных лучей, т. е. при помощи построения тени на вспомогательной плоскости. Приведен пример построения контура тени шара на многограннике и контура их общей тени при помощи прямоугольной изометрии. Показано применение метода к перспективным изображениям. Приведены примеры.

З. И. Прянишникова

8190. **Против извращенного толкования вопроса о видимости прямой. Смирнов Г. И.**, Сб. научно-техн. работ Азовско-Черноморск. ин-та механиз. с. х., 1957, вып. 10, 333—340

Указывается на противоречивость некоторых рекомендаций об обозначении видимости прямой на эпюре, имеющихся в учебниках по начертательной геометрии. Рекомендуется вопрос о видимости прямой решать трижды, для каждой проекции отдельно, помещая глаз в соответствующий несобственный центр проектирования (применительно к закону образования эпюра Монжа) и считая плоскости проекций непрозрачными

З. И. Прянишникова

8191. **Построение кривой двоякой кривизны четвертого порядка по восьми ее независимым точкам (Методический очерк). Боярчук А. И.**, Уч. зап. Грозненск. гос. пед. ин-та, 1956, № 7, 88—93

Разрабатывается способ построения пространственной кривой четвертого порядка, заданной восьмеркой точек общего положения, как линии пересечения двух гиперболоидов, определяемых проективными пучками плоскостей.

З. И. Прянишникова

8192. **Эпюр четырехмерного евклидова пространства и его свойства. Наумович Н. В.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 21—30

Предлагается элементарное истолкование построения эпюра точки четырехмерного евклидова пространства, основанное на свойствах евклидова пространства трех измерений, из которых выводится соответствующее обьяснение к решению основных метрических и пози-

ционных задач; при этом приводятся оригинальное решение некоторых вопросов. З. И. Прянишникова

8193. Геометрическое обоснование некоторых «сюрфасографических» способов построения кривых поверхностей. Хомутов К. М., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1957, вып. 38, 77—86

Сюрфасографические способы построения сечений сложной поверхности (штампы, контроль и т. п.) являются одним из видов пропорционального построения кривых поверхностей с применением двух ключей пропорциональности (треугольных или трапецоидальных) и одной системы параллельных плоскостей.

Автор показывает, что такие способы основаны на топологических преобразованиях заданной поверхности P. Поверхность преобразуется в косую плоскость, вертикальная проекция которой представляет собой первый ключ пропорциональности для определения координаты Z, затем P преобразуется в треугольник, горизонтальная проекция которого определяет x; координата y определяется положением секущих плоскостей. Дается правило построения точки по ее преобразованиям. В. С. Люкшин

8194. Аксонометрические проекции очерков тел со сложными криволинейными контурами. Бал ябин А. С., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 167—176

Предлагается способ построения аксонометрического изображения очерка тела с помощью аксонометрической проекции контура собственной тени тела (проектирующие лучи принимаются при этом за лучи света). При заданном изображении тела и направлении аксонометрического проектирования в ортогональных проекциях строят сначала контур собственной тени тела, затем, размещая относительно тела координатные оси (проекции последних дают аксонометрические оси), определяют координаты отдельных точек контура собственной тени относительно введенной координатной системы, после чего строят по ним аксонометрическое изображение очерка тела. Приведены примеры такого построения изометрических проекций параболоида, эллипсоида вращения и грузового крюка, а также диметрической проекции тела вращения с коробовой образующей. З. И. Прянишникова

8195. Новые способы построения триметрических осей. Задорожный А. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1955, вып. 12, 25—32

Рассматриваются некоторые новые графические способы построения триметрических осей по заданным углам наклона координатных осей в пространстве к плоскости чертежа, принятой за аксонометрическую плоскость проекций, а также по заданным коэффициентам искажения по осям и другим данным.

Рекомендованные способы удобны в применении в тех случаях, когда проектируемые тела требуется изображать в заданном положении. З. И. Прянишникова

8196. Построение прямоугольной аксонометрической проекции окружности в любой плоскости. Задорожный А. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1954, вып. 16, 99—103

Приводится: 1) Пример построения триметрических проекций окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, для чего используется треугольник следов. 2) Пример построения аксонометрической проекции окружности, расположенной в произвольной наклонной плоскости. Показывается, что для этой цели необходимо найти прямой угол, лежащий в этой наклонной плоскости, а затем при его помощи построить треугольник следов, используемый для построения искомой проекции окружности. Если такого угла нет, нужно его построить. Приведенные построения несколько проще обычных. Н. Е. Наумович

8197. О механическом построении аксонометрических чертежей. Крот А. М., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1957, 20, 308—326

Статья посвящена описанию приборов для вычерчивания аксонометрических изображений, разработанных на кафедре начертательной геометрии и инженерной графики КПИ.

Схема приборов основывается на установлении проективного соответствия между проекциями, что дает возможность установить определенную графическую связь между точками комплексного и аксонометрического чертежа. В простейшем случае графическая связь устанавливается двумя пучками параллельных прямых. В случае сохранения проекционной связи между ортогональными проекциями графическая схема представляет трехзвенник. В наиболее общем случае (при косоугольной аксонометрии) графическая связь устанавливается по четырехзвеннику.

Приборы представляют собой системы линеек, установленных под определенными углами, кромки которых моделируют положение линий построения. Аксонометрическое изображение точки получается как результат пересечения кромок этих линеек.

Подробно рассмотрены конструкция, настройка и действие приборов, основанных на всех трех видах графической связи.

Анализ эффективности приборов показал, что работа с прибором значительно сокращает число элементарных операций и резко — число линий построения. Точность находится в пределах точности графических построений. В. Н. Журавлева

8198 К. Современная геометрия. Изд. 2-е. Делаше (La géométrie contemporaine. 2e éd. Delachet André. Paris, Presses univ. France, 1957, 128 p., ill., carte, 153 fr), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 45, 1019 (франц.)

8199 К. Элементы проективной геометрии для студентов-архитекторов. Текстовой материал. Таблицы. Джованарди (Elementi di geometria proiettiva ad uso degli studenti di architettura. Testo. Tavole. 2o ed. Giovanardi Mario. Napoli, R. Pironti e F., 1957, 156 p., ill., 2000 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 673, 310 (итал.)

8200 К. Начертательная геометрия. 3. Аксонометрия и перспектива. Хак (Darstellende Geometrie. 3. Axonometrie und Perspektive. Haack Wolfgang. Berlin, de Gruyter, 1957, n. p., ill., 2. 40 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, **A**, № 40, 2776 (нем.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8201. Построение по точкам при помощи циркуля кривой любого рода. Росье (Construction au compas, par points, de courbes de genre quelconque. Rossier Paul), Arch. sci., 1956, **9**, № 1, 102 (франц.)

Доказывается существование кривых любого рода, которые можно построить по точкам при помощи циркуля. Доказательство основано на том, что всякая унікурсальная кривая может быть построена по точкам при помощи циркуля. Преобразование Дарбу, которое осуществляется циркулем, переводит кривую порядка n рода g в кривую порядка $2n$ рода $2g + n - 1$, для которой циклические точки будут особыми кратности n. Утверждение вытекает из того, что существуют унікурсальные кривые ($g = 0$) любого порядка n.

См. Дарбу Г., Принципы аналитической геометрии, М.—Л., 1938, стр. 360 (франц. изд.: Darboux G., Principes de géométrie analytique. Paris, 1917, 484).

А. С. Лейбин

8202. Степень точки относительно плоской алгебраической кривой. Казанова (Puissance d'un point par rapport á une courbe algébrique plane. Cazanova G.), Rev. math. spéc., 1956, **67**, № 3, 381 — 384 (франц.)

Уравнение плоской алгебраической кривой порядка n в изотропных координатах $z, \bar{z}$ записывается, после надлежащего нормирования, в виде

$$f(z,\bar{z}) \equiv z^k \bar{z}^k (e^{-i\theta} z^p + \bar{\beta} z^{p-1}\bar{z} + \ldots + \beta \bar{z}^{p-1} z + e^{i\theta}) +$$
$$+ \bar{\alpha}_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \bar{z}^{n-1} + \ldots + \nu = 0.$$

$f(z,\bar{z})$ — степень точки $M(z,\bar{z})$ относительно кривой. Для двух алгебраических кривых (C_1) и (C_2) с одними и теми же n и K имеют место теоремы:

1. Если кривые (C_1) и (C_2) не параллельны, то геометрическое место точек с равными относительно них степенями состоит из двух кривых (биссектрис) пучка (C_1, C_2).

2. Если кривые (C_1) и (C_2) параллельны и $K < \frac{n-1}{2}$, то геометрическое место точек, с равными относительно них степенями, есть кривая пучка (C_1, C_2), меньшего чем $K+1$ порядка.

Приведены в качестве примера центральные кривые 2-го порядка. При четном n пучок асимптотических направлений кривой задается уравнением

$$z^{2q} + \bar{\beta} z^{2q-1}\bar{z} + \ldots + 2\mu z^q \bar{z}^q + \ldots + \beta \bar{z}^{2q-1} z + \bar{z}^{2q} = 0$$
$$(2q = n - 2k).$$

Если $\mu = 0$, кривая называется равносторонней. На равносторонние кривые переносятся некоторые из свойств равносторонней гиперболы. Ю. Н. Ястребов

8203. Рациональные инволюции, имеющие общие четыре точки, принадлежащие алгебраической нерациональной поверхности. Годо (Involutions rationnelles ayant quatre points uni appartenant à une surface algébrique non rationnelle. Godeaux Lucien), Bull. Soc roy. sci. Liége, 1957, **26**, № 7-12, 388 — 389 (франц.)

Заметка является обобщением двух заметок того же автора (Bull. Acad. roy. Belgique, 1952, 244 — 252; 426 — 436).

Рассматривается поверхность F рода $p_a = p_g = \binom{n+4}{3}$ имеющая уравнение $a_1 x_1^n x_2 + a_2 x_2^n x_3 + a_3 x_3^n x_4 + a_4 x^n x_1 = 0$. Некоторое преобразование H переводит F самое в себя и порождает на ней инволюцию I порядка n^2+1 с четырьмя общими точками. Пусть F' — изображение поверхности в инволюции I. Квадрики $x_1 x_2 + \lambda x_2 x_4 = 0$ в преобразовании H переходят сами в себя и высекают на F пучок кривых (C), принадлежащих инволюции I.

Если C' — кривые на поверхности F', соответствующие кривым C на поверхности F, то поверхность F' содержит линейный пучок (C') рациональных кривых и сама рациональна. Точки дирамации поверхности F' эквивалентны совокупности рациональных кривых, некоторые из которых имеют возможную низшую степень 2. Если Γ — сумма этих рациональных кривых, (H) — линейная система кривых и (H') — ей присоединенная, то кривая $H' - H + \Gamma$ поверхности F' соответствует канонической кривой на поверхности F. Н. В. Наумович

8204. «Конические инволюции» с кривой коинциденции порядка $4n$. Тальберг («Conic involutions» with a coincident curve of order $4n$. Thalberg Olaf M.), Avhandl utg. Norske vid.-akad. Oslo. Mat.-naturvid. kl., 1957, № 2, 16 (англ.)

Продолжается исследование «конических инволюций», т. е. инволюций плоскости, для которых сопряженные точки лежат на (переменном) коническом сечении K, проходящем через четыре наперед заданные точки a, b, c, d. Предполагается, что кривая коинциденции C рассматриваемой инволюции имеет в точках a и b кратность $2n$, а в точках c и d кратность $(2n-1)$ (порядок инволюции в этом случае равен $(8n+2)$. Вначале изучается (более подробно) случай, когда $n = 1$.

Характер исследования и результаты вполне аналогичны предыдущим работам автора (Avhandl. utg. Norske vid.-akad. Oslo. Mat.-naturvid. kl. 1947, 1952, № 1; РЖМат, 1955, 3357; реф. 8205. И. З. Розенкноп

8205. Конические инволюции с совпадающей кривой порядка $(3n+4)$. Тальберг («Conic involutions» with a coincident curve of order $3n+4$. Thalberg Olaf M. Avhandl. utg. Norske vid. akad. Oslo. I. Mat.-naturvid. Kl., 1956, № 1, 20 pp.) (англ.)

В заглавии работы имеется расхождение с текстом (опечатка). Порядок кривой, о которой идет речь, должен быть равен $(4n+3)$.

Продолжая свои предыдущие работы (Avhandl. utg. Norske vid. akad. Oslo I. Mat.-naturvid. Kl., 1947, № 1; 1952, № 1, РЖМат, 1955, 3357), автор излагает геометрическую теорию конических инволюций, т. е. инволюций плоскости, для которых сопряженные точки лежат на переменном коническом сечении K, проходящем через четыре наперед заданные точки a, b, c, d (полюсы). Предполагается, что совпадающая кривая C рассматриваемой инволюции имеет кратность $(2n+1)$ в каждой из точек a, b, c, d. Предварительно исследуются частные случаи, когда $n = 0,1$.

Устанавливается, что порядок инволюции должен быть равен $(8n+9)$, причем точки a, b, c, d являются фундаментальными порядка $(4n+4)$; кроме того, на кривой C имеется еще $(4n+4)$ фундаментальных точек второго порядка.

Находятся наиболее простые виды самосопряженных кривых инволюции (отличных от K и C), а также пар «гармонических поляр» (относительно C и четверки полюсов a, b, c, d), которые характеризуются следующим свойством: точки пересечения их с K являются гармонически сопряженными по отношению к точкам пересечения K с C.

Рассматриваются различные специальные случаи. Отметим, например, следующую теорему: Если половина из $(4n+4)$ фундаментальных точке второго порядка лежит на уникурсальной кривой порядка $(2m+1)$, проходящей через a с кратностью $(m+1)$ и через b, c, d с кратностью m в каждой из этих точек (где $m \leqslant n$), то это же имеет место относительно другой половины точек, причем две получающиеся сопряженные кривые встречаются в оставшихся $2m$ точках пересечения с C.

В частности, при $m=0$, $n=0$ получается такой результат (допускающий формулировку, не связанную непосредственно с инволюцией). Пусть задана кубическая кривая (в общем положении) и на ней четыре различные точки a, b, c, d. Пусть далее e, f, g, h — точки касания с ней четырех кривых второго порядка, проходящих через a, b, c, d. Если a, e, f — коллинеарные точки, то a, g, h также будут коллинеарными.

И. З. Розенкноп

8206. К доказательству теоремы Торелли. Вейль (Zum Beweis des Torellischen Satzes. Weil André. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. 11a, 1957, № 2, S. 33—53) (нем.)

В этой работе, посвященной 60-летию К. Зигеля, автор дает строгое доказательство теоремы Торелли (о том, что алгебраическая кривая вполне определяется периодами интеграла 1-го рода на ней) для случая произвольного поля. В этом случае теорема Торелли состоит в

том, что поляризованное абелево многообразие (м.) (РЖМат, 1958, 1510) является каноническим поляризованным якобиевым м. некоторой кривой. Точнее результат формулируется так: Пусть C и C'—две кривые одного и того же жанра и φ (φ') — коническое отображение C (C') на ее якобиевом. I (I'). Если α — изоморфизм канонически поляризованного м. I на канонически поляризованное м. I', то существует такой изоморфизм f (C на C'), что $\alpha^0\varphi=\varphi'^0 f+\alpha$, где α — постоянная, причем если α задан, то f, a и знак $\pm$ определяются единственным образом для негиперэллиптических C и C'; в гиперэллиптическом случае знак $\pm$ можно выбрать произвольно и f, a единственным образом определяются выбором α и знака $\pm$.

Объем работы указывает на большие технические трудности, которые пришлось преодолеть при доказательстве, и нельзя не согласиться с автором, заканчивающим статью замечанием о том, что было бы весьма желательным более простое доказательство.

В. В. Морозов

8207. L-функции числовых полей и ζ-функции абелевых многообразий. Танияма (L-functions of number fields and zeta functions of abelian varieties. Taniyama Yutaka), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 3, 330 — 366 (англ.)

Изучаются свойства введенных Вейлем (РЖМат, 1957, 7611) характеров $\varkappa$ типа (A_0) группы C_k классов идеальных элементов поля алгебраических чисел k. Каждому такому характеру $\varkappa_{i_1,\ldots,i_t}$ сопоставляется L-функция

$$L\left(s;\ \varkappa_{i_1,\ldots,i_t}\right)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\varkappa_{i_1\ldots i_t}(\mathfrak{p})\,N\mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1}.$$

Устанавливается связь между этими L-функциями и бесконечными произведениями ζ-функций. Применительно к абелевым многообразиям получается такой результат. Если A — абелево многообразие размерности n над k, удовлетворяющее двум условиям: 1) тензорное произведение кольца K эндоморфизмов A и поля рациональных чисел содержит коммутативную полупростую подалгебру C степени $2n$ над этим полем и 2) каждый эндоморфизм из $C\cap K$ определен над k, то ξ-функция многообразия A над k имеет представление

$$\zeta_A(s)=\prod_{t=0}^{2n}\prod_{i_1,\ldots i_t}L\left(s;\varkappa_{i_1,\ldots,i_t}\right)^{(-1)^t}.$$

В. В. Морозов

8208 K. Алгебраическая геометрия (Géométrie algébrique. Paris, Secrétariat math., 1956, 1200 fr.—Multigr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 4, 100 (франц.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

8209. О полярно-сопряженных сферических кривых. Билинский (Über die polar-adjungierten sphärischen Kurven. Bilinski S.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1956, **3**, № 2, 51 (нем.)

Автор называет сферические кривые $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ и $\mathbf{r}^*=(\mathbf{r},\ t)$ полярно-сопряженными. Сообщается, как, опираясь на теорему Якоби (Бляшке, Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1935, 1, стр. 60) и некоторые свойства полярно-сопряженных кривых, можно доказать теорему: Длина сферической индикатрисы векторов Дарбу замкнутой пространственной кривой кратна 2π.

П. М. Олоничев

8210. Заметка о вершинах в трехмерном евклидовом пространстве. Гринспан (Note on vertices in Euclidean 3-space. Greenspan Donald), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 731—733 (англ.)

Не сферическая пространственная кривая $C:\vec{x}=[x^1(s)\ x^2(s),\ x^3(s)]$ — I типа если $x^i(s)$ — аналитические функции, s — длина дуги, ни кривизна, ни кручение не обращаются в нуль. Тогда $0<r<\infty$, где r — радиус соприкасающейся сферы. Точка P называется вершиной кривой C, если и только если соприкасающаяся сфера в точке P имеет по крайней мере пять общих последовательных точек с C (касание 4-го порядка).

Доказывается, что необходимым и достаточным условием, чтобы точка P была вершиной кривой C, будет $-k\tau k''+2k'^2\tau+kk'\tau'+k^2\tau^3=0$; каждая вершина P кривой C будет стационарной точкой (где $r'=0$), но не каждая стационарная точка будет вершиной.

Н. В. Наумович

8211. Интегральные формулы инфинитезимальных деформаций замкнутых кривых и линейчатых поверхностей. Сабан (Formule integrali nelle deformazioni infinitesime di curve e superficie rigate chiuse. Saban Giacomo), Arch. Math., 1956, **7**, № 5, 380—383 (итал.)

Рассматривается замкнутая кривая C_s, лежащая на единичной сфере, и связанный с ней ортонормированный репер r_1, r_2 r_3, где r_1 — радиус-вектор линии C_s, а r_2 — касательный вектор. Предполагая, что C_s подвергается инфинитезимальной деформации с сохранением сферичности и длины дуги s:

$$r_1^*(s)=r_1(s)+\tau_i\delta r_1(s),$$

и обозначая σ геодезическую кривизну C_s, а точкой — производную по s, автор выводит следующие интегральные формулы:

$$\oint_{C_s}\delta\sigma\,ds=\oint_{C_s}(r_3\cdot\delta r_1)\,ds=\oint_{C_s}\frac{1}{\sigma}(r_2\cdot\delta r_1)^{\cdot}\,ds,$$

$$\oint_{C_s}\sigma\,(r_3\cdot\delta r_1)\,ds=0,\qquad\oint_{C_s}\delta\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)ds=\oint_{C_s}\sigma\,(r_3\cdot\delta r_2)^{\cdot}\,ds.$$

Изучается также бесконечно малое изгибание линейчатой поверхности K, заданной дуальным единичным вектором образующих:

$$G_1=g_1+\varepsilon g_{10},\quad\varepsilon^2=0,\quad G_1^2=1.$$

G_1 дополняется дуальными векторами G_2, G_3 до ортореперa. При этом G_2 определяет нормаль к поверхности K в горловой точке, а $G_3=G_1\times G_2$. Как известно,

$$G'_1=G_2,\quad G'_2=-G_1+\Sigma G_3,\quad G'_3=-\Sigma G_2,$$

где $\Sigma=\sigma+\varepsilon\sigma_0$ — сферическая дуальная кривизна поверхности K, а штрих означает дифференцирование по дуальной дуге S, элемент которой определяется формулой

$$dS=\sqrt{dG_1^2}=(1+\varepsilon p)\,ds.$$

При этом p есть параметр распределения линейчатой поверхности K, s — длина дуги сферической индикатрисы образующих, σ совпадает с ее кривизной, а $\sigma_0=q_0-p\sigma$.

Поверхность K подвергается деформации:

$$G_1^*(S)=G_1(S)+\tau_i\delta G_1(S).$$

При условии сохранения дуальной дуги S получаются формулы

$$(G_3\delta G_2)'=-(G_3\cdot\delta G_1)+\delta\Sigma,\quad(G_2\cdot\delta G_1)'=\Sigma(G_3\cdot\delta G_1).$$

Эти формулы применяются к случаю развертывающейся поверхности, представляющей геометрическое место касательных к некоторой замкнутой линии C.

Г. И. Кручкович

8212. О частных видах инфинитезимальных деформаций линейчатых поверхностей. Сабан (Su particolari deformazioni infinitesime di superficie rigate. Saban G.), Atti. Acad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **21**, № 5, 274—278 (итал.)

Продолжается изучение бесконечно малых деформаций линейчатых поверхностей (реф. 8211; обозначения сохранены) при некоторых специальных условиях. Предполагая, что при деформации сохраняется элемент дуги s сферической индикатрисы образующих C, и параметр распределения p и считая C замкнутой, получаются формулы:

$$\oint_C \delta\sigma ds = \oint_C (g_3 \cdot \delta g_1)\, ds, \qquad \oint_C \sigma\,(g_3 \cdot \delta g_1)\, ds = 0,$$

$$\oint_C \delta q_0 ds = \oint_C p\ (g_3 \cdot \delta g_1)\, ds - \oint_C (g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \cdot \delta g_{10})\, ds,$$

$$\oint_C q_0\,(g_3 \delta g_1)\, ds = -\oint_C \sigma\,(g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \delta g_{10})\, ds.,$$

Если деформация сохраняет параметр распределения p и саму сферическую индикатрису образующих, то

$$\oint_C \delta q_0 ds + \oint_C (\delta l \cdot g_2)\, ds = 0,$$

$$\oint_C \sigma\,(\delta l \cdot g_2)\, ds = 0,$$

где $l(s)$ — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору горловой линии.

При условии сохранения горловой линии и параметра распределения получается $\delta g_1 = k g_2$, $\delta g_0 = 0$, если, кроме того, линия C замкнута, то $\oint_C \delta\sigma ds = 0$.

Г. И. Кручкович

8213. Условие интегрируемости для функции точки при неинтегрируемой системе отнесения. Лёбелль (Die Integrabilitätsbedingung für Ortsfunktionen bei nichtintegrablen Bezugsystemen. Löbell Frank), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.—naturwiss. Kl., 1956 (1957), 33—39 (нем.)

Пусть в некоторой области трехмерного евклидова пространства с каждой точкой связан ортонормированный репер e_1, e_2 e_3. Линии тока этих векторов обозначим соответственно через c_1, c_3, c_2, а длины дуг этих линий — через s_1, s_2, s_3. В любой точке P возникает поверхность F_1, образованная линиями c_1, пересекающими кривую c_2, проходящую через P; поверхность F_2 состоит из линий c_2, пересекающих c_1, проходящую через P. Пусть G_1—геодезическая кривизна c_1 на F_1, G_2 — геодезическая кривизна c_2 на F_2, $\overline{T}_{12}$ — геодезическое кручение F_1 в направлении e_2 и $\overline{T}_{21}$—геодезическое кручение F_2 в направлении e_1.

Тогда для любой функции f, заданной в пространстве, имеет место соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial f}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial f}{\partial s_2} = G_1\frac{\partial f}{\partial s_1} + G_2\frac{\partial f}{\partial s_2} - (\overline{T}_{12} + \overline{T}_{21})\frac{\partial f}{\partial s_3}.$$

А. С. Феденко

8214. Теория поверхностей в пространстве с абсолютом, распавшимся на пару действительности плоскостей. Хатипов А. Э.-А., Тр. Узб. ун-та, 1956, № 65, 11—15

См. РЖМат., 1957, 8156.

8215. Теория поверхностей в пространстве с абсолютом, распавшимся на пару комплексно-сопряженных плоскостей. Хатипов А. Э.—А., Тр. Узб. ун-та, 1955, № 59, 105—132

См. РЖМат., 1957, 8156.

8216. Об экстремалях полной проективной кривизны. Танака, Сугаку, 1953, **5**, № 2, 89—90 (японск.)

8217. Замкнутый цикл четырех конгруэнций. Карапетян С. Е., Матем. сб., 1957, **41**, № 2, 177—194

Четыре конгруэнции составляют замкнутый цикл, если луч каждой конгруэнции пересекает соответствующий луч последующей конгруэнции в фокусе.

Статья содержит три параграфа. В § 1 доказана теорема существования для наиболее общего замкнутого цикла. Исследован замкнутый цикл, состоящий из четырех параболических конгруэнций. В § 2 исследуется замкнутый цикл (конфигурация Θ_{13}), когда диагональ косого четырехугольника, описывающего своими сторонами цикл, имеет фокусы в вершинах четырехугольника. При этом оказывается, что если в конфигурации Θ_{13} две противоположные конгруэнции образуют пару T, то эта пара является расслояемой.

В § 3 рассматривается замкнутый цикл, две противоположные пары конгруэнций которого являются парами Т. В этом случае развертывающиеся поверхности двух пар противоположных конгруэнций каждой конфигурации T, входящей в состав замкнутого цикла, обратно соответствуют. Такой замкнутый цикл конгруэнций называется автором специальным, а пара T — неполной последовательностью Лапласа. К данной неполной последовательности Лапласа можно присоединить две последовательности того же типа так, чтобы каждая из последних образовала с первоначальной последовательностью замкнутый цикл. Продолжая такое построение, автор получает бесконечную последовательность неполных последовательностей Лапласа. Н. В. Лактанова

8218. Трижды сопряженные системы поверхностей R. Асимптотические преобразования систем R. Расслояемые комплексы K. Шульман Т. А., Матем сб., 1956, **39**, № 3, 293—314

В § 1 рассматривается в трехмерном проективном пространстве трижды сопряженная система поверхностей, одно из семейств которой есть семейство поверхностей R. Такая система называется системой R. Асимптотическим преобразованием системы R называется другая система R, если сопряженные сети первой системы соответствуют сопряженным сетям второй системы и если поверхности R первой системы связаны с поверхностями R второй системы асимптотическим преобразованием. Доказано, что пары трижды сопряженных систем R, связанных асимптотическим преобразованием, существуют с произволом тринадцати функций одного аргумента.

С исходной системой связывается тетраэдр $\{A_i\}$ так, что A_0 описывает систему, а A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 направлены по касательным к линиям пересечения поверхностей системы. С преобразованной системой связывается аналогично тетраэдр $\{B_i\}$. В § 2 доказывается, что конгруэнции (A_0A_3) и (B_0, B_3) $(\mathrm{mod}\ \omega_0^3)$ являются конгруэнциями R, их фокальные поверхности связаны

асимптотическим преобразованием и эти конгруэнции вполне сопряжены поверхностям (A_0) и (B_0) (mod ω_0^3).

Луч A_0A_1 описывает конгруэнцию (A_0A_1) (mod ω_0^2) с фокусами A_0 и P, а луч A_0A_2 описывает конгруэнцию (A_0A_2) (mod ω_0^1) с фокусами A_0 и q. Луч pq описывает конгруэнцию (p, q) (mod ω_0^3), которая называется главной конгруэнцией системы R. Аналогично строится главная конгруэнция (PQ) преобразованной системы R. Доказывается, что главные конгруэнции систем R (A_0) и (B_0) являются конгруэнциями R и вполне гармоничны поверхностям (A_0) и (B_0) (mod ω_0^3) соответственно.

В § 3 рассматривается специальное асимптотическое преобразование трижды сопряженных систем (A_0) и (B_0), при котором нормаль A_0A_3 лежит в касательной плоскости (B_0, B_1, B_2) и нормаль B_0B_3 лежит в касательной плоскости $(A_0A_1A_2)$. Доказывается, что такие пары систем существуют ,с произволом одиннадцати функций одного аргумента и что такие системы являются системами R, а их нормальные конгруэнции—конгруэнции R.

Доказана теорема: Последовательность Лапласа системы R, порожденная нормальной конгруэнцией (A_0A_3) (mod ω_0^3), описана около последовательности Лапласа, порожденной сетью R поверхности (A_0) (mod ω_0^3); в эту последнюю вписана последовательность, порожденная конгруэнцией (B_0B_3) (mod ω_0^3), в которую вписана последовательность, построенная на сети R поверхности (B_0) (mod ω_0^3), а эта последняя описана около исходной последовательности.

В § 4 доказывается, что касательные комплексы (A_0A_1) и (B_0B_1) двух трижды сопряженных систем R (A_0) и (B_0), связанных асимптотическим преобразованием, образуют расслояемую пару. Н. И. Алексеев

8219. Некоторые проблемы аффинно и проективно-дифференциальной геометрии соответствий между поверхностями. Швец (Quelques problèmes de la géométrie différentielle affine et projective des correspondances entre les surfaces. Švec Alois), Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 2, 177—189 (франц.; рез. русск.)

В первой части работы устанавливается взаимно однозначное соответствие между поверхностями π аффинного пространства трех измерений A_3 и поверхностями π' аффинного пространства A'_3. Для каждой пары соответственных точек этих поверхностей существуют касательные аффинные преобразования, каждому из которых соответствует линейное преобразование, являющееся непосредственным обобщением линейного преобразования Чеха для соответствия между проективными пространствами. Существование касательных аффинных соответствий, линейные преобразования которых обладают наперед заданными свойствами, является требованием, занимающим промежуточное место между аффинными изгибаниями первого и второго порядка. Метод Картана устанавливает существование некоторых соответствий.

Во второй части работы рассматриваются вопросы, касающиеся не только теории соответствий между поверхностями, но и теории конгруэнций прямых проективно- и аффинно-дифференциальной геометрий.

Н. В. Лактанова

8220 К. Векторный анализ. Дифференциальная геометрия пространственных кривых и поверхностей. Скалярные, векторные и тензорные поля. Фазекаш (Vektoranalizis. Térgörbék és felületek differencial—geometriája skaiár—vektor—és tenzorterek. Fazekas Ferenc. Budapest, Tankönyvkiado, 1957, 286 s., ill.) (венг.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

8221. Изометрии и подобия в линейных пространствах Минковского. Либуа (Isométries et similitudes dans les espaces de Minkowski linéaires. Libois Paul), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 6, 387—404 (франц.)

Дается подробная классификация изометрий, а также подобий, в линейном пространстве Минковского (т. е. в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ индекса 1), которое рассматривается как эффинное пространство с овальным абсолютом. Точки самого абсолюта в бесконечно удаленной гиперплоскости образуют, как известно, конформную плоскость C_2.

Изометрии в пространстве ${}^1R_4$ делятся прежде всего на правые и левые, на изометрии первого и второго типа, и, таким образом, получаются известные четыре вида изометрий в ${}^1R_4$. Дальнейшая классификация основана на изучении преобразований абсолюта при изометриях в ${}^1R_4$. Эти преобразования индуцируют в обоих семействах изотропных прямых конформной плоскости C_2 (соответствующих двум семействам мнимых прямолинейных образующих абсолюта) некоторые проективные преобразования, которые классифицируются по характеру своих двойных элементов. Таким путем автор приходит к известной классификации центральных изометрий в ${}^1R_4$ (ср. Розенфельд Б. А., РЖМат, 1956, 8247 К), которая служит ему основой для подробной классификации общих изометрий (произведений центральных изометрий и переносов) и подобий (произведений изометрий и гомотетий с положительными коэффициентами). В итоге получаются $13 + 10 + 9 + 10 = 42$ вида изометрий и 32 вида подобий в пространстве ${}^1R_4$. Для всех видов изометрий даются формулы преобразования в подходящих координатах. Ю. Г. Лумисте

8222. О некоторых многообразиях пространства S_{11}, определенных тридуальной алгеброй как подалгеброй алгебры двойных бидуальных чисел. Спампинато (Su alcune varietà dell'S_{11} determinate dall'algebra tridуale come sottoalgebra dell'algebra dei numeri doppio—biduali. Spampinato Nicolò. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, 1954, **21**, 10—24) (итал.)

8223. О некоторых многообразиях комплексного пространства S_{23}, определенного алгеброй квадридуальных чисел как подалгеброй тройных бидуальных чисел. Спампинато (Su alcune varieta dell'S_{23} complesso determinate dall'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo—biduali. Spampinato Nicolò), Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1954, **21**, 57—78 (итал.)

8224. О линейных комплексах пространств высшей размерности невырожденной квадрики. Бурау (Über lineare Komplexe von Räumen höchster Dimension einer nicht entarteten Quadrik. Burau W.), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **42**, 381—393 (нем; рез. итал.)

Ряд обозначений и понятий этой статьи встречаем в других работах автора (РЖМат, 1955, 951; 1957, 3481). Те пространства S_k^1 (соответственно S_{k-1}) гиперквадрики Q_{2k} (соответственно Q_{2k-1}), спинорные образы которых заполняют сечение $M_{\binom{k+1}{2}} \cap S_{2^n-2}$ (S_{2^n-2} —гиперплоскость пространства $< M_{\binom{k+1}{2}} >$, охватывающего $M_{\binom{k+1}{2}}$), составляют линейный S_k^1-комплекс (соответственно S_{k-1}-комплекс).

В § 1 доказывается, что на многообразии $M_{\binom{k+1}{2}}$ существует столько подмногообразий $M_{\binom{k-h}{2}}$ $(h<k)$, сколько S_h на Q_{2k}.

Две плоскости S^1_k гиперквадрики Q_{2k} при нечетном k вообще не пересекаются. Многообразие плоскостей S^1_{2h+1} на Q_{4h+2} называется инцидентно-замкнутым, если любые две плоскости этого многообразия пересекаются (по меньшей мере по прямой) и не существует такой S^1_{2h+1}, не принадлежащей многообразию, которая бы пересекалась со всеми S^1_{2h+1}, принадлежащими многообразию.

На всякой Q_{4g+2} существуют два рода индцидентно-замкнутых S^1_{2g+1}-систем: многообразие всех S^1_{2g+1}, проходящих через данную точку гиперквадрики Q_{4g+2} и многообразие всех S_{2g+1}, пересекающихся с данной A^{II}_{2g+1} при нечетном g (соответственно с данной A^I_{2g+1} при четном g) по меньшей мере по $(g+1)$-мерной плоскости.

В § 2 вводятся особые пространства комплекса. Пространство P_h $(h<k)$ гиперквадрики Q_{2k} называется особым (singulär) для комплекса, если все пространства S^I_k гиперквадрики, проходящие через P_h, принадлежат комплексу. Если P_h — особое, то $P_g \subset Q_{2k}$, где $h<g<k$, $P_h \subset P_g$, также особое. Аналогичное определение вводится и для Q_{2k-1}. Если все точки пространства P_h — особые, то P_h также особое (обратное не имеет места) и P_h называется сильно особым (stark singulär).

В § 3 дается проективная классификация S^I_k-комплексов до $k=5$. M_1 (при $k=1$) является прямой и S^I_1-комплекс состоит из одной прямой.

M_3 $(k=2)$ является пространством S_3. Линейный S^I_2-комплекс образуют те плоскости S^1_2, которые пересекаются с одной данной плоскостью второй системы, причем пересечением является одна прямая для всех S^1_2.

Следовательно, все S^I_2-комплексы (как и S^I_1-комплексы) проективно эквивалентны между собой.

Многообразие M_6 (при $k=3$) снова является квадрикой Q_6. Поэтому существуют два типа линейных S^I_3-комплексов в зависимости от того, гиперплоскость сечения касается с M_6 или нет.

При $k=4$ получаются также два типа S^I_4-комплексов гиперквадрики Q_8. Комплексы одного типа образуют такие S^I_4, которые пересекаются с одной S^{II}_4. Комплекс второго типа определяется заданной особой точкой. При $k=5$ получаются следующие четыре типа S^I_5-комплексов гиперквадрики Q_{10}: а) комплексы общего вида, которые не имеют элемента S^I_5, у которого все S_3 — особые; б) комплексы без особых точек, имеющие в качестве элемента такое S^I_5, все S_3 которого — особые; в) комплексы, имеющие особую точку и вместе с тем сильно особую прямую, но не имеющие сильно особой плоскости; г) комплексы, образованные из S^I_5, пересекающихся с одним пространством A^1_5. К. И. Гринцевичюс

8225. **Центроаффинные и аффинные инварианты двумерной поверхности четырехмерного пространства. Пясецкий С. А.,** Уч. зап. Тамбовск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 24—38

Используя идею Я. С. Дубнова о получении аффинных инвариантов поверхности с помощью ее центроаффинных инвариантов (Дубнов Я. С. и Скрыдлов В. Н., Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, вып. 8, 128—143), автор решает эту задачу для двумерной поверхности четырехмерного пространства. Автор вводит центроаффинное оснащение двумерной поверхности эквицентроаффинного четырехмерного пространства и рассматривает центроаффинные инварианты. Выясняя, как реагируют эти инварианты на параллельный перенос, автор получает соотношения, из которых находит некоторые афинные инварианты. Найденный этим способом аффинноинвариантный тензор поверхности D_{ik} совпадает, как показывает автор, в случае действительного пространства, с аффинноинвариантной исходной формой A_{ik} Бурстина — Майера. С помощью этого тензора и нормального центроаффинного пространства автор строит в каждой точке поверхности двумерное нормальное аффинноинвариантное пространство и показывает, что в случае действительного пространства оно совпадает с аффинным нормальным пространством Бурстина — Майера. В. Н. Скрыдлов

8226. **Развертывающиеся поверхности в четырехмерном пространстве постоянной кривизны. Фернандес** (Ruled developable surfaces in 4—dimensional spaces of constant curvature. Fernandez German. Univ. Nac. Eva Peron. Publ. Fac. Ci. Fisicomat. Ser. 2. Revista, 1953, **4**, 508—525) (исп.)

Продолжая работу Сантало (Publ. Inst. math. Univ. Nac. Litoral, 1942, **4**, 3—42), автор получает систему необходимых и достаточных условий для того, чтобы двумерная линейчатая поверхность, погруженная в четырехмерное пространство постоянной кривизны, стала развертывающейся в окрестности образующей; см. также Ван Юн-чжоу (Wong Yung-Chow, Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**, 467—507).

Автор использует метод Картана и дает в первой части своей работы короткое и элегантное изложение этого метода. A. Lichnerowüz

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 9, 825

8227. **Теорема, касающаяся нормальных конгруэнций в многомерном евклидовом пространстве. Грассо** (Un teorema sulle congruenze normali in un iperspazio euclideo. Grasso Pietro. Matematiche, Catania, 1955, **10**, 26—29) (итал.)

8228. **Теоремы, касающиеся многомерной поверхности m-потенциального пространства S_r. Спампинато** (Teoremi relativi alle ipersuperficie dell'S_r m-potenziale. Spampinato Nicolò. Matematiche, Catania, 1955, **10**, 1—14) (итал.)

8229. **Четырнадцать инвариантов кривизны риманова пространства четырех измерений. Жеэньо, Дебевер** (Les quatorze invariants de courbure de l'espace riemannien à quatre dimensions. Géhéniau J., Debever R.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 101—105 (франц.)

Передаются результаты предыдущей работы авторов (РЖМат, 1957, 8216). Приводится дискуссия (участники Инфельд, Бергман, Вигнер, Жеэньо и др.). Подчеркивается, в частности, значение работы для установления существенного отличия друг от друга различных решений уравнений Эйнштейна (отличия в смысле неизометричности соответствующих пространств). Именно, если четыре из четырнадцати инвариантов в каждом из сравниваемых пространств принять за координаты, то существенное отличие решений проявится в различии (в

соответствующих точках, т. е. точках с одинаковыми координатами) значений других инвариантов.

А. С. Солодовников

8230. Нормальные геодезические отображения римановых пространств. Синюков Н. С., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 766—767

Пусть риманово пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} геодезически отображается на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$, т. е. в общей по отображению системе координат $\bar{g}_{ij}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $g_{ij,k} = 2\varphi_k \bar{g}_{ij} + \varphi_i \bar{g}_{kj} + \varphi_j \bar{g}_{ik}$, где φ_k — некоторый градиентный вектор, запятая означает ковариантное дифференцирование по связности V_n. Геодезическое отображение называется тривиальным, если вектор $\varphi_k = 0$, и нетривиальным — в противном случае. Далее, пусть V_n расслаивается на два семейства ортогональных поверхностей S_m и S_{n-m}, причем S_{n-m} является пересечением (может быть, комплексной) m-ортогональной системы гиперповерхностей; геодезическое отображение V_n на $\bar{V}_n$ называется нормальным, если оно сохраняет это расслоение и индуцирует на S_{n-m} тривиальное геодезическое отображение, а на S_m — нетривиальное.

Для того чтобы V_n допускало нормальное геодезическое отображение на $\bar{V}_n$, определяемое функцией φ, необходимо и достаточно существование системы (может быть, комплексной) координат, в которой

$$ds^2 = g_{\hat{k}\hat{k}}\, dx^{\hat{k}\,2} + g_{pq}\, dx^p\, dx^q;$$

$$d\bar{s}^2 = e^{2\varphi}\,(c_{\hat{k}}\, e^{2x^{\hat{k}}}\, g_{\hat{k}\hat{k}}\, dx^{\hat{k}\,2} + \frac{1}{2} P^{1s}_{\ q}\, g_{sr}\, dx^q\, dx^r), \quad \text{где}$$

$$g_{\hat{k}\hat{k}} = \prod_{\hat{i}\neq\hat{k}} (e^{-2x^{\hat{k}}}/c_{\hat{k}} - e^{-2x^{\hat{i}}}/c_{\hat{i}})\, \tilde{g}_{\hat{k}\hat{k}}\,(x^{\hat{k}});$$

$$g_{pq} = P^{r_1}_{p}\, P^{r_2}_{2^{r_1}} \ldots P^{r_m}_{m^{r}_{m-1}}\, \tilde{g}_{r_m q},$$

$$P^{r}_{\hat{i}\,q} = P^{r}_{q}(x^t) - e^{-2x^{\hat{i}}}\, \delta^{r}_{q}/2c_{\hat{i}}; \quad \varphi = x^1 + \ldots + x^m;$$

$\hat{i},\hat{k}, = 1, \ldots, m; \quad p, q, r, s, t \ldots = m+1, \ldots, n,$

где $\tilde{g}_{pq}(x^t)$ — произвольный симметрический невырожденный тензор, определяющий некоторое $\tilde{V}_{n-m}$, в котором $P_{qr} = P^{s}_{q}\, \tilde{g}_{sr}$ — любой симметрический невырожденный ковариантно постоянный тензор, P'^{r}_{q} — элементы матрицы, обратной к матрице $\|P^{r}_{q}(x^t)\|$; $\tilde{g}\,\hat{k}\,\hat{k}$ — произвольные отличные от нуля функции одного соответствующего переменного; $c_{\hat{i}}$ — произвольные постоянные. Приводится пример V_3, допускающего нетривиальное геодезическое отображение, которое не является нормальным.

И. П. Егоров

8231. Эквидистантные римановы пространства. Синюков Н. С., Научн. ежегодник Одесск. ун-та, 1956. Одесса, 1957, 133—135

Автор называет эквидистантным такое риманово пространство V_n, для которого существует вектор $\varphi_i = 0$, удовлетворяющий условию:

$$\varphi_{i,j} = \rho\, g_{ij}, \tag{1}$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование. Интегрирование уравнений (1) $\rho \neq 0$ приводит к следующему выражению для метрической квадратичной формы в некоторой (канонической) системе координат:

$$ds^2 = g_{11}\, dx^{1\,2} + \frac{1}{g_{11}}\, \tilde{g}_{pq}\,(x^2, \ldots, x^n)\; dx^p\, dx^q, \tag{2}$$

где $g_{11} = \dfrac{1}{2\int \rho\,(x^1)\, dx^1 + c_1}$, $\quad p, q = 2, \ldots, n,$

ρ, $\tilde{g}_{pq}$ — произвольные функции своих аргументов. Из (2) получается, что расстояние между любыми двумя гиперповерхностями $x^1 = \text{const}$, измеряемое по любой из геодезических одного и того же типа, образующих один и тот же угол с линией x^1 в одной и той же точке, не зависит от выбора этой геодезической. Нормальная геодезическая конгруэнция, связанная с канонической системой координат, называется эквидистантной.

Теорема. Каждое эквидистантное V_n допускает нетривиальное геодезическое отображение, сохраняющее его эквидистантную конгруэнцию.

Теорема. Для того чтобы эквидистантное V_n ($n>3$) было первого класса, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{V}_{n-1}$ с метрическим тензором $\tilde{g}_{pq}$ было или любым пространством постоянной кривизны, или, когда $\rho = \text{const}$, любой гиперповерхностью в пространстве постоянной кривизны $\tilde{K} = \rho^2$. В первом случае V_n является субпроективным пространством, во втором — пространством с полем сходящихся направлений.

Риманово пространство V_n называется полусимметрическим, если его тензор кривизны удовлетворяет условиям:

$$R_{\alpha ijk} R^{\alpha}_{hlm} + R_{\alpha hjk} R^{\alpha}_{ilm} + R_{\alpha jak} R^{\alpha}_{jlm} + R_{\alpha ij\alpha} R^{\alpha}_{klm} = 0.$$

Приводится пример полусимметрического пространства, не являющегося симметрическим.

А. С. Феденко

8232. Об одном классе симметрических пространств. Врэнчану Г., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, **1**, № 2, 125—139

Работа является изложением доклада, прочитанного автором в Берлине в октябре 1954 г. С основными положениями работы можно ознакомиться по реферату другой статьи Врэнчану: «Об одном классе однородных римановых пространств», посвященной той же теме (РЖМат, 1957, 3470).

А. С. Феденко

8233. Группы движений порядка $n(n-1)2+1$ в n-мерных римановых пространствах. Кейпер (Groups of motious of order $^1/_2 n\,(n-1)+1$ in Riemannian n-spaces. Kuiper Nicolaas H.), Proc. Koninkl hederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 3, 313—318; Indagationes math., 1956, **18**, № 3, 313—318 (англ.)

Даются доказательства известных результатов о римановых пространствах V_n ($ds^2 > 0$), допускающих группы движений G_r порядка $r = n\,n-1)/2+1$ (см. доклад И. П. Егорова на заседании Московского математического общества — РЖМат, 1954, 2806, а также работу Яно — РЖМат, 1953, 1379). Далее выясняются связные группы движений G_r ($r = n\,(n-1)/2+1$) и структура соответствующих пространств V_n ($n>4, \neq 8$) в целом.

И. П Егоров

8234. Полуприводимые римановы пространства и их связь с движениями. Кручкович Г. И., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 214—215

8235. Аффинные преобразования в римановом многообразии. Исихара, Обата (Affine transformations in a riemannian manifold. Ishihara Shigeru,

Obata Morio), Tohoku Math. J., 1955, 7, № 83, 146—150 (англ.)

Показывается ряд свойств аффинных преобразований связного риманова многообразия M: 1) аффинное преобразование связного риманова многообразия M не имеет двойных точек; 2) группа аффинных преобразований $A(M)$ совпадает с группой изометрических преобразований $I(M)$ для связного неприводимого (в смысле неприводимости ограниченной однородной группы голономии) полного многообразия M; 3) компонента единицы $A_0(M)$ группы $A(M)$ совпадает с компонентной единицы $I_0(M)$ группы $I(M)$ в случае связного полного риманова многообразия M, не содержащего локально плоской части (РЖМат., 1958, 3257); 4) инфинитезимальное аффинное преобразование, определенное вектором $\xi^i(x)$ плоского полного связного риманова многообразия, тогда и только тогда является трансляцией, если длина вектора $\xi^i(x)$ ограничена.

Приводится пример двухмерного неприводимого неполного риманова многообразия, которое допускает гомотетические преобразования (не являющиеся изометриями) без двойных точек. Приводится также пример, позволяющий установить невозможность усиления сформулированного в (3) результата. И. П. Егоров

8236. О геодезическом отображении римановых пространств. Синюков Н. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**, М., АН СССР, 1956, 167—168

Подробное содержание доклада излагается в работах автора: РЖМат, 1955, 4676 и реф. 8230. А. С. Феденко

8237. Метрика конформно-евклидова пространства, отнесенная к подпространству. Блум (The metric of a conformally euclidean space referred to a subspace. Blum Richard), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, Sec. 3, **49**, June, 1—5 (англ.)

Вычисляется линейный элемент конформно-евклидова пространства C_N, в котором задана поверхность V_n.

$$X^I = f^I(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad I = 1,2,\ldots, N, \qquad (1)$$

в системе координат (x^i, x^α), $i = 1,2,\ldots,n$; $\alpha = n+1,\ldots,N$, определенной формулами

$$X^I = f^I(x^i) + x^\alpha \xi^I_\alpha(x^i). \qquad (2)$$

В формулах (1), (2) (X^I) — конформно-евклидовы координаты C_N, $\xi^I_\alpha(x^i)$ означают $N-n$ векторов, ортогональных друг к другу и ортогональных к V_n, единичной длины. При этой нормировке $\xi^I(x^i)$ на V_n вычисляются фундаментальные тензоры и векторы кручения $t_{\alpha\beta|i}$; для них из обращения в нуль тензора конформной кривизны вдоль V_n следуют уравнения Гаусса, Петерсона-Кодацци, Риччи. Указывается нормировка $\xi^I_\alpha(x^i)$, в которой векторы кручения $t_{\alpha\beta|i}$ антисимметричны по индексам α, β.

Линейный элемент, связанный с поверхностью (1) в системе координат (2) в случае евклидова пространства E_N, впервые изучал Г. Врэнчану (Vranceanu G., Rend. Lincei, **11**, 1930; Lecons de géom. diff., v, I., Bucharest, 1947). И. П. Егоров

8238. Свойства парагеодезических пространств. Прванович (Propriétés des espaces paragéodésiques. Prvanovitch Mileva), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 21, 2500—2502 (франц.)

Для поверхности V_n подпространства V_m риманова пространства с положительно определенной метрикой V вводится понятие тензора парагеодезической кривизны. При $n=1$ таким образом получается вектор парагеодезической кривизны кривой C из V_m в V_l, обращение которого в нуль характеризует парагеодезические кривые V_m.

Для парагеодезических поверхностей V_n (РЖМат., 1956, 3434) подпространства V_m в V_l элементарно получается теорема: Парагеодезическая кривая C парагеодезической поверхности V_n подпространства V_m риманова пространства V_l является также парагеодезической кривой V_m в V_l. Н. С. Синюков

8239. Группы голономии гиперповерхности. Кобаяси (Holonomy goups of hypersurfaces. Kebayashi S.), Nagoya Math. J., 1956, 10, june, 9—14 (англ.)

Доказана следующая теорема: Ограниченная однородная группа голономии компактного риманова многообразия M, вложенного в $n+1$-мерное евклидово пространство R^{n+1}, есть $SC(n)$, если M ориентируемо, и $O(n)$ в противном случае. Под ограниченной группой голономии понимается подгруппа группы голономии, соответствующая циклам, гомотопным нулю. Для доказательства используется теория связностей в расслоенных многообразиях. Именно, доказывается следующая лемма: Пусть P и Q — главные расслоенные пространства с базисными пространствами M и, соответственно S, причем заданы отображения $f: M \to S$ и $\vec{f}: P \to Q$, индуцирующие на P связность (заданную первоначально на Q); пусть, далее 1) существует связное открытое $U \subset M$ такое, что f — дифференцируемый гомеоморфизм U в S; 2) размерность локальной группы голономии постоянна во всех точках Q. Тогда ограниченная группа голономии индуцированной связности совпадает с ограниченной группой голономии исходной связности. При доказательстве теоремы под M имеется в виду компактное $V_n \subset R^{n+1}$, под S — единичная гиперсфера в R^{n+1}, под P и Q — множество всех ортогональных реперов в точках M и, соответственно S, под f — сферическое изображение M на S. Используется также тот факт, что ограниченная группа голономии гиперсферы есть $SO(n)$ и что связность, инфуцируемая с помощью сферического изображения на M связностью S, совпадает с римановой связностью M. Ю. И. Левин

8240. Об аффинно-связном пространстве с кривизной, допускающем группу аффинных движений максимального порядка. Муто (On a curved affinely connected space admitting a group of affine motions of maximum order. Muto Yosio. Sci. Rept Yokohama Nat. Univ., 1954, Sect. **I**, № 3, 1—12) (англ.)

Автор доказывает, что полная группа коллинеаций в аффинно-связном пространстве V_n имеет порядок: или n^2+n (в случае плоского пространства), или $\leqslant n^2$. Эта теорема и совокупность других ей родственных по праву принадлежат Егорову; она была доказана также Врэнчану (Vranceanu, Bul. stiint. Acad. RPR, 1959, **1**, 813—821).

Автор изучает пространство с n^2 параметрической группой и дает конечные уравнения этой группы.

Метод является чисто алгебраическим, но очень сложным. M. S. Knebelman

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 516

8241. О стационарной подгруппе пространства аффинной связности. Врэнчану—(Sur le groupe de stabilité d'unespace à connexion affine. Vrănceanu G.), Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, 1957, **1**, № 1, 121—124 (франц.)

Показывается, что стационарная группа точки $O(o, \ldots, o)$ пространства афинной, связности A_n без кручения в нормальных координатах, связанных с O, является линейной однородной группой. Из этого факта выводится далее, что A_n ненулевой кривизны не допус-

кает в качестве стационарной группы полную линейную (однородную) группу или ее унимодулярную подгруппу (Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1947, **57**, 867). Затем устанавливается следующая теорема: Стационарная группа пространства A_n ненулевой кривизны не содержит оператора

$$Z = x^1 p_1 + x^2 p_2 + \ldots + x^n p_n,$$

если A_n допускает транзитивную группу. И. П. Егоров

8242. Динамические уравнения, представленные как автопараллели не римановых пространств. Клаузер (Equazioni dinamiche rappresentate da autoparallel di spazi non riemanniani. Clauser Emilio), Atti Accad. naz. Zincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 5, 495—501 (итал.)

Рассматривается динамическая система с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{hk}(q)\,\dot{q}^h\,\dot{q}^k$$

(q^i — обобщенные координаты).

Уравнения Лагранжа такой системы имеют вид

$$\ddot{q}^i + \left\{ {i \atop hk} \right\} \dot{q}^h\,\dot{q}^h = Q^i,$$

где $\left\{ {i \atop hk} \right\}$ — символы Кристоффеля в метрике пространства конфигураций:

$$ds^2 = a_{hk}\,dq^h\,dq^h = 2T dt^2.$$

В пространстве с общей связностью имеем уравнения автопараллелей

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{hk}\,\dot{q}^k\,\dot{q}^h = \dot{q}^i\,\varphi.$$

Автор сопоставляет эти уравнения с уравнениями Лагранжа и исследует вопрос более подробно. Ф. Франкль

8243. Двухкомпонентные спиноры в общей теории относительности. Бергман (Two-component spinors in general relativity. Bergmann Peter G.), Phys Rev., 1957, **107**, № 2, 624—629 (англ.)

Двухкомпонентные спиноры определяются из требования, чтобы все соотношения между ними оставались инвариантными при унимодулярных преобразованиях, которые на первых порах считаются не зависящими от преобразований криволинейных координат x^ρ ($\rho = 1, 2, 3, 4$). Вводятся четыре линейно независимые эрмитово-симметрические матрицы второго порядка σ^ρ, которые при координатных и спинорных преобразованиях переходят в $\sigma^{\rho'} = (\partial x^{\rho'}/\partial x^\mu)\,a^{+-1} c^\mu \cdot a^+$, где матрица a характеризует спинорное преобразование, а a^+ — эрмитово-сопряженная к ней матрица. Матрицы σ^ρ, заданные в каждой точке четырехмерного многообразия, считаются основными геометрическими величинами. С их помощью определяется симметрический тензор

$g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tau^\mu \sigma^\nu + \sigma^\mu \tau^\nu)$, где $\tau^\mu = \sigma^\mu - \mathrm{Sp}\,\sigma^\mu$. По определению $g^{\mu\nu}$ принимаются за контравариантные компоненты метрического тензора 4-пространства общей теории относительности. Отсюда следует, что если с помощью соотношения $\sigma^\rho = u^\rho + \beta^\rho \sigma_1 + \gamma^\rho \sigma_2 + \alpha^\rho \sigma_3$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули, ввести 4 вектора с вещественными компонентами u^ρ, α^ρ, β^ρ и γ^ρ, то они будут взаимно ортогональны, так что матрицы σ^ρ в каждой точке пространства определяют локально галилееву систему координат. Показано, что с помощью некоторого спинорного преобразования, а также преобразований „временного отражения" переводящего σ^μ в τ^μ, в „пространственной инверсии", переводящей σ^μ в $-\tau^\mu$, σ^μ в произвольной точке можно привести к матрицам, с точностью до знака совпадающим с матрицами Паули и с единичной матрицей. Вводятся матрицы спин-аффинной связности Γ_ρ, определяемые из требования, чтобы при координатных преобразованиях они вели себя как координаты вектора и чтобы „ковариантные производные" спинора $\psi_{;\rho} = \psi_{,\rho} + \Gamma_\rho \psi$ при спинорных преобразованиях переходили в $a\psi_{;\rho}$. Связь между Γ_ρ и коэффициентами аффинной связности риманова пространства определяется из требования, чтобы обращались в нуль ковариантные производимые от σ^μ и τ^μ, вычисленные при учете, что элементы этих матриц имеют по два спинорных и по одному координатному индексу. Отсюда устанавливается зависимость между тензором римановой кривизны $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ и смешанным тензором „спиновой кривизны" $P_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda,\mu} - \Gamma_{\mu,\lambda} - \Gamma_\lambda \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\lambda$, позволяющая один из них выражать через другой. Отмечается возможность обобщения развитой теории на случай, когда детерминант матрицы спинорного преобразования a уже не считается равным единице. В конце статьи полученные результаты применяются для ковариантной записи волновых уравнений, содержащих двухкомпонентные и четырехкомпонентные спиноры. Г. А. Зайцев

8244 Д. Замкнутая система уравнений тяготения общей теории относительности и некоторые ее применения. Пугачев Я. И. Автореф. дисс. канд. физ-матем. н., МГУ, М., 1955

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

8245. Параллельный перенос римановой кривизны. Амброз (Parallel translation of Riemannian curvature. Ambrose W.), Ann. Math., 1956, **64**, № 2, 337—363 (англ.)

Показывается, что полное односвязное риманово многообразие M (класса C^∞) определяется (с точностью до изометрии) поведением римановой кривизны при параллельном переносе.

Пусть d — размерность многообразий, которые будут рассматриваться, и R^d — действительное d-мерное евклидово пространство. Рассмотрим пространство Z троек (a, b, Q), где $a \in R^d$, $b \in R^d$, Q — двумерное линейное подпространство R^d. Для заданного многообразия M с фиксированной исходной точкой m и касательным базисом в этой точке определяется функция L на Z (принимающая действительные значения) следующим образом. Идентифицируем (естественным образом) R^d с касательным пространством точки m. Рассмотрим пространство P, полученное параллельным перенесением Q сначала по геодезическому сегменту, соответствующему a (т. е. имеющему длину и направление a), а затем по сегменту, соответствующему b. Положим $L(a, b, Q) = K(P)$, где $K(P)$ — риманова кривизна, соответствующая P.

Основная теорема автора состоит в том, что если для двух многообразий M и M' соответствующие функции L и L' совпадают, то между ними имеется изометрия (которая совмещает исходные точки и индуцирует

в касательных пространствах совмещение выбранных базисов).

В работе широко используется истолкование дифференциально-геометрических понятий с точки зрения косых произведений (см., например, РЖМат. 1955, 2876). Подробно рассмотрено экспоненциальное отображение касательного пространства на многообразие.

Функция L приобретает простой вид для многообразий постоянной кривизны (L постоянна), симметрических многообразий (не зависит от a и b), многообразий с аналитической структурой. Автор ставит следующие нерешенные вопросы:

1) Какие функции на Z могут быть функциями L для римановых многообразий?

2) Нельзя ли судить о гомеоморфизме двух многообразий, для которых функции L достаточно близки между собой (см., например, работу Рауха, РЖМат, 1954, 3073)? И. З. Розенкноп

8246. Теория аффинных связностей пространства касательных направлений дифференцируемого многообразия. I. II. Оцуки (Theory of affine connections of the space of tangent directions of a differentiable manifold I, II. Otsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1957, **7**, № 1, 1—74 (англ.)

В работе методами теории связности расслоенных пространств изучается общая теория аффинных связностей в пространстве $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ касательных направлений дифференцируемого многообразия $\mathfrak{X}$. Наряду с обычными группами голономии — однородной $\widetilde{H}$ и аффинной $\widetilde{AH}$ — получающимися, если брать в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ любые кривые, автор вводит еще однородную H и аффинную AH группы голономии (в узком смысле слова). Для получения H и AH в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ берутся лишь кривые, состоящие из касательных векторов к кривым в $\mathfrak{X}$. Автор изучает структуру различных групп голономии и, в особенности, соотношения между AH и H, с одной стороны, и $\widetilde{AH}$ и $\widetilde{H}$,— другой. Вводятся различные связности, присоединенные к данной, и рассматриваются условия совпадения групп голономии этих связностей с группами голономии основной связности. Ю. И. Левин

8247. О классификации голоморфных расслоений над сферой Римана. Гротендик (Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. Grothendieck A.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 1, 121—138 (франц.)

Пусть X — сфера Римана, G — приводимая комплексная группа Ли (алгебра Ли — прямая сумма центра и полупростой алгебры), H — ее картановская подгруппа, W — группа Вейля. Основной результат работы состоит в том, что структурная группа всякого аналитического расслоенного пространства с базой X и группой G может быть сокращена до группы H, причем два расслоения с группой H индуцируют эквивалентные расслоения с группой G тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга применением некоторого преобразования из группы W. Отсюда вытекает, что множество классов аналитических главных расслоенных пространств с базой X и группой G можно интерпретировать или как множество P/W, где P — решетка в алгебре Ли группы H, переходящая в единицу при каноническом отображении, или как $\mathrm{Hom}(C^*, G)/G$, где C^* — группа комплексных чисел, отличных от нуля, а G действует при помощи внутренних автоморфизмов. Основной результат означает, в частности, что всякое аналитическое векторное расслоенное пространство с базой X есть прямая сумма расслоений на комплексные прямые, причем слагаемые определены однозначно с точностью до перестановок. Указывается, что для других алгебраических кривых это утверждение не верно. А. Л. Онищик

8248. О геометрической эквивалентности траекторий динамических систем. Врублевская И. Н., Матем. сб., 1957, **42**, № 3, 361—424

Подробное изложение результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1955, 1197, 2191).

8249. Внешние формы и механика непрерывных сред. Галлиссо (Les formes extérieures et la mécanique des milieux continus. Gallissot François), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 19, 2347—2349 (франц.)

Пусть R^p и ρ^n — векторные пространства размерностей p и n, $J^1(R^p, \rho^n)$ — пространство струй 1-го порядка с началами в R^p и концами в ρ^n. Точка в пространстве струй задается $np+n+p$ координатами $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \ldots, a^k_i, \ldots, x^1, \ldots, x^p)$. Пусть ω — некоторая пфаффова форма в $J^1(R^p, \rho^n)$ и пусть $V_p = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$. Рассматривается форма $\Omega_{p+1} = \sum_{i=1}^{n} d\xi^i \wedge \theta(\boldsymbol{a}_i)\ V_p + \omega \wedge V_p$, где $\boldsymbol{a}_i$ — векторное поле с компонентами $(0, \ldots, 0\, a^1_i, \ldots, a^p_i, 0, \ldots, 0)$. Если $\mathbf{X}$ — произвольное векторное поле на $J^1(R^p, \rho^n)$, то из условий $i(\mathbf{X})\Omega_{p+1} = 0$, $d\xi^i \wedge V_p = 0$ получается некоторая линейная система уравнений с частными производными. Приводятся примеры из механики, являющиеся частными случаями этой конструкции. А. Л. Онищик

8250 K. Группа Ли и дифференциальная геометрия. Номидзу (Lie groups and differential geometry. Nomizu Katsumi, Tokyo, Math. Soc. Japan, 1956, XVI, 80 pp.) (англ.)

В гл. I дается краткое изложение основных определений и теорем теории дифференцируемых многообразий, векторных и тензорных полей, внешних дифференциальных форм, групп Ли и расслоенных многообразий. В гл. II рассматривается общая теория связностей в дифференцируемых расслоенных многообразиях. Построение параллелизма, присоединенного к данной связности, сводится к рассмотрению кривых в некоторой группе Ли, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям, обобщающим дифференциальные уравнения однопараметрических групп. Далее вводятся группа голономии и ограниченная группа голономии; доказывается, что они являются группами Ли. Затем доказывается теорема о приводимости, устанавливающая, что структурная группа главного расслоенного многообразия, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, приводима к группе голономии Ф данной связности в этом многообразии, а эта связность приводима к связности в многообразии, для которого группой голономии является Ф. С помощью этой теоремы доказывается теорема о голономии Картана—Эмброуза—Сингера, устанавливающая связь между алгеброй группы голономии и формами кривизны. Далее рассматривается локально плоская связность. Затем доказывается существование связностей в любом главном расслоенном многообразии, удовлетворяющем второй аксиоме счетности, и вводится понятие связности в присоединенных расслоенных многообразиях.

В гл. III рассматривается теория линейных связностей с точки зрения построенной общей теории. Вводится понятие базисных векторных полей, рассмотрение которых естественным путем приводит ко многим важным понятиям теории линейных связностей: геодезическим, нормальным координатам, векторным полям Киллинга и т. д. При этом способе рассмотрения упрощается запись доказательств (сравнительно со способами, основанными на применении координат). Выясняется, что тождество Бьянки является следствием тождества Якоби для векторных полей. Рассматриваются линейные связности простейших типов ($\nabla T=0$, $\Delta R=0$, где T и R — тензоры кручения и кривизны соответственно). Наконец, изучаются существование и свой-

ства аффинной связности, присоединенной к данной линейной связности. Библ. 19 назв.

Ю. А. Шуб-Сизоненко

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

8251. **Ранг плоских 4-тканей. Доу** (Rang der ebenen 4-Gewebe. Dou A.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3/4, 149—157 (нем.)

Рассматривается плоская 4-ткань T_4

$$z_i(u, v) = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

4-ткань имеет ранг n, если возможно n и только n представлений посредством таких нормальных параметров, что

$$\sum_{i=1}^{4} Z^k{}_i(z_i) = \text{const} \quad (K = 1, 2, \ldots, n)$$

4-ткань называется линейной, если $n \geqslant 1$, и билинейной, если $n \geqslant 2$. Автор определяет условия линейности 4-ткани, исходя из теоремы, доказанной им ранее (реф. 8252). Каждая аналитическая T_4, определенная в окрестности точки P, может быть представлена в следующем каноническом виде:

$$u = \text{const},$$
$$v = \text{const},$$

$$s = u + p\,v + a\,v^2 + a_{12}\,uv^2 + \ldots + a_{i,n-i}\,u^i\,v^{n-i} + \ldots = \text{const},$$

$$t = p\,u + v + b\,u^2 + b_{20}\,u^3 + \ldots + b_{j,n-j}\,u^j\,v^{n-j} + \ldots = \text{const}, \quad (1)$$

$$p \neq 0, \quad p^2 \neq 1, \quad a_{n0} = a_{n-1,1} = b_{0,n} = b_{1,n-1} = 0, \quad n = 3, 4, \ldots.$$

Коэффициенты в (1) образуют полную систему инвариантов T_4.

Условие линейности T_4 теперь можно определить так: Существуют такие функции $U(u)$, $V(v)$, $S(s)$, $T(t)$, что выполняется равенство

$$U(u) + V(v) = T(t) + S(s). \quad (2)$$

Представляя $U(u)$, $V(v)$, $S(s)$, $T(t)$ в виде ряда, автор, используя (1), получает из (2) бесконечную однородную систему уравнений для коэффициентов этих рядов. Условие разрешимости этой системы является необходимым и достаточным условием линейности T_4. Рассматривая 10 уравнений этой системы, автор находит необходимое условие линейности T_4: ранг матрицы этой системы $r<10$. Неравенство $r<9$ есть необходимое условие билинейности T_4.

Последовательным дифференцированием равенства (2) получается система уравнений, из рассмотрения которой определяется необходимое и достаточное условие линейности T_4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & S_u' & t_u' & U'(u) \\ 0 & 0 & S_v' & t_v' & V'(v) \\ S_u'^2 & t_u'^2 & S_{uu}'' & t_{vv}'' & U''(u) \\ S_u' S_v' & t_u' t_v' & S_{uv}'' & t_{uv}'' & 0 \\ S_v'^2 & t_v'^2 & S_{vv}'' & t_{vv}'' & V''(v) \end{vmatrix} = 0$$

В заключение автор рассматривает пример билинейной T_4 и приводит результаты работы автора, упомянутой выше, где также определяются условия линейности T_4, но для случая, когда ткань задана дифференциальными уравнениями Пфаффа. В. И. Ведерников

8252. **Плоская 4-ткань. Доу** (Plane four-webs. Dou Alberto), Mem. Real Acad. ci. art. Barcelona, 1953, **31**, 133—218 (исп.)

Греческие буквы $\varpi_i = p_i'(u,v)\,du + q_i'(u,v)\,dv$, $\alpha, \beta, \ldots$ обозначают формы Пфаффа. $[\varpi_1, \varpi_2] = (p_1, q_2 - p_2 q_1)\,[du dv]$ есть внешнее произведение ϖ_1 и ϖ_2. $d\varpi = [dp du] + [dq dv] = (q_u - p_v)\,[du dv]$ есть внешний дифференциал ϖ. Плоская 4-ткань T^4 задана четырьмя уравнениями $\varpi_i = 0$ $[i = 1, 2, 3, 4]$.

Исследование автора ее свойств вблизи точки P основано на „симметрическом представлении"

$$\varpi_1 = \alpha \cos r - \beta \sin r, \quad \varpi^2 = \alpha \sin r + \beta \cos r,$$

$$\varpi_3 = \alpha \cos r + \beta \sin r, \quad \varpi_4 = -\alpha \sin r + \beta \cos r. \quad (1)$$

$\Omega = [\alpha\beta]$ нигде не равно нулю и скаляр $r = r(u,v)$ остается $\neq 0 \pmod{\pi/4}$. Обратно, (1) определяет (локально) T^4, если эти условия выполнены. Случай $r = \text{const}$ дает томсоновы (Tohmsen) „сети двойного отношения" (Doppelverhältnis gewebe) (Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg. 1930, **8**, 115—122.) Если, кроме того, одна из четырех 3-сетей, выделяемых из T^4, гексагональна, то T^4 гомеоморфна сети четырех пучков параллельных прямых (гл. I). Общая 4-ткань T^4 определяет 3-ткань T^3: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \beta = 0$.

Положим $h_\alpha = d\alpha / \Omega$, $h_\beta = d\beta / \Omega$, $\gamma = h_\beta\,\alpha - h_\alpha\,\beta$. Тогда T^3 имеет кривизну $K = d\gamma / \Omega$. Формы Пфаффа α, β определены только до общего скалярного множителя $m = m(u,v)$. Скалярная функция $f = f(u,v)$ есть инвариант T^4, если она не меняется при замене параметров u, v и если перенормировка $\alpha = m\alpha^*$, $\beta = m\beta^*$ преобразует ее в $f^* = m^p f$. $[p = \text{const} - \text{вес } f]$. Тогда $f'_\alpha = [df, \alpha] / \Omega - p h_\alpha f$ и $f'_\beta = [df, \beta] / \Omega - p h_\beta f$ — инварианты веса $p - 1$. Значения „симметричных „инвариантов" $r', r'_\alpha, r''_\beta, r''_{\alpha\alpha}, \ldots$, и $K, K'_\alpha, K'_\beta, \ldots$ (2) в P образуют полную систему инвариантов T^4 в P. Веса r и k равны 0 и 2 соответственно Пусть $z(u,v)$ непрерывно дефференцируема, а $s(u,v)$ и $t(u,v)$ непрерывны вблизи P, $z \neq = 0 \pmod{\pi/4}$ и $z_u z_v s t < 0$ в P. Тогда в некоторой окрестности Γ точки P существует одна и только одна T^4 такая, что $r = z$, $r'_\alpha = s$, $r'_\beta = t$ (гл. II и III).

Пусть T^4 задана в форме $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$, т. е. образована линиями $u = \text{const}$ и т. д., исключая x и y и разрешая относительно s и t, получим для T^4 представление

$$s = s(u,v), \qquad t = t(u,v). \quad (3)$$

Без потери общности, пусть $u = 0$, $v = 0$ в P. Если s и t — аналитические функции от u и v, они допускают разложения $s = \sum_0^\infty a_{ik} u^i v^k$, $t = \sum_0^\infty b_{ik} u^i v^k$. Тогда (3) представляет T^4 вблизи P тогда и только тогда, когда $a_{10} a_{01}$, $b_{10} b_{01}$ $(a_{10} b_{01} - a_{01} b_{10}) \neq 0$. Сеть T^4 не меняется при преобразовании $\bar{u} = \bar{u}(u)$, $\bar{v} = \bar{v}(v)$, $\bar{s} = \bar{s}(s)$, $\bar{t} = \bar{t}(t)$. Посредством этого получается каноническое разложение. Оно удовлетворяет $a_{00} = b_{00} = 0$, $a_{10} = b_{01} = 1$, $-a_{01} = b_{10} < -1$, $a_{n0} = b_{01} = a_{n-1,1} = b_{1,n-1} = 0$ $[n = 2, 3, \ldots]$. Эти условия определяют u, v, s, t однозначно до преобразований $\bar{u} = g \cdot u$, $\bar{v} = g \cdot v$, $\bar{s} = g \cdot s$, $\bar{t} = g \cdot t$, где $g = \text{const} \neq 0$. Коэффициенты канонического разложения образуют другую полную систему инвариантов T^4 в P. Следовательно, они могут быть выражены через симметричные инварианты и наоборот. Автор

действительно подсчитывает симметрические инварианты весов $\leqslant 2$ через канонические инварианты (гл. IV).

В гл. V кривизны четырех 3-сетей из T^4 выражаются через (2). Для одной из них дано элегантное выражение через канонические инварианты. Ранг n/T^4 есть максимальное число линейно независимых систем абелевых нормальных параметров. Бляшке и Бол доказали, что $n \leqslant 3$, и исследовали случай $n = 3$ (Geometrie der Gewebe, Springer, Berlin, 1938, § 27). Автор доказывает, что $n = 2$, если точно три из 4—3-сетей, выделяемых из T^4, гексагональны. Если $n \geqslant 1$, должен равняться нулю некоторый определитель десятого порядка. Его элементы содержат канонические инварианты T^4. Если $n \geqslant 2$ или $n = 3$, удовлетворяются сходные дополнительные условия. $n \geqslant 1$ имеет место тогда и только тогда, когда совместна некоторая система двух уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией [гл. VI]. P. Scherk

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 400

8253. Комплексные функции и непрерывные группы. Элиану (Fonctions complexes et groupes continus. Eliaou Jean), Bull. sci. math., 1957, **81**, № 3, 134—144 (франц.)

Пусть $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ — комплексная функция, определенная в области R, в которой P и Q имеют вторые непрерывные частные производные. Свяжем с данной функцией метрику риманова пространства V_2:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = (P^2 + Q^2)(dx^2 + dy^2),$$

где $ds_1 = Pdx - Qdy$, $ds_2 = Qdx + Pdy$. В V_2 формы ds_1 и ds_2 определяют ортогональный репер, коэффициенты вращения Риччи которого:

$$\gamma^1{}_{12} = \frac{1}{P^2+Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right), \gamma^2{}_{12} = \frac{1}{P^2+Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

Поэтому если $f(z)$ — аналитическая в R функция, то $\gamma^i{}_{ik} = 0$ и V_2 локально евклидово. Автор рассматривает также функции $f(z)$, для которых коэффициенты $\gamma^i{}_{ik}$ постоянные. Обнаруживается, что в этом случае V_2 допускает просто транзитивную группу движений G_2 с операторами:

$$X_1 = \frac{1}{P^2+Q^2}\left(P\frac{\partial}{\partial x} - Q\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$X_2 = \frac{1}{P^2+Q^2}\left(Q\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

и, следовательно, V_2 является либо локально евклидовым, либо плоскостью Лобачевского. Соответствующая комплексная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta \ln \rho + \gamma^1{}_{212}\rho^2 = 0, \qquad \Delta\theta = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, ρ и θ — модуль и аргумент $f(z)$, а $\gamma^1{}_{212}$ — компонента тензора кривизны V_2. В евклидовом случае $\gamma^1{}_{212} = 0$ и $f(z)$ — аналитическая функция.

Аналогичные результаты получаются также в случае комплексной функции многих переменных $f(z^1, \ldots, z^n) = P(x^1, \ldots, x^{2n}) + iQ(x^1, \ldots, x^{2n})$, $z^\alpha = x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, который соответствует метрике пространства V_{2n}

$$ds^2 = (P^2+Q^2)(dx^{1^2} + \ldots + dx^{2n^2}).$$

Если коэффициенты Риччи конгруэнций

$$ds_{2\alpha-1} = Pdx^{\alpha-1} - Qdx^{2\alpha}, \; ds_{2\alpha} = Qdx^{2\alpha-1} + Pdx^{2\alpha}$$

постоянны, то доказывается, что V_{2n} допускает просто транзитивную группу движений G_{2n} с операторами

$$X_{2\alpha-1} = \frac{1}{P^2+Q^2}\left(P\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha-1}} - Q\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha}}\right),$$

$$X_{2\alpha} = \frac{1}{P^2+Q^2}\left(Q\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha-1}} + P\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha}}\right),$$

и является либо евклидовыми, если $f(z^1, \ldots, z^n)$ аналитическая, либо пространством Лобачевского.

Г. И. Кручкович

8254. Проективно продолжаемое групповое пространство движений в плоскости. Шютте (Der projektiv erweiterte Gruppenraum der ebenen Bewegungen. Schütte Kurt), Math. Ann., 1957, **134**, № 1, 62—92 (нем.)

За последние годы появился ряд работ, в которых аксиоматизировалась группа движений в плоскости (Schmidt A., Math. Ann., 1943, **118**, 609—635; Bachmann F., Math. Ann., 1951, 123, 341—344; РЖМат, 1954, 3056; 1955, 5296; 1956, 4878, 6126; 1957, 8930). С другой стороны, установлено, что движения в плоскости можно рассматривать как элементы трехмерного пространства (см. РЖМат, 1957, 764 К). Автор реферируемой статьи синтезирует эти две идеи.

В основе исследования лежит группа G, порождаемая своим подмножеством E, которое принадлежит множеству J инволюторных элементов группы G. Если $\alpha \neq 1$, то множество $[\alpha] = \{x; x \in E, \alpha x \in J\}$ называется пучком. Если $[\alpha] = [x]$, где $x \in E$, то пучок $[\alpha]$ называется ортогональным, если же $[\alpha] = [xy]$, где $xy \in E$, то он называется собственным. Предполагается выполнение следующих аксиом: I. Если $x, y, z \in [\alpha] \cap E$, то $xyz \in E$; II. Если $\alpha = 1$ или $[\alpha]$ не является собственным ортогональным пучком, то для всякого $\beta \in G$ найдется такой элемент $x \in E$, что или αx, $\beta x \in J$ или же $[\beta] = [x]$, а $\alpha x \in J$; III. Существуют такие $u, v, w \in E$, что $uvw \in E$; IV. E не содержит центральных элементов группы G. Эти аксиомы справедливы для группы движений обычной плоскости, если в качестве E взять множество зеркальных отражений. Из I и II вытекает, что E^2 является группой. Кроме I—IV, рассматриваются также аксиомы: III, а. Если $a, b, c \in E$, то $abc \in E$; IV, а. $E \cap E^2$ содержит центральный элемент; IV, б. E содержит центральный элемент, не лежащий в E^2.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — произвольная абелева группа с аддитивно записанной операцией, группа $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{A}$ и φ изоморфизм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$. Если на множестве задать операцию

$$xy = \begin{cases} x + y, & \text{если } x, y \in \mathfrak{A}, \\ \varphi^{-1}(x + \varphi(y)), & \text{если } x \in \mathfrak{A}, y \in \mathfrak{B}, \\ \varphi^{-1}(\varphi(x) - y), & \text{если } x \in \mathfrak{B}, y \in \mathfrak{A}, \\ \varphi(x) - \varphi(y), & \text{если } x, y \in \mathfrak{B}, \end{cases}$$

то оно превращается в группу. Эта группа обладает свойствами I, II, III, а, если в качестве E взять $\mathfrak{B}$, и группами такого типа исчерпываются все группы, подчиненные I, II, III, а. Сходное описание дается для групп, подчиненных аксиомам I—III, IV, а и I—III, IV, б. Дальнейшему исследованию подвергаются группы, подчиненные аксиомам I—IV. При этом евклидов и неевклидов случаи различаются с помощью аксиом: „E. Существуют такие $u, v \in E$, что $u \neq v$, но $[u] = [v]$" и „N. Если $a, e \in E$ и $[a] = [b]$, то $a = b$".

В евклидовом случае ортогональные пучки и только они являются несобственными. Объединение T квадратов ортогональных пучков оказывается нормальным делителем в G. Условимся обозначать через $\bar{\alpha}$ образ эле-

мента α при естественном гомоморфизме G на G/T. Точками группового пространства считаются элементы из $E^2 \cup \overline{E}$, плоскостями — элементы из $E^3 \cup \overline{E}^2$, а прямыми пары (B, β), где B — пучок, а $\beta \in E^2$, а также несобственная прямая Ω. Прямые (B, β) и (B, γ) считаются равными, если $\beta\gamma^{-1} \in B^2$. Инцидентность задается следующими условиями (значок | заменяет слово „инцидентно", а $\Leftrightarrow$ — „тогда и только тогда"): Точка-прямая. $\pi \mid (B, \beta) \Leftrightarrow \pi \in B^2\beta$; $\overline{p} \mid (B, \beta) \Leftrightarrow B$—ортогональный пучок и $B\overline{\beta} = \overline{p}$; $\overline{p} \mid \Omega$ справедливо всегда. Прямая—плоскость. $(B, \beta) \mid \underline{\pi} \Leftrightarrow \underline{\pi} \in B\beta$; $(B, \beta) \mid \overline{\varphi} \Leftrightarrow B$ — ортогональный пучок и $\overline{\beta} = \varphi$; $\Omega \mid \varphi$ справедливо всегда. Точка — плоскость. $\pi \mid \underline{\pi} \Leftrightarrow \pi\underline{\pi}^{-1} \in E$; $\overline{p} \mid \underline{\pi} \Leftrightarrow \underline{\pi} = p$; $\overline{\pi} \mid \varphi \Leftrightarrow \pi = \overline{\varphi}$; $\overline{p} \mid \varphi$ справедливо всегда. Групповое пространство оказывается паповым проективным пространством и, следовательно, определяет некоторое поле Ф. Доказывается, что характеристика этого поля всегда отлична от 2. Изучение полярных корреляций группового пространства приводит к построению квадратичной алгебры Q ранга 4 над полем Ф. Оказывается, что $E^2 = Q^* / \Phi^*$, где Q^* и Φ^* — мультипликативные группы регулярных элементов Q и Ф соответственно. Так как из I и II вытекает, что $G = E^2$ или же $E \cap E^2$ пусто, то полученный результат дает представление о строении группы G.

В неевклидовом случае получается равенство $G = Q^* / \Phi^*$. При этом в случае отсутствия сингулярных пучков (пучок U называется сингулярным, если не существует такого $\xi \in J$, что $U = [\xi]$), то оказывается телом кватернионов. В противном случае — полной алгеброй матриц порядка 2 над Ф. Групповое пространство в неевклидовом случае строится несколько иначе. Как точками, так и плоскостями служат элементы из G и пары (U, V) сингулярных пучков. Прямыми считаются пары (B, β), где B — пучок, а $\beta \in G$, а также символы U_l и U_r, где U — сингулярный пучок. Прямые (B, β) и и (B, γ) отождествляются, если $\beta\gamma^{-1} \in (B')^2$ (если $B = [\alpha]$, $\alpha \neq 1$, то $B^1 = \{\xi : \alpha\xi \in J\}$).

Инцидентность определяется так: Точка — прямая. $\pi \mid (B, \beta) \Leftrightarrow \pi \in (B')^2\beta$; $(U, V) \mid (B, \beta) \Leftrightarrow \alpha^{-1} U^\alpha = V$ для всех $\alpha \in B'\beta$; $(U, V) \mid U_l$ для всех V; $(V, U) \mid U_r$ для всех V. Прямая — плоскость. $(B\beta) \mid \underline{\pi} \Leftrightarrow \underline{\pi} \in B'\beta$; $(B, \beta) \mid (U, V) \Leftrightarrow \alpha^{-1} U_\alpha = V$ для всех $\alpha \in B'\beta$; $U_e \mid (U, V)$ для всех V; $U_r \mid (V, U)$ для всех V. Точка— плоскость. $\pi \mid \underline{\pi} \Leftrightarrow \pi\underline{\pi}^{-1} \in J$; $\pi \mid (U.V) \Leftrightarrow \pi^{-1} U\pi = V$; $(U, V) \mid \underline{\pi} \Leftrightarrow \underline{\pi}^{-1} U\underline{\pi} = V$; $(U.X) \mid (X,V) \Leftrightarrow U = X$ или $V = Y$. Л. А. Скорняков

8255. К работе Курепа «О симметрии». Бланута (A note on Kupera's paper «On the symmetly». Blanuša Danilo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, **11**, № 3-4, 247—248 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Приводится более простое, чем в работе Курепа (РЖМат, 1957, 6661), доказательство следующей теоремы: Пусть $a(x)$ — многочлен и

$$a(y_i + x) = a(y_i - x) \qquad (i = 1,2) \qquad (1)$$

при произвольном x для некоторых $y_1 \neq y_2$, тогда $a(x) = \text{const}$; если же

$$a(y_i + x) = -a(y_i - x) \qquad (i = 1,2), \qquad (2)$$

то $a(x) \equiv 0$.

В заключение дается общее правило построения функций, удовлетворяющих условиям (1) или (2).

Ю. Н. Ястребов

8256. О дробно-линейном преобразовании. Кошницэ (Asupra substitutiei omografice. Cosnita C.), Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1956, **18**, № 3—4, 89—97 (рум.; рез. русск., франц.)

Исследуется вопрос о расположении в комплексной плоскости точек $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, где z_i $(i > 0)$— образ точки z_{i-1} при ее отображении с помощью дробно-линейной функции $\dfrac{az + b}{cz + d}$. В частности, установлено необходимое и достаточное условие замкнутости многоугольника $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Рассматривается также вопрос о расположении точек M_n, получающихся при n-кратном применении данного дробно-линейного преобразования к каждой из координат точки M_0 плоскости или трехмерного пространства. Имеются опечатки. К. С. Сибирский

8257. Об интегрировании одного тензорного поля. Неванлинна, Неванлинна (Über die Integration eines Tensorfeldes. Nevanlinna F., Nevanlinna R.), Acta math., 1957, **98**, № 3—4, 151—170 (нем.)

Статья является улучшенным вариантом ранее опубликованной работы (РЖМат, 1957, 4104). Авторы пользуются бескоординатным методом и следующими обозначениями:

1) $s^{p+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1})$ — множество внутренних и граничных точек ориентированного $(p+1)$-симплекса в m-мерном евклидовом пространстве $R_x{}^m$;

2) k_i — векторы линейного пространства с базисом $h_1 = x_1 - x_0$, $h_2 = x_2 - x_0$, $\ldots$, $h_{p+1} = x_{p+1} - x_0$;

3) $y = A(x) k_1 k_2 \ldots k_p$ — линейная альтернированная форма от аргументов $k_1, k_2, \ldots, k_p$, заданная на s^{p+1} и принимающая значения в $R_y{}^n$;

4) $\text{rot}\, A(x) k_1 k_2 \ldots k_{p+1}$ — внешняя производная форма формы $A(x) k_1 k_2 \ldots k_p$;

5) $G_k{}^m$ — открытая звездообразная область вокруг точки O пространства $R_x{}^m$ (область называется звездообразной, если точка x и отрезок Ox принадлежат области одновременно). В статье подробно и систематически излагаются и исследуются:

1) интегральная теорема, утверждающая, что

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\, d_1x d_2x \ldots d_px = \int_{s^{p+1}} \text{rot}\, A(x)\, d_1x d_2x \ldots dx_{p+1},$$

где ∂s^{p+1} — множество граничных точек s^{p+1} и $A(x) k_1 k_2 \ldots k_p$ — непрерывно дифференцируемый альтернированный оператор (авторы называют ее законом Стокса);

2) уравнение $\text{rot} Y(x) = A(x)$ и его решение, где $y = A(x) d_1x d_2x \ldots d_px$ — альтернированный дифференциал, заданный на $G_x{}^m$ и $Y(x)$ — искомый дифференцируемый альтернированный оператор $(p-1)$-й ступени.

В работе обращается особое внимание на возможное ослабление ограничений, накладываемых в рассуждениях на $A(x)$. Авторам удалось распространить определение $\text{rot}\, A(x)$ на некоторые недифференцируемые и даже не непрерывные операторы $A(x)$ и затем показать, что существование решения уравнения $\text{rot} Y = A$ обеспечивается уже требованиями непрерывности $A(x)$, существования $\text{rot}\, A(x)$ и равенства нулю последнего. П. М. Олоничев

8258. О пространстве ориентированных прямых в евклидовом трехмерном пространстве. Радо (On the space of oriented lines in Euclidean three-space. Radó Tibor), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, 79—89 Part 2 (англ.)

Рассматривается метрическое пространство (X, d), полученное из множества X с введенной в нем метрикой d. Вводится понятие функции-шкалы (ступенчатой функции) $f(t)$, определенной для $0 \leqslant t < \infty$; $0 \leqslant f(t) < \infty$; $f[d(x, y)]$ может служить функцией расстояния в множестве X. Расстояние может быть введено с помощью

различных функций. Например, d_i определяется условиями

$$d_i(x, y) = 0, \text{ если } x = y;\ d_i(x, y) = 1, \text{ если } x \neq y.$$

На евклидовой плоскости E_2 расстояние между двумя точками $x(x_1, x_2)$ и $y(y_1, y_2)$ определяется формулой

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Функция расстояния $d(x, y)$ называется инвариантной, если $d[\rho(x), \rho(y)] = d(x, y)$ для любого жесткого преобразования ρ и для любых двух точек x, y, взятых в E_2.

Теорема. Пусть d — инвариантная функция расстояния в E_2. Тогда d эквивалентна или евклидову расстоянию d_e, или расстоянию $d_i(x, y)$ такому, что

$$d_i(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = y \\ 1, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$$

Другими словами, топология, порождаемая инвариантной функцией в E_2, идентична или евклидовой топологии, или дискретной топологии, порожденной функцией d_i.

Если ввести $d_b = \dfrac{d_e(x, y)}{1 + d_e(x, y)}$, то получим следующее утверждение: если d есть инвариантное расстояние в E_2, то или $d \sim d_b$, или $d \sim d_i$.

Теперь будем рассматривать G — множество ориентированных прямых в трехмерном евклидовом пространстве. Чтобы превратить G в метрическое пространство (G, δ), надо выбрать соответствующим образом расстояние δ. Евклидово расстояние между двумя элементами G : g_1 и g_2 определяется формулой

$$d_e(g_1, g_2) = \min d(x_1, x_2), \text{ где } x_1 \in g_1;\ x_2 \in g_2.$$

Можно выбрать следующие функции в качестве расстояния:

$$\delta_i(g_1, g_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } g_1 = g_2, \\ 1 \text{ во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\delta_{si}(g_1, g_2) = \begin{cases} \dfrac{d_e(g_1, g_2)}{1 + d_e(g_1, g_2)}, & \text{если } g_1 \text{ и } g_2 \text{ параллельны} \\ & \text{и одинаково направлены;} \\ 1 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Вводится понятие инвариантной функции расстояния и доказывается, что если δ — инвариантная функция, то либо $\delta \sim \delta_i$, либо $\delta \sim \delta_{si}$.

Таким образом, с помощью инвариантной функции в G могут быть установлены только две топологии: дискретная топология, порожденная функцией δ_i, и семидискретная топология, порожденная функцией δ_{si}. Однако обе эти топологии не применимы в приложениях. Удобную в приложениях топологию можно получить с помощью метрики, которая не будет являться инвариантной функцией.

В. А. Иглицкая

8259 К. **Введение в геометрию сот.** Бляшке (Einführung in die Geometrie der Waben. Blaschke W.), Basel-Stuttgart, Birhäuser, 1955, 108 S., DM 13.50) (нем.)

Дано элементарное изложение основных топологических свойств «в малом» систем семейств линий (поверхностей).

Книга содержит введение и четыре главы.

Гл. I (Соты кривых на плоскости) воспроизводит и дополняет результаты, изложенные в одной из предыдущих публикаций автора (РЖМат, 1954, 5772; там же основные определения и обозначения). Каждые прямолинейные пчелиные соты (в этой книге пчелиные соты называются 6-угольными) состоят из касательных плоской кривой 3-го класса.

Если определить дифференциаторы ∂_j сот равенствами $f_j = \partial_j f$, где $[df, \sigma_j] = f_j \Omega$ и f — скаляр, то в точке $p(x, y)$ области регулярности G сот можно присоединить „сопровождающие точки“ p_j так, что координаты x_j, y_j векторов $\overline{n_j} = \overline{pp_j}$ суть $x_j = \partial_j x$; $y_j = \partial_j y$. Любой присоединенный к точке p вектор $\overline{W}$ можно однозначно представить в виде $\overline{W} = \overline{n_1} W_1 + \overline{n_2} W_2 + \overline{n_3} W_3$. Если для вектора W в точке p кривой $S \subset G$ потребовать:

$$d \lg W_j = \gamma, \qquad (1)$$

то это требование не зависит от нормирования. Соотношение (1) определяет параллельное перенесение вектора $\overline{W}$ вдоль S. При этом сохраняются отношения $W_1 : W_2 : W_3$ и сложное отношение четырех направлений $\overline{pp_j}$, $\overline{W}$. Значит, перенесение направлений векторов не зависит от пути S. Иначе с длиной $l = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2$, которая не зависит от пути только в случае перенесения на 6-угольных сотах.

Гл. II. Поверхностные соты. Для них вводятся формы $\sigma_j = S_j du_j$ и формы $\tau_j = \dfrac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_j)$ (множители $S_j \neq 0$ можно выбрать так, что $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$). Если обозначить $[\tau_1, \tau_2, \tau_3] = \tau$, то $[\tau_k, d\tau_k] = a_k \tau$ $(k = 1, 2, 3)$, $[\tau_3\ d\tau_2] = b_1 \tau$ (и еще два круговой заменой), при этом $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Скаляры a_k называются кривизнами сот, а форма $\gamma = \sum b_k \tau_k$ — связностью сот. На каждой поверхности F_j семейства $\sigma_j = 0$ другие семейства поверхностей высекают соты кривых $\mathfrak{W}_j$. Соты называются 8-гранными, если их уравнения $W(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$ можно привести к виду $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Такие соты топологически эквивалентны сотам из четырех различных семейств параллельных плоскостей. Для того чтобы соты были 8-гранными, необходимо и достаточно, чтобы $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Каждые плоскостные 8-гранные соты образованы общими касательными плоскостями двух различных квадрик (теорема Зауэра). Справедлива обратная теорема (для области, через каждую точку которой проходят четыре общие касательные плоскости к двум квадрикам).

Соты называются поверхностно-шестиугольными, если все соты $\mathfrak{W}_j$ 6-угольные. Такие соты характеризуются равенством $d\gamma = 0$. Приводятся примеры поверхностно-шестиугольных сот, не являющихся 8-гранными. Только на поверхностно-шестиугольных сотах перенесение вектора v (определяемое равенствами $d \lg v_j = -\gamma$) не зависит от пути перенесения.

Гл. III. Замечания о 4-сотах кривых на плоскости. Говорят, что в плоской области G даны n-соты $\mathfrak{W}^n$ $(n \geqslant 3)$, если задано n семейств S_j кривых $u_j(x, y) = u_j = \text{const}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ таких, что через каждую точку $(x, y) \in G$ проходит точно одна кривая каждого семейства и две кривые разных семейств встречаются в G не более одного раза. Предполагается, что в области G: u_j — аналитические функции.

$[du_j, du_k] \neq 0$ и G выпукла относительно семейств S_i. Далее рассматриваются соты $\mathfrak{W}^n$. Если все 3-соты $\mathfrak{M}_i^3 = \mathfrak{M}^4/S_j$ 6-угольные, то $\mathfrak{M}^4$ топологически эквивалентны сотам из четырех пучков прямых (теорема Майергофера). Если каждые $\mathfrak{W}^3 \subset \mathfrak{W}^n$ $(n \geqslant 6)$ являются 6-угольными, то $\mathfrak{W}^n$ всегда могут быть отображены на соты из n пучков прямых.

Гл. IV. Кое-что о сотах кривых в пространстве. 4-угольные соты кривых в пространстве определяются как соты, эквивалентные в малом сотам из четырех связок прямых, причем никакие три связки не содержат общей прямой. Четырехугольные $\mathfrak{W}^n$ $(n > 4)$ определяются требованием, что каждые содержащиеся в них $\mathfrak{W}^4$ должны быть 4-угольными. 4-угольные $\mathfrak{W}^n$ $(n \neq 6)$ эквивалентны сотам из n связок прямых. 4-угольные $\mathfrak{W}^6$ эквивалентны либо сотам из шести связок прямых, либо сотам из пяти связок прямых, никакая четверка центров которых не компланарна, и из однопараметрического семейства пространственных кривых третьего порядка проходящих через эти пять центров. В. Т. Базылев

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

8260. Метод ортогональных проекций в теории кривых. Решетняк Ю. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 3, 22—26 (рез. англ.)

Даются основные определения теории кривых, развитой А. Д. Александровым (Успехи матем. наук, 1947, **3**, вып. 4, 182—184).

Приводятся теоремы:

1. Для всякой кривой K

$$X(K) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\int X(K\ \overline{n})\, d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\int X(K'\overline{n})\, d\omega.$$

2. Для всякой кривой K с $|\tau|(K) < \infty$ и

$$X(K) < \infty, \quad |\tau|(K) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\int |\tau|(K'\overline{n})\, d\omega,$$

где $X(K)$ — поворот кривой K, $|\tau|(K)$ — абсолютное кручение кривой K, n — единичный вектор, K_n и K'_n — ортогональные проекции кривой K соответственно на произвольную прямую, параллельную n и на произвольную плоскость, перпендикулярную n, Ω — единичная сфера, а интегралы понимаются в смысле Лебега ($d\omega$ — элемент площади сферы Ω).

Отмечается, что теоремы 1 и 2 были получены ранее Фари и Мильнором для регулярных кривых.

Даны определения системы пар и системы троек точек кривой K и приведены некоторые теоремы, связанные с этими системами. В. А. Маневич

8261. Некоторые соображения о теории кривых. Юсупов А. Я., Уч. зап. Бухарск. гос. пед. ин-та, Ташкент, 1957, 105—116

Изучение кривизны и кручения кривых проводится методом, основанным на аппроксимации кривых ломаными. Кривизной пространственной ломаной A_0, A_1, A_2, , . . . , A_n в некоторой ее вершине A_m $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ называется угол между направлениями ее звеньев $A_{m-1}A_m$ и A_mA_{m+1} $(0 \leqslant K(A_m \leqslant \pi)$. Кривизна всей ломаной определяется как сумма кривизн в ее вершинах. Плоскость C_m, проходящая через два последовательных звена $A_{m-1}A_m$ и A_mA_{m+1}, не лежащие на одной прямой, называется соприкасающейся плоскостью этих звеньев. Ориентация соприкасающейся плоскости определяется порядком вершин, через которые эта плоскость проходит. Кручением ломаной на звене A_mA_{m+1} называется угол $X(A_mA_{m+1})$, на который надо повернуть соприкасающуюся плоскость C_m, чтобы совместить (вместе с ориентацией) с соприкасающейся плоскостью C_{m+1} $(-\pi < X(A_m,\ A_{m+1}) \leqslant \pi$; $X(A_mA_{m+1}) > 0$, если поворот C_m вместе с направлением звена $A_{m+1}A_{m+2}$ определяет правый винт). Кручением ломаной называется сумма всех кручений на ее звеньях. Ломаная (с точностью до положения в пространстве) однозначно определяется длинами звеньев, кривизной в каждой вершине и кручением каждого звена. Сферическую индикатрису ломаной получают, если из центра единичной сферы проводят радиусы параллельно звеньям ломаной и соединяют их концы дугами больших кругов. Кривизна ломаной равна длине ее сферической индикатрисы, а кривизна (геодезическая) индикатрисы — кручению ломаной. Плоская ломаная, длины звеньев которой равны длинам соответствующих звеньев сферической ломаной, и кривизны соответствующих вершин совпадают, называется разверткой сферической ломаной. Указываются кинематические способы построения развертки. Рассматриваются некоторые оценки, связанные с кривизной ломаной, в частности дается доказательство следующей теоремы (доказанной А. Д. Александровым для кривых на выпуклой поверхности): Если кривизна k ломаной меньше π, l — расстояние между концами ломаной и s — ее длина, то

$$s \leqslant l/\cos k/2. \qquad (1)$$

Кривизна и кручение кривой в пространстве определяются как пределы кривизны и кручения, вписанных в кривую ломаных, при условии, что вершины ломаных неограниченно сгущаются. Теоремы, установленные для ломаных, и в частности теорема (1), переходом к пределу распространяются и на кривые.

А. Г. Школьник

8262. Некоторые формулы теории поверхностей. Чжэнь Шэн-шэнь (Some formulas in the theory of surfaces. Chern Shiing-shen), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, **10**, № 1-2, 30—40 (англ.)

Дана замкнутая, достаточно гладкая поверхность S трехмерного евклидова пространства E. Пусть O — произвольная точка E, $\overline{n}$ — внешняя нормаль к S в точке P, скалярное произведение $p = \overline{OP}\cdot\overline{n}$ — ориентированное расстояние от O до касательной плоскости к S в точке P, P' — основание перпендикуляра, опущенного из O на касательную плоскость в P, $d_P = PP'$ и ρ_P — нормальная кривизна S в точке P в направлении PP'.

Рассматриваются интегралы по поверхности S:

$$A_n = \int p^n d\Sigma, \qquad D_n = \int p^n \rho_P d_P^2 d\Sigma,$$

$$B_n = \int p^n H d\Sigma, \qquad C_n = \int p^n K d\Sigma, \qquad E_n = \int p^n d_P^2 K d\Sigma,$$

где H — средняя кривизна S, K — гауссова кривизна S, n — целое неотрицательное число, $d\Sigma$ — элемент площади S.

При $n = 0,1$ эти интегралы не зависят от выбора точки O и являются инвариантами S. Например, A_0 — площадь S, $B_0 = -M$ — интеграл средней кривизны, введенный Минковским для выпуклых поверхностей, $C_0 = 2\pi\varkappa$, где $\varkappa$ — эйлерова характеристика S; если S

выпукла, то $A_1 = 3V$, где V — объем, ограниченный S. Основной результат работы составляют тождества

$$2A_{n-1} + 2B_n - (n-1)D_{n-2} = 0,$$

$$2B_{n-1} + 2C_n - (n-1)E_{n-2} = 0, \qquad (1)$$

доказываемые методом внешних форм Картана.

При $n = 1$ отсюда получаются формулы

$$\int pHd\sum + A_0 = 0, \qquad \int pKd\sum - M = 0;$$

первая из этих формул, доказанная Минковским для выпуклых поверхностей, обобщается, таким образом, на поверхности любого рода. Высказывается гипотеза, что $B_n^2 - A_nC_n \geqslant 0$; для выпуклой поверхности S при $n = 0,1$ соответствующие неравенства $M^2 - 4\pi A_0 \geqslant 0$, $A_0^2 - 3MV \geqslant 0$ — известны. Из (1) выводится следующая теорема: Если S имеет постоянную среднюю кривизну и существует точка O, лежащая с отрицательной стороны от каждой касательной плоскости S (в смысле направления внешней нормали), то S — сфера; в частности, отсюда вытекает теорема Либмана: выпуклая поверхность постоянной средней кривизны есть сфера. Показывается, что из (1) следует и другая теорема Либмана: выпуклая поверхность постоянной гауссовой кривизны есть сфера. А. И. Фет

8263. К вопросу о полной системе неравенств для выпуклых тел вращения. Хадвигер, Бири (Zum Problem des vollständigen Ungleichungssystems für konvexe Rotationskörper. Hadwiger H., Bieri H.), Elem. Math., 1957, **12**, 101—108 (нем.)

Рассматривается вопрос, являющийся продолжением разработки идей тех же авторов (РЖМат, 1956, 2459, 5497; 1957, 5928).

Рассматривается класс выпуклых круглых тел A, у которых исследуется взаимосвязь трех величин: объема $V = V(A)$, полной поверхности $F = F(A)$ и интеграла полной кривизны $M = M(A)$. Система неравенств $\Phi(V, F, M) \geqslant 0$ называется полной, если трем заданным величинам V, F и M соответствует такое тело A, что $V(A) = V$, $F(A) = F$ и $M(A) = M$, для всех неравенств данной системы (т. е. для V, F и M выполняются все неравенства системы).

Приводятся известные соотношения для любого тела нашего класса: $M(A) \leqslant M(K)$, если $F(K) = F(A)$ и $V(K) = V(A)$ для конкретного тела K (приводится его осевой разрез).

Также приводятся позднейшие соотношения: $M(A) \geqslant M(S)$, если $F(S) = F(A)$ и $V(S) = V(A)$, где S — конкретное тело (дается его осевой разрез). Таким образом, K и S являются для M экстремальными телами. Не всякому значению M в промежутке $M(S) \leqslant M \leqslant M(K)$ соответствует тело K нашего класса, для которого $M(A) = M$. Высказывается возможность нахождения других соотношений между V, F и M с целью нахождения полной системы соотношений. Предлагается способ решения задачи о нахождении полной системы неравенств между V, F и M с помощью следующих трех вспомогательных задач. Вместо тройки (V, F, M) рассматриваются три тройки: (V, F, a), (F, M, a) и (M, V, a), где a — наибольший радиус кругов поперечного сечения данного тела. Для данных троек ставится та же задача, что и для тройки (V, F, M). Каждая из этих задач разрешена и имеет каждая по 4 решения; при этом в каждой из этих задач решения осуществляются с помощью одних и тех же элементарных тел: (T) цилиндр с двумя полушариями у оснований, (L) линза из двух одинаковых сферических сегментов, (C) круглый конус, (Z) круглый конечный цилиндр.

Для примера имеем второе решение для тройки (V, F, a): $V(A) \leqslant V(L)$, если $F(A) = F(L)$ для промежутка $2\pi a^2 \leqslant F \leqslant 4\pi a^2$. Четырем величинам V, F, M, a должно соответствовать тело A, для этого необходимо, чтобы все 12 соотношений трех вспомогательных задач выполнялись совместно, однако этого недостаточно. Можно лишь заключить, что каждая вспомогательная задача имеет свое тело, но эти три тела вообще различные.

Формальные соотношения между V, F, и M можно получить, исключив из 12 соотношений величину a. Однако не существует вообще такого тела, которое удовлетворяло бы всем этим соотношениям.

Далее построены графические схемы, иллюстрирующие взаимосвязь между V, F и M путем введения следующих координат:

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}, \qquad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}.$$

Аналогичные схемы даются для троек (V, F, a), (F, M, a), (M, V, a). А. С. Кованько

См. также: 7499, 7682, 7760

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

8264. Применение модифицированного метода релаксации к численному решению дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) второго порядка. Ковальчик (Zastosowanie metody zmodyfikowanej relaksacji do numerycznego rozwiazywania równań różniczkowych zwyczajnych i czastkowych rzedu drugiego. Kowalczyk Bohdan), Zesz. nauk. Politechn. gdańsk., 1957, № 9, 73—99 (польск.; рез. русск., англ.)

Краевые задачи для дифференциальных уравнений представляются приближенно на сетке в виде $L(u) + F + \Delta(u) = 0$, где $L(u) + F = 0$ — обычное разностное уравнение, аппроксимирующее данное дифференциальное уравнение, а $\Delta(u)$ — высшие разности (например, для уравнения Лапласа $\Delta(u) = -\frac{1}{12}\left(\delta_x^4 u + \delta_x^4 u\right)$).

Согласно методу Фокса — Волкова (РЖМат, 1958, 9248, сначала решают уравнение $L(u) + F = 0$. По найденным значениям u находят $\Delta(u)$ и решают систему разностных уравнений $L(u) + F + \Delta(u) = 0$ и т. д. Автор особое внимание уделяет решению системы разностных уравнений, которое он осуществляет методом релаксации. Приведены два подробных числовых примера (для обыкновенного и в частных производных дифференциальных уравнений). В. К. Саульев

8265. **Некоторые приближенные методы решения задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений произвольного порядка. Браудер** (On some approximation methods for solutions of the Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary order. Browder Felix E.), J. Math. and Mesh., 1958, **7**, № 1, 69—80 (англ.)

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения произвольного порядка. Устанавливается существование функции Грина этой задачи и разложимость ее в ряд по ортонормированной системе решений однородного уравнения. Доказывается, что решение задачи Дирихле может быть получено с помощью последовательности итераций, являющейся обобщением процесса «выметания» Пуанкаре и включающей альтернирующий процесс Шварца как частный случай.

Результаты переносятся на сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений. О. В. Гусева

8266. **Графическое решение уравнения смешанного типа. Харкеевич Ю. Ф.**, Тр. Иркутского ун-та, 1957, **15**, 103—110

Графический метод решения задачи Дирихле, рассмотренный Д. Ю. Пановым (Тр. Центрального аэрогидродинамич. ин-та, 1934, вып. 169), обобщается на уравнение $\partial^2 u/\partial x^2 + \Theta(y)\,\partial^2 u/\partial y^2 = 1$, где $\Theta(y) = 1$ при $y > 0$ и $\Theta(y) = -1$ при $y < 0$, в области, ограниченной в верхней полуплоскости кривой C, опирающейся на отрезок $[0, 1]$, а в нижней — отрезками L и L_1 характеристик уравнения, параллельных биссектрисам координатных углов (при дополнительных условиях: $u|_C = \varphi(x, y)$ и $u|_L = \psi(x)$). А. П. Доморяд

8267. **О применении метода Б. Г. Галеркина к линейным задачам динамики систем с распределенными параметрами. Гуревич С. Г.**, Техн. информ. по результатам науч.-исслед. работ Ленингр. лесотехн. акад., 1955, № 23, 56—62

Рассмотрено дифференциальное уравнение, описывающее поведение некоторых систем с распределенными параметрами

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} + a_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L(u) = \sum_{j=1}^{r} f_j(x)\psi_j(t), \qquad (1)$$

где

$$L(u) = \sum_{j=1}^{h} b_j(x)\frac{\partial^j u}{\partial x^j}$$

при заданных краевых и начальных условиях.

Посредством преобразования Лапласа строится изображение уравнения (1), приближенное решение которого ищется в виде

$$u_n(x, p) = \sum_{j=1}^{n} c_j(p)\varphi_j(x).$$

Величины $c_j(p)$ определяются из алгебраической системы уравнений Галеркина, которая при помощи подстановки

$$c_j(p) = \sum_{s=1}^{m} \mu_{js}(p)\psi_s(p) \qquad (2)$$

распадается на m систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{js}(p)(A_{jk}p^2 + B_{jk}p + D_{jk},) = E_{sk}, \qquad (3)$$

где A_{jk}, B_{jk}, D_{jk}, E_{sk} — постоянные, вычисляемые по достаточно простым формулам, причем $s = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$.

После определения $\mu_{js}(p)$ из уравнений (3) и $c_j(p)$ из уравнений (2) отыскиваются по формулам операционного исчисления оригиналы $c_j(t)$, приводящие к оригиналам изображения $u_n(x, p)$, т. е. к приближенному решению $u_n(x, t)$ уравнения (1).

Рассмотрен пример, показывающий эффективность метода. А. Н. Обморшев

8268. **Об одной разностной схеме численного интегрирования уравнения теплопроводности. Ю ш к о в П. П.**, Докл. АН БССР, 1957, **1**, № 3, 89—91

Для численного решения уравнения $\partial T/\partial\tau = a\nabla^2 T$ предлагается следующее явное двухшаговое разностное уравнение

$$\beta\Theta_{i,k+1} = \alpha\Theta_{i,k-1} + (\beta - \alpha - 2)\Theta_{i,k} + \Theta_{i-1,k} + \Theta_{i+1,k}, \qquad (1)$$
$$(\alpha \geqslant 0, \quad -\alpha \geqslant \ ).$$

Если параметры α и β удовлетворяют уравнениям $\beta + \alpha = h^2/l = p$, $\beta - \alpha = p^2/6$, то при $\sqrt{12} \leqslant p \leqslant 6$ разностное уравнение (1) будет аппроксимировать данное дифференциальное уравнение с погрешностью $O(h^4)$.

Приводится обобщение уравнения (1) на двумерный случай. В. К. Саульев

8269. **Метод приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Мишталь** (Metoda przybliżonego rozwiazywania równań różniczkowych czastkowych. Misztal F.), Zastosowania mat., 1956, **2**, № 4, 416—425 (польск.; рез. русск.)

Автор рассмотрел метод приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными, аналогичный обычному методу сеток (в котором производные заменяют конечными разностными отношениями), но отличающийся от него существенным образом тем, что выделяется одна независимая переменная, частные производные которой остаются без изменений. В итоге этот метод сводит решение уравнения в частных производных к решению приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (метод прямых), которая легко разрешима.

Этот метод рассмотрен на примере, а для определения точности приближения решен вопрос из теории упругости (касающийся тонкостенного стержня), точное решение которого содержится в другой работе автора. Результат этого сравнения был в пользу предлагаемого метода. T. Iwiński

8270. **Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П.**, Успехи физ. наук, 1957, **63**, № 1а, 33—50

Дается оценка времени существования спутника на эллиптической орбите. В общем случае определение характеристик орбиты и времени движения спутника сводится к интегрированию системы шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с заданными начальными данными. В работе дан численный метод решения уравнений движения спутника. Подробный анализ численного метода с учетом особенностей решения на вычислительных машинах проведен для системы уравнений движения спутника при условии, что поле тяготения Земли является центральным и пренебрегается вращением атмосферы Земли при суточном движении. В этом случае исходная система состоит из 4 уравнений. Эта система преобразуется к виду, удобному для численного решения.

При разработке численного метода используется малое изменение параметра эллипса p и его эксцентриси-

тета e за время одного оборота. Если Δp и Δe — изменение параметра и эксцентриситета за один оборот, то приближенно считается

$$\Delta p = dp/dN,\ \Delta e = e\,de/dN,$$

где N — число оборотов спутника.

При численном интегрировании дифференциальных уравнений авторы пользуются методом Рунге-Кутта и методом Эйлера.

С помощью разработанного метода было проведено численное интегрирование на счетной машине БЭСМ при различных начальных данных.

Интегрирование проводилось до момента достижения спутником высоты 100 км. Результаты расчета для указанной выше упрощенной задачи приведены на графике зависимости высоты перигея h_π от высоты апогея h_a и таблице численных значений некоторых характеристик. Эти результаты позволяют оценить изменение времени движения спутника при изменении начальных значений h_{a_0} и h_{π_0}.

На основе расчетов и анализа уравнений дана также оценка влияния отклонения поля тяготения от центрального и влияния вращения атмосферы вместе с Землей.

В. П. Коробейников

8271. О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы. Таратынова Г. П., Успехи физ. наук, 1957, **63**, № 1а, 51—58

Изложена методика расчета на быстродействующей цифровой машине уравнений, описывающих движение искусственного спутника Земли с учетом сопротивления движущейся вместе с Землей атмосферы и отклонения поля тяготения Земли от центрального. Задача заключается в интегрировании системы шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, при заданных начальных данных.

Так же как в работе Д. Е. Охоцимского, Т. М. Энеева, Г. П. Таратыновой (реф. 8270), при разработке численного метода в этой работе используется малость изменения элементов орбиты спутника за один оборот. Если Δf есть изменение какой-либо характеристики орбиты за один оборот, то считается приближенно $\Delta f = df/dN$, где N — число оборотов. Используя это предположение, автором получена приближенная система дифференциальных уравнений, которая может быть проинтегрирована обычными численными методами. Дан пример расчета орбиты сферического искусственного спутника на быстродействующей электронной счетной машине Академии наук СССР (БЭСМ).

В. П. Коробейников

8272. Теоретическое сравнение эффективности двух классических методов и метода Монте-Карло для вычисления одной компоненты решения системы линейных алгебраических уравнений. Кертисс (A theoretical comparison of the efficiencies of two classical methods and a Monte Carlo method for computing one component of the solution of a set of linear algebraic equations. Curtiss J. H.). Sympos. Monte Carlo Methods. New York, John Wiley and Sons. Inc., 1956, 191—233 (англ.)

Подсчитывается число умножений (деление приравнивается одному умножению), необходимых для нахождения одной (i-й) компоненты решения системы линейных алгебраических уравнений n-го порядка

$$\xi = H\xi + \gamma,\ H = \|h_{ij}\| \qquad (1)$$

при условии $h = \max_i \sum_j |h_{ij}| < 1$, следующими тремя методами; а) исключения по Гауссу, б) итерации в форме

$$\xi_{N+1} = H\xi_N + \gamma,\ N = 0,1,\ldots \qquad (2)$$

и в) Монте-Карло.

Предлагаемая для сравнения схема метода Монте-Карло строится на основании общих приемов (см., например, РЖМат, 1958, 6210) и кратко состоит в следующем.

Представляя i-ю компоненту в (2) в виде

$$\xi_N]_i = \xi_0]_i + K^N\theta]_i, \qquad (3)$$

где

$$K = \begin{Vmatrix} H & \vdots & I \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I \end{Vmatrix},\ \theta = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ & \rho_0 & \end{bmatrix},\ \rho_0 = \gamma - (I - H)\xi_0,$$

сводим задачу к нахождению i-й компоненты $2n$-мерного вектора $K^N\theta$ методом Монте-Карло (число N считается достаточно большим, чтобы можно было пренебречь разностью $\xi - \xi_N$ и учитывать только погрешности чисто статистического происхождения). С помощью вероятностей перехода p_{ij} ($p_{ij} = |h_{ij}|$, $i,j \leqslant n$, $p_{i,\,i+n} = 1 - \Sigma_j p_{ij}$, $i \leqslant n$, $p_{ii} = 1$, $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, $p_{ij} = 0$ — в остальных случаях) стандартными методами строится случайное блуждание „частицы" ($I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots$ цепь Маркова) и соответствующая случайная величина z такая, что

$$K^N\theta]_i = E(z/I_0 = i). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\xi_N]_i \approx \bar{z}_\nu = \xi_0]_i + \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} z_k,$$

где z_k — реализация случайной величины z. Приведенная схема требует предварительного вычисления ρ_0, на что необходимо затратить n^2 умножений. Этот прием, однако, существенно уменьшает дисперсию случайной величины z, которая оказывается порядка $\|\rho_0\|^2$.

При подсчете числа умножений для методов б) и в) фиксируются числа h и r, где r есть мера приближения, определенная соответственно формулами

$$\text{б)}\ \|\xi - \xi_N\| < r\,\|\rho_0\|,\quad \text{в)}\ |\xi]_i - \bar{z}_\nu| < r\,\|\rho_0\|.$$

Для метода в) не учитываются умножения, необходимые, возможно, для производства случайных (или псевдослучайных) чисел. В этих предположениях получены следующие оценки для числа умножений:

$$\text{а)}\ \frac{n^3}{3} + n^2,\quad \text{б)}\ n^2 + n + n^2\left[\frac{\ln r + \ln(1-h)}{\ln h}\right],$$

$$\text{в)}\ n^2 + n + \frac{1}{1-h}\left\{1 + \left[\frac{2}{r^2(1-h)^2}\right]\right\},$$

где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, содержащееся в x. Как видно из приведенных формул, предлагаемая схема метода Монте-Карло теоретически является наиболее экономной при больших n, тем более, что слагаемое $n^2 + n$ в формуле в) нестатистического происхождения. (Немного изменяя схему, можно добиться того, что формула в) не будет вообще зависеть от n). Из приведенных оценок следует, что при малых n наиболее экономным оказывается способ а), при средних n — б)

и при больших n — в). Дана таблица интервалов n, наиболее благоприятных для рассматриваемых способов (при данных r и h). Например, при $r=0{,}1$ и $h=0{,}5$ для способа а) $1 \leqslant n \leqslant 12$, для б) $13 \leqslant n \leqslant 20$ и для в) $n \geqslant 21$.

Аналогичные сравнения приведены и для обращения матриц. В. С. Владимиров

8273. **Машинная выборка для заданных распределений вероятностей. Батлер** (Machine sampling from given probability distributions. Butler James W.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 249—264 (англ.)

Предполагая существование источника случайных чисел, равномерно распределенных на интервале (0,1), автор описывает различные процедуры для получения случайных чисел с заданным законом распределения вероятностей. Пусть требуется построить одномерную случайную величину s, распределенную в соответствии с плотностью вероятностей $f(x)$. Тогда, как известно, задача сводится к решению уравнения

$$\int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx = r \qquad (1)$$

для каждого равномерно-распределенного случайного числа r. Реализация этого процесса часто оказывается трудоемкой даже для быстродействующей вычислительной машины. Задача состоит в том, чтобы подобрать такой случайный процесс, который бы приводил к цели со значительно меньшей затратой машинного времени. Это иногда удается сделать. Пусть, например, $f(x)=2x$. $x \in (0,1)$, $f(x)=0$, $x \in (0,1)$. Тогда уравнение (1) определяет так называемый «случайный квадратный корень» $s=\sqrt{r}$. Вместо вычисления квадратного корня непосредственно предлагается более простая операция: взять два случайных числа r_1 и r_2 и положить $s=\max(r_1, r_2)$.

В работе обозреваются и обсуждаются разные методы и приемы построения такого рода процессов. Общие соображения иллюстрируются на различных примерах. В частности, приводятся процессы получения таких «случайных» величин, как $\cos \pi r$, r $\frac{1}{n}$,—$\ln(1-r)$ и др.

В. С. Владимиров

8274. **Графическое вычисление интегральной свертки. Лавиль** (Calcul graphique d'un produit de composition. Laville G.), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 4, 441—443 (франц.)

При исследовании линейных систем в различных областях науки и техники приходится вычислять результат интегральной свертки, т. е. интегралы типа

$$u(t)=\int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda)\,d\lambda,$$

где $f(t)$ — переходная характеристика системы, $g(t)$ — произвольная функция, поданная на вход системы.

Предлагается графический метод вычисления такого интеграла, основанный на том, что обе заданные функции строятся в виде графиков на прозрачной бумаге, определенным образом совмещаются, после чего соответствующие ординаты перемножаются и полученная функция графически интегрируется. Перемножение ординат производится также графически.

Предлагаемый метод нельзя назвать простым, но автор утверждает, что он обеспечивает большую точность, именно порядка 10^{-3}. Этот метод можно применять также для графического гармонического анализа.

Л. М. Финк

8275. **Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа. Чушкин П. И.**, Вычисл. математика, сб. 2, 1957, 20—44

Применяется приближенный метод А. А. Дородницына для расчета обтекания эллипсов и эллипсоидов вращения дозвуковым безвихревым адиабатическим потоком газа, скорость которого в бесконечности направлена вдоль большой оси эллипса. Соответствующие уравнения газового потока заменяются системой интегральных соотношений

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\eta_n} \chi\,d\eta + \omega_n = 0, \quad \frac{d}{d\xi}\int_0^{\eta_n} \lambda\,d\eta - \mu_n + \mu_0 = 0. \qquad (1)$$

Встречающиеся здесь функции χ и λ выражены приближенно некоторыми интерполяционными тригонометрическими полиномами, коэффициенты которых линейно зависят от системы искомых функций χ_n, λ_n. В результате подстановки интерполяционных полиномов в систему (1) задача обтекания сводится в N-м приближении к некоторой системе $2N$ обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для составляющих скоростей. Расчеты по предложенному методу для некоторых заданных условий потока выполнены на быстродействующей электронной счетной машине. Результаты вычислений и их сравнительный анализ представлены графиками. В. П. Пилатовский

8276. **Общая теория вероятностных методов вычисления рядов Неймана для решений некоторых интегральных уравнений Фредгольма и родственных рядов. Альберт** (A general theory of stochastic estimates of the Neumann series for the solutions of certain Fredholm integral equations and related series. Albert G. E.), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John. Wiley and Sons, Inc., 1956, 37—46 (англ.)

Дается обзор и обсуждение различных приемов метода Монте-Карло для приближенного решения интегрального уравнения

$$\Phi(x) = g(x) + \int_R K(x,y)\,\Phi(y)\,dy \qquad (1)$$

в предположении, что соответствующий ряд Неймана сходится. В основе метода лежит построение случайного процесса (блуждания фиктивной «частицы», последовательные положения которой в пространстве R суть точки $x_0, x_1, \ldots x_n$, n — также случайное) в соответствии с выбранным законом распределения вероятностей. Далее, для построенного случайного процесса определяется случайная величина Φ_n, обладающая тем свойством, что ее среднее значение равно $\Phi(x_0)$. При этом выбранное распределение вероятностей должно обеспечивать малость дисперсии случайной величины $\Phi_n(x_0)$ и допускать простую вычислительную реализацию. В том случае, когда известно приближенное решение β уравнения (1) и $g \geqslant 0$, $K \geqslant 0$, строится в рамках общей схемы случайный процесс, обеспечивающий дисперсию порядка $(\beta-\Phi)^2$. Указываются и обсуждаются также и другие способы уменьшения дисперсии.

В. С. Владимиров

8277. **Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений на основе метода Чаплыгина. Слугин С. Н.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 211—221

Дается общая схема решения операторного уравнения $P(x)=0$ методом верхних и нижних приближений в пространстве K. Оператор P рассматривается на $[u_0, v_0]$, причем $P(u_0) \leqslant 0 \leqslant P(v_0)$. Алгорифм задается формулами $u_{n+1} = u_n - \Gamma_n^{-1}(z_n)$, $v_{n+1} = v_n -$

$$- T_n^{-1}(w_n) (n = 0,1,\ldots), \qquad (1)$$

которые отличаются от формул, введенных автором ранее (РЖМат, 1956, 1529), тем, что вместо $P(u_n)$ и $P(v_n)$ введены здесь z_n и w_n — произвольные элементы, удов-

летворяющие неравенствам $P(u_n) \leqslant z_n \leqslant 0 \leqslant w_n \leqslant P(v_n)$. Сделано это с целью некоторого упрощения вычислений. Элементы u_n и v_n, определенные формулами (1), удовлетворяют неравенствам

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u \leqslant v \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n,$$

где u, v — наименьшее и наибольшее на $[u_0, v_0]$ решения уравнения $P(x) = 0$.

Единственность решения и сходимость приближений к решению обеспечиваются некоторыми дополнительными условиями, к тем, при которых строится алгорифм (1).

Применение алгорифма (1) к интегро-дифференциальным уравнениям и их системам приводит к довольно простым вычислительным схемам при обычных предположениях знакопостоянства некоторых производных. Попутно устанавливаются некоторые достаточные условия единственности решения рассматриваемых уравнений.

Б. Н. Бабкин

8278. **Разложение многочленов на множители.** Хед (Factorizing polynomials. Head J. W.), Aircraft Engng, 1957, 29, № 340, 184—185 (англ.)

Для выделения из многочлена $F(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ множителя $\varphi(x) = x^2 + Ax + B = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ строится (при некотором исходном многочлене $\varphi_0(x)$) последовательность многочленов $\varphi_k(x) = x^2 + A_k x + B_k$ с корнями $\alpha_1^{(k)} = \alpha_1 + \xi_k$ и $\alpha_2^{(k)} = \alpha_2 + \eta_k$ $(k = 0,1,2\ldots)$, где $\psi_{n+1}(x)$ — остаток от деления $F(x)$ на $x\psi_n(x)$. Если можно пренебречь членами второго порядка относительно ξ_n и η_n $(n = 0,1,2,\ldots)$, то $\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} \approx 1 - \frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(0)}$ и $\frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} \approx 1 - \frac{\varphi(\alpha_2)}{\varphi(0)}$, т. е. отклонения корней $\psi_n(x)$ от соответствующих корней $\psi(x)$ образуют почти геометрические прогрессии, убывающие или возрастающие; в обоих случаях, построив $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, будем иметь:

$$\alpha_s \approx \frac{[\alpha_s^1]^2 - \alpha_s^{(0)}\alpha_s^{(2)}}{2\cdot\alpha_s^{(1)} - \alpha_s^{(0)}\alpha_s^{(2)}} \quad (s = 1,2).$$

То же имеет место и при выделении множителя r-й степени. Способ выгодно применять, когда корни $\psi(x)$ по модулю значительно меньше корней $\varphi(x)$.

А. П. Доморяд

8279. **Об одном процессе приближенного разложения многочлена на множители.** Маркович (Sur un procédé de factorisation approximative des polynômes. Markovitch Drag.), Bull. Soc. math. et phys. R. P. Serbie, 1954, 6, № 1-2, 3—11 (франц.; рез. сербск.)

Рассматривается алгебраическое уравнение m-й степени, которое автор записывает в виде

$$1 = a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^m \quad (a_{m-1} \neq 0),$$

откуда

$$x = 1 \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu. \qquad (1)$$

Применяя последовательно n раз преобразование

$$x^k = x^{k-1} \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

автор придает уравнению (1) вид

$$x = \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_\nu(n) \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu a_\nu(n+1),$$

где коэффициенты $a_\nu(n)$ определяются последовательно при помощи рекуррентного соотношения

$$a_\nu(n+1) = a_\nu a_0(n) + a_{\nu+1}(n),$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \; n = 1, 2, 3, \ldots; \; a_\nu(1) = a_\nu \qquad (2)$$

или при помощи формулы

$$a_\nu(n) = \sum_{k=0}^{m-\nu-1} a_{\nu+k} a_0(n-k-1), \; \nu = 0, 1, \ldots, m-1. \qquad (3)$$

Доказывается:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0(n)}{a_0(n+1)} = \lambda$, $(\lambda \neq 0)$, то многочлены

$xa_0(n+1) - a_0(n)$ и $x^{m-1}a_{m-1}(n+1) + \ldots + xa_1(n+1) + a_0(n+1)$ представляют приближенно два множителя многочлена $a_{m-1}x^m + a_{m-2}x^{m-1} + \ldots + a_0 x - 1$. Именно доказывается, что

$$a_{m-1}x^m + a_{m-2}a^{m-1} + \ldots + a_0 x - 1 =$$

$$= \left[x - \frac{a_0(n)}{a_0(n+1)}\right]\left[x^{m-1}\frac{a_{m-1}(n+1)}{a_0(n)} + x\frac{a_1(n+1)}{a_0(n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_0(n+1)}{a_0(n)}\right] - \sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k=1}^{m-\nu} x^\nu a_{\nu+k-1}\left[\frac{a_0(n-k)}{a_0(n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_0(n+1-k)}{a_0(n+1)}\right],$$

причем

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0(n-k)}{a_0(n)} - \frac{a_0(n+1-k)}{a_0(n+1)}\right] = 0.$$

Далее, автор замечает, что коэффициенты $a_\nu(n)$ могут быть вычислены при помощи формулы (2) или (3), но удобнее вычислить их методом матриц, а именно, приняв матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

за начальную и умножая матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

на A, полученный результат снова на A и т. д., придем к двум рядам коэффициентов $a_\nu(n)$ и $a_\nu(n+1)$.

Наконец, автор отмечает, что $a_0(n)$ может быть представлен в виде определителя

$$a_\nu(n)=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0\ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0\ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}=\Delta_n$$

и что отсюда легко получается формула Уиттекера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0(n)}{a_0(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}=x_1,$$

где x_1 — корень с наименьшим модулем данного уравнения. В статье имеется много опечаток.

М. С. Горнштейн

8280. **Метод ложного положения (regula falsi) для решения интегральных уравнений. Веласко-де-Пандо** (Método de regula falsi para resolver las ecuaciones integrales. Velasco de Pando Manuel), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid. 1957, **51**, № 2, 139—159 (исп.)

Приводится метод решения уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x),$$

основанный на приближенном представлении решения в виде линейной комбинации некоторых линейно независимых функций. Исследуется вопрос о сходимости полученного представления. Э. Апарисио

8281. **Обобщение метода Ньютона—Рафсона приближенного определения корней уравнения. II. Зайта** (Untersuchungen über die Verallgemeinerungen der Newton—Raphsonschen Wurzelapproximation. II: Mitt. Zajta A.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1957, **19**, № 1—2, 25—60 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Автор устанавливает общие свойства итерационных процессов, выражаемых формулой $x_{n+1}=\varphi(x_n)$. При этом предполагается, что функция $\varphi(x)$ содержит x не явно, а только через функцию $f(x)$ и ее производные, где $f(x)$ — левая часть уравнения $f(x)=0$, для решения которого применяется рассматриваемый итеративный процесс. Такие итерационные формулы он называет формулами типа Ньютона. С точки зрения этой теории он рассматривает метод референта приближенного решения уравнений, метод Кисса, методы Бернулли и Грэффе, а также метод Эйлера для случая кратного корня. Кроме того, приводятся дальнейшие свойства многочленов K_{nm}, введенных автором в части I (РЖМат, 1957, 3547), и вводятся новые многочлены C_{nm}. М. С. Горнштейн

8282. **Замечание к предыдущей работе Касселса (Применение к приближенному решению алгебраических уравнений). Туран** (Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels (Application to approximative solution of algebraic equations). Turán P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 3—4, 291—294 (англ.; рез. русск.)

Пусть $f_k(x)=a_{0k}+a_{1k}x+\ldots+a_{nk}x^n$ — k-й вспомогательный полином, полученный при решении уравнения $f_0(x)=0$ по способу Лобачевского—Греффе, а s_{jk} — сумма j-х степеней корней этого полинома. Для наибольшего по модулю корня уравнения $f_0(x)=0$ установлены неравенства $A\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-k}}<|x_1|<A$, где

$$A=\left[\max_{j=1,2,\ldots,2n-1}|s_{jk}|^{\frac{1}{j}}\right]^{2^{-k}}$$

(k — произвольное натуральное число). А. П. Доморяд

8283. **Графическое нахождение мнимых корней уравнения четвертой степени. Эннекен** (Construction graphique des racines imaginaires des équations du quatrième degré. Hennequin M. A.), Rev. math. spéc., 1957, **68**, № 3, 73—75 (франц.)

8284. **К вопросу о погрешности при приближенном решении уравнений. Кунен** (Zur Genauigkeitsfrage bei der Näherungslösung von Gleichungen. Kuhnen Theodor), Math. und. Phys. Schule, 1958, **5**, № 1, 54—58 (нем.)

Автор высказывается за то, чтобы при всяком вычислении с приближенными числами в школе (имеются в виду старшие классы немецкой средней школы, именно: двенадцатый год обучения, где проходятся элементы высшей математики), а не только при прохождении отдела о приближенных вычислениях, вопрос о точности, о числе верных знаков результата разбирался тщательно. В частности, он предлагает при приближенном решении уравнений методом Ньютона рассматривать вопрос о том, как влияет ограниченная точность коэффициентов уравнения на точность корня, как это сделано в статье Грундмана (РЖМат, 1957, 2692). Однако метод Грундмана выходит далеко за пределы программы. Автор показывает, как можно решить пример Грундмана другим методом, не выходя из программы двенадцатого класса. Приводятся и другие примеры. М. С. Горнштейн

8285. **Метод анализа устойчивости, основанный на теории характеристических чисел матриц. Шварц** (Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen. Schwarz Hans-Rudolf), Z. angew. Math. und Phys., 1956, **7**, № 6, 473—500 (нем.; рез. англ.)

Ставится задача определения количества корней с положительной действительной частью характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$. В отличие от классических критериев устойчивости (Рауса, Гурвица и др.), требующих представления уравнения $|A-\lambda E|=0$ в виде полинома, в данной работе выводится критерий, не связанный с вычислением коэффициентов характеристического полинома.

Матрица A подобными преобразованиями приводится к нормальной форме

$$B=\begin{vmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Утверждается, что количество положительных членов в последовательности b_{nn}; $b_{nn}\cdot b_{n-1,n}$; $b_{nn}\cdot b_{n-1,n}\cdot b_{n-2,n-1}$; ...; $b_{nn}\cdot b_{n-1,n}\ldots b_{23}\cdot b_{12}$ равно количеству характеристических чисел с положительной действительной частью. В частности, если все элементы b_{12}; b_{23}; ...; $b_{n-1,n}$; $-b_{nn}$ положительны, то все характеристические числа имеют отрицательную вещественную часть. Указываются виды и последовательность элементарных преобразований, приводящих, как правило, матрицу A к нормальной форме B.

Однообразие операций позволяет проводить анализ устойчивости на вычислительных машинах. Критерий обобщается на матрицы с комплексными коэффициентами. В. Д. Розенкноп

8286. **К вопросу о механизации решения больших систем нормальных уравнений. Хубларова С. Л.**, Сб. реф. Центр. н.-и. ин-та геод., аэросъемки и картогр., 1954, № 1, 15—16

Было выполнено решение системы из 130 нормальных уравнений, составленной при уравновешивании геодезической сети по способу посредственных измерений, на 80-колонной счетно-аналитической машине методом последовательных приближений. При этом был применен прием ускорения процесса приближений, предложенный А. А. Абрамовым (Докл. АН СССР, 1950, **24**, № 6). Решение потребовало 41 приближения и заняло 39 рабочих дней.

Для решения той же системы по способу исключения без применения счетно-аналитической машины потребовалось 150 рабочих дней. Возможно дальнейшее сокращение времени (на 20—25%), потребного для решения системы на счетно-аналитической машине.

8287. **Определение собственных значений и векторов многолонжеронного крыла с небольшим удлинением. Стейн** (Determining the mode shapes and frequencies of low aspect ratio multispar winks. Stein Marvin L.), J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, № 2, 137—138 (англ.)

Для приближенного вычисления наименьшего собственного значения и соответствующего ему собственного вектора задачи $Az = \omega^2 z$, где A —симметрическая, положительно определенная матрица, автор предлагает следующий градиентный метод.

1) Выбираем произвольный вектор z_i; 2) вычисляем отношение Релея $\mu(z_i) = (z_i^*, Az_i)/(z_i, z_i)$; 3) образуем градиентный вектор $\xi(z_i) \equiv \xi_i = Az_i - \mu(z_i)z_i$; 4) вычисляем отношение Релея для градиента $\mu(\xi_i) = (\xi_i^*, A\xi_i)/(\xi_i^*, \xi_i)$; 5) образуем скаляр $\alpha = [\mu(\xi_i) - \mu(z_i)]^{-1}$; 6) выбираем β из $0 < \beta < 1$; 7) вычисляем новое $z_{i+1} = z_i - \beta\alpha\xi_i$. Тогда $\mu(z_i)$ монотонно сходится к первому собственному значению, а z_i сходится к первому собственному вектору. В. К. Саульев

8288. **Ускорение метода итераций при решении системы линейных уравнений. Ружичка** (Zkrácení iteračního způsobu výpočtu systému lineárních rovnic. Růžička Miroslav), Inžen. stavby, 1957, **5**, № 9, 490—492 (чешск.; рез. русск., нем., англ.)

Формула для быстрого и достаточно точного определения корней системы линейных уравнений, выведенная путем замены последовательных приближений корня использованием показательной кривой с отрицательным (и натуральным) показателем степени. Резюме автора

8289. **О разделенных разностях, выраженных через производные. Симонсен** (On divided differences in terms of derivatives. Simonsen W.), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1—2, 26—45 (англ.)

Изучается формула Стеффенсона для разделенных разностей, выраженных через производные. Эта формула является аналогом известной формулы Маркова. Используя формулу для разделенных разностей, автор получает выражения для центральных разностей четного порядка в некоторой точке a через четные производные в этой же точке, для среднего арифметического центральных разностей нечетного порядка в точке a через нечетные производные в этой же точке, для среднего арифметического центральных разностей четного порядка в точке $a+{}^1/_2h$ через четные производные в этой же точке и для центральных разностей нечетного порядка в точке $a+{}^1/_2h$ через нечетные производные в этой же точке.

Во всех формулах остаточные члены выражаются через производные более высокого порядка в некоторой точке, расположенной внутри рассматриваемого интервала.

Имеются таблицы коэффициентов, встречающихся в соответствующих разложениях разностей по производным. К. Е. Чернин

8290. **О формулах численного дифференцирования. Симонсен** (On formulae for numerical differentiation. Simonsen W.), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1—2, 60—70 (англ.)

В формулах, выражающих производную через разности функций, остаточный член имеет довольно простое выражение только в том случае, когда точка, в которой вычисляется производная, не лежит внутри интервала, в котором определены разности. Для более общего случая была известна сложная форма остаточного члена, которая практически была не применима.

В работе даны удобные для применения формулы для остаточного члена при любом положении точки, в которой определяется производная. К. Е. Чернин

8291. **О точности формул механических квадратур в задачах по определению перемещений. Боровский П. В.**, Тр. Киевск. автомоб.-дор. ин-та, 1956, № 2, 170—175

См. РЖМех, 1955, 5731.

8292. **Применение метода решения уравнений в конечных разностях к цепным уравнениям гидравлического удара Жуковского — Аллиеви. Син Джон Лим**, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, **1**, № 4, 29—44 (кор.; рез. русск.)

8293. **Применение метода конечных разностей к расчету осесимметричных оболочек. Шмельтер** (Zastosowanie rachunku różnic skónczonych do powlok kolowo symetrycznych. Szmelter Jan), Zesz. nauk. Politechn. Łodzkiej, 1954, № 4, 93—118 (польск.; рез. англ., русск.)

Определяются перемещения и напряжения в осесимметричной оболочке переменной толщины. Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, к которой сводится решение, интегрируется методом конечных разностей. В качестве примера дан расчет ротора центрифуги. Н. А. Алфутов

8294. **Алгорифм для вычисления конечного тригонометрического ряда. Гёрцел** (An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series. Goertzel Gerald), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 1, 34—35 (англ.)

Устанавливаются следующие рекуррентные соотношения:

$$U_{N+2} = U_{N+1} = 0;$$

$$U_k = a_k + 2\cos x U_{k+1} - U_{k+2}, \quad k = N, N-1, \ldots, 1;$$

$$\Sigma_0^N a_k \cos kx = a_0 + U_1 \cos x - U_2;$$

$$\Sigma_1^N a_k \sin kx = U_1 \sin x.$$

В. К. Саульев

8295. **Научные применения понятия регулярности. Вернотт** (Les applications scientifiques de la notion de régularité. Vernotte P. Publs scient. et techn. Ministère air, 1956, № 307, 85 p.) (франц.)

Работа состоит из двух докладов, сделанных автором соответственно в Канском и Марсельском университетах. Они озаглавлены «Понятие регулярности в математических исследованиях» и «Вычисления с помощью понятия регулярности, связанные с физическими законами». Регулярность функции (последовательности) определяется как постоянство знаков некоторого числа последовательных разностей этой функции (последовательности) с добавочными соотношениями между знаками. Понятие использовано для уплотнения таблиц функций (даны значения в точках 0, 1, 2, ..., надо с их

помощью и с помощью сведений о знаках разностей приближенно построить значения в точках 1/2, 3/2..., или в точках 1/3, 2/3, 4/3, 5/3...) и для сглаживания экспериментальных данных, когда из каких-либо соображений вытекает их регулярность. Общей теории решения вышеупомянутых задач в работе нет, использованы только самые очевидные факты из теории линейных неравенств. Ссылки на работы по этой теории тоже отсутствуют. Много числовых примеров.

С. Ф. Пашковский

8296. **Основные соотношения для сейсмического метода геологической разведки. Адати** (Fundamental relations on the seismic prospecting and a method of exploration. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1957, **A3**, № 1, 25—31

В некоторой точке O на поверхности земли возбуждаются колебания, которые распространяются в почве, отражаются от поверхности раздела слоев и приходят в различные точки на поверхности земли с различным запаздыванием (которое можно измерить). Если известна скорость распространения колебаний в слое, лежащем выше поверхности раздела, то задача (для плоского случая) получает такую математическую формулировку: Имеется неизвестная кривая в нижней полуплоскости плоскости Oxy. Составить уравнение этой кривой, зная зависимость между переменными величинами Z и X, где Z — длина ломаной OMN, исходящей из начала координат O, отраженной в точке M от искомой кривой и вновь пересекающей ось абсцисс в точке N, а X — абсцисса точки N. Задача получает точное решение; уравнение линии раздела получается в параметрическом виде. Приводятся числовые примеры.

М. Л. Бродский

8297. **О сейсмическом методе геологической разведки. Адати** (A method of exploration on the seismic prospecting. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1957, **A3**, № 1, 1—19; 20—24 (англ.)

Задача, аналогичная поставленной в реф. 8296, решается для случая, когда рассматривается не отражение, а преломление волны при переходе из верхнего слоя в нижний и обратно. М. Л. Бродский

8298. **Исследование возможности применения графо-аналитического метода Чебышева—Ремеза для решения некоторых геодезических задач, связанных с обработкой результатов измерений. Рымаренко Л. А.**, Тр. Брянского лесохоз. ин-та, 1957, **8**, 259—261

В статье референта (РЖМат, 1956, 2898) был указан простой графо-аналитический метод нахождения параметров прямой, представляющей наилучшим образом (в точном смысле чебышевского принципа равномерной аппроксимации) приближенно линейную зависимость между двумя величинами x, y по данному множеству пар соответственных значений этих величин. В данном сообщении отмечается удобство упомянутого метода для решения вопросов указанного типа при обработке результатов многократных измерений в геодезии.

Не ограничиваясь этим, автор в конце заметки развивает некоторые соображения, имеющие своим предметом (если отвлечься от конкретно технической стороны дела) выяснение возможностей использования того же способа графо-аналитической аппроксимации для наилучшего определения, на основе некоторой совокупности эмпирических данных, координат точки на плоскости — с помощью пересечения двух прямых упомянутого чебышевского приближения, полученных, например, при двояком выборе в качестве «независимого переменного» координаты x или y. Референт должен, однако, признаться, что ему эта последняя часть заметки показалась не совсем понятной как в отношении самой постановки вопросов, так и в отношении обоснования их решения. Е. Я. Ремез

8299. **О некоторых задачах чебышевской аппроксимации в теории телекоммуникации. Белевич** (Sur quelques problemes d'approximation de Tchebycheff en théorie des télécommunications. Belevitch Vitold), Bull. Soc. math. Belgique, 1956, **8**, № 2, 158—168 (франц.)

Автор рассказывает об известных, решенных Золотаревым и Ахиезером, задачах аппроксимации некоторых рациональных функций с помощью средств теории эллиптических функций. Библ. 9 назв.

С. Ф. Пашковский

8300. **О вычислении некоторых многоцентровых молекулярных интегралов. Ричардсон** (On the computation of certain multicentered molecular integrals. Richardson James W.), J. Chem. Phys., 1958, **28**, № 2, 362—363 (англ.)

8301. **Метод быстрого возведения в квадрат чисел, больших 25, в уме. Шуман** (Methode zur schnellen Berechnung der Quadrate der Zahlen über 25 im Kopf. Schumann R.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 10, 462—463 (нем.)

8302. **Формы зависимостей, обладающих дополнительными возможностями для преобразования номограмм с ориентированным транспарантом. Хованский Г. С.**, Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 2, 251—254

Рассматривается ряд частных канонических форм уравнений, для которых возможно построение номограмм с ориентированным непрозрачным транспарантом. Одной из таких форм является уравнение Массо. Использование параметров проективного преобразования служит для дополнительных деформаций номограмм.

Г. Е. Джемс-Леви

8303. **Определение функциональной зависимости между тремя табулированными величинами с помощью номограмм из выравненных точек. Мичка, Шмидт** (Zjišťování funkční závislosti mezi třemi tabelovanými veličinami pomocí spojnicových nomogramů. Míčka Jiří, Schmidt Oskar), Aplikace mat., 1957, **2**, № 4, 279—296 (чешск.; рез. русск., нем.)

Дается способ построения номограммы из выравненных точек для заданной таблицы с тремя переменными, и по этой номограмме определяется функциональная зависимость между переменными. Рассматриваются шесть типов функциональных зависимостей:

$$z = ax + by + c; \quad z = ax^m y^n + b; \quad z = ab^x c^y + d;$$

$$z = ax^m b^y + c; \quad z = a\log x + b\log y + c;$$

$$z = a\log x + by + c.$$

Приводятся критерии, позволяющие определить, является ли зависимость, описываемая таблицей, одной из этих шести зависимостей и какой. Эти критерии опираются только на те значения переменных, которые имеются в таблице. Т. Грушкова

8304. **Номограмма для вычисления** $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$.

(Een nomogram voor de berekening van $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$), Statist. neerl., 1958, **12**, № 1, 55 (гол.)

8305. **Номограммы. Адамс** (Nomograms. Adams Douglas P.), Tech. Engng News, 1957, **39**, № 3, 26—41 (англ.)

Популярная статья о номографии, содержащая ряд примеров рабочих номограмм. Наиболее интересные среди них следующие:

1) Номограмма из выравненных точек с параллельными шкалами для определения дня недели в зависимости от числа, месяца и года исторической даты.

2) Номограмма из выравненных точек для уравнения $x=\left[\frac{z+1-y_0}{y_0-1}\right]^2\left[\log_e y_0-\left(1-\frac{1}{y_0}\right)\right]$ со слабо искривленной шкалой $y_0(0\leqslant y_0\leqslant 100)$ и параллельными шкалами x и z $(0\leqslant x,\ y\leqslant 100)$.

3) Номограмма из выравненных точек для решения полного кубического уравнения $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ в пределах $-100\leqslant A,\ B\leqslant 100,\ -200\leqslant C\leqslant 200$, $0\leqslant x\leqslant 100$. Переменные A и B представлены параллельными шкалами; переменные x и C — бинарным полем.

4) Номограмма из выравненных точек для формулы $L=\frac{A^2+B^2}{A+B}$ в пределах $1\leqslant A,\ B,\ C\leqslant 10$.

5) Номограмма с индексом в виде семейства концентрических окружностей для формулы $UV=RS$.

6) Плоский чертеж пространственной номограммы из выравненных точек для решения уравнения $x^5+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ в пределах $-10\leqslant A,\ B,\ C\leqslant 10$, $0\leqslant x\leqslant 4$ (РЖМат, 1956, 5536). Переменные A, B и C представлены шкалами; переменные x и D — бинарным полем. Приведено построение кривой решения для уравнения $x^5-9x^3+10x^2-3x+0{,}2=0$. Очевидно, что подобное построение занимает 10 мин.

Кроме этого, дан пример построения номограммы с контактом касания для эмпирической зависимости с тремя переменными, заданной сетчатой номограммой.

Г. С. Хованский

8306 К. Численные и графические приближенные методы. Балинт (Numerikus és grafikus közelitö módszerek. Egyetemi segédkönyv. Bálint Elemér. Budapest, Tankönyvkiado, 1955, 215 l., 30 ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 10, 321 (венг.)

Книга издана в серии «Упражнения по технической математике». Ее целью в первую очередь является пополнение учебного материала технических университетов. Содержание книги: Теория ошибок; Полиномы; Системы линейных уравнений; Конечно-разностные методы; Уравнения высшей степени; Интерполяция; Графические методы. Приведено много задач. Gy. Tarnay

8307 К. Практические вычисления. Праудфут (A practical calculus. Proudfoot Alec Grenville Stewart. Melbourne—London, Macmillan, 1957, (1958), 272 pp., ill., 15 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 424, 10 (англ.)

8308 К. Быстрые вычисления без логарифмической линейки, без логарифмов и без машины. Массон (Le calcul numérique rapide, sans règle, ni logarithmes, ni machine. 5e éd. Masson Henri. Paris, Eyrolles, 1957, 66 p., 300 fr. Multigr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 46, 1048 (франц.)

8309 К. Номограммы с ориентированным транспарантом. Хованский Г. С., М., Гостехиздат, 1957, 204 стр., 4 р. 60 к.

Автор рассматривает практические методы построения номограммы с ориентированным транспарантом, несущим на себе только шкалы, немые линии или фиксированные точки. Данная работа в значительной мере является повторением предыдущих работ автора, лишь кое в чем дополненных.

Работа разделена на шесть глав. В гл. I излагаются принципы построения номограмм с ориентированным транспарантом для общего случая — системы 4 уравнений с 9 переменными. В уравнения элементов номограммы вводятся параметры аффинного преобразования, которые позволяют приспособлять номограмму, делать ее рабочей. В остальных главах рассматриваются различные частные случаи основной канонической формы. Уменьшение количества переменных позволяет вводить дополнительные параметры, а иногда и произвольные функции, что, по утверждению автора, позволяет в некоторых случаях улучшать номограмму.

Известный интерес представляет гл. VI — «Особые случаи построения и применения номограмм с ориентированным транспарантом», в частности § 61 — «Применение бинарных полей номограмм в качестве функциональных сеток». Достоинством книги является большое количество подробно рассмотренных и вполне элементарных примеров, хорошие чертежи и наличие сводки канонических форм.

Г. Е. Джемс-Леви

ТАБЛИЦЫ

8310. Таблица функции $F(a,b)=\int_0^a J_1(x)\,(x^2+b^2)^{-1/2}dx$. Фрёйберг, Вильгельмссон (Table of the function $F(a,b)=\int_0^a J_1(x)\,(x^2+b^2)^{-1/2}dx$. Fröberg Carl-Erik, Wilhelmsson Hans), Kgl. fysiogr. säll.

Протабулирована с шестью десятичными знаками функция

$$F(a,b)=\int_0^a J_1(x)\,(x^2+b^2)^{-1/2}dx=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left[(a^2+b^2)^{r+1/2}-b^{2r+1}\right]}{2^{2r+1}(2x+1)r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{b^{2s}}{2^{2s}s!\,(r+s+1)!}$$

для $a=0(0{,}1)\,10$ и $b=0(0{,}1)\,10$. Для промежуточных значений из квадрата $0\leqslant a,\ b\leqslant 1$ полная точность обеспечивается применением пятиточечной по обеим переменным интерполяционной формулы Лагранжа. Вне этого квадрата используется специальная формула.

В. К. Саульев

8311. Функции Лагерра: таблицы и свойства. Хед, Вильсон (Laguerre functions; tables and properties. Head J. W., Wilson W. Proctor), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **C103**, № 4, 428—440 (англ.)

Протабулирована функция Лагерра $\lambda_n(x)$ для $n=0(1)20$ и $x=0(0{,}1)\,1(0{,}2)\,3(0{,}5)\,6(1)\,14(2)\,40(5)\,100$ с четырьмя десятичными знаками (или двумя значащими цифрами, когда это более точно). Приведены также пятизначные таблицы 210 нулей функции Лагерра для $n=1(1)20$. Рассматриваются различные свойства функций Лагерра (ортогональность, дифференцирование и интегрирование, формулы сложения, конечные и бесконечные ряды и пр.).

В. К. Саульев

8312. Логарифмические таблицы в школьном обучении. Дрец (Die Logarithmentafel im Schulunterricht. Dreetz W.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 10, 468 (нем.)

См. также: 7605, 7827

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

8313. Деление на цифровых машинах по методу радиксов. Надлер (Dělení číslicovými počitači metodou radixů. Nadler Morton), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 79—102 (чешск.; рез. русск., англ.)

Приводится обзор методов, применяемых для операций деления на счетных машинах. Автор предлагает

новый метод, состоящий в последовательном выполнении циклов, определяемых формулами:

$$b_i = b_{i-1}P_i,\ b_0 = b,\quad a_i = a_{i-1}P_i,\quad a_0 = a,$$

где P_i — числа вида $1 + \beta_i g^{-n_i}$, β_i — целое число меньшее g (g — основание системы счисления), n_i — целые числа, $n_{i+1} > n_i$. Множители P_i выбираются так, что $b_i \to 1$; автор называет их радиксами, следуя Флауэру (Flower), который предложил применение таких множителей для нахождения многозначных логарифмов. Тогда $a_i \to \frac{a}{b}$.

При $g = 2$ алгоритм выбора P_i очень прост, и весь цикл сводится к сложениям и сдвигам. Число необходимых циклов может быть уменьшено, если допускать $b_i > 1$ и P_i вида $1 \pm \beta_i g^{-n_i}$. В этом случае, при $g = 2$, для получения частного с N значащими цифрами требуется в среднем 0,37 N циклов (но никогда не больше чем $N-2$).

Если формулу для b_i взять в виде $b_i = b_{i-1}P_i^2$, то $a_i \to \frac{a}{\sqrt{b}}$.

Библ. 9 назв. К. А. Семендяев, С. П. Кузнецов

8314. ПАКТ-IA. Стил (PACT-IA. Steel T. B., Jr), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 8—11 (англ.)

Описывается компилирующая программа ПАКТ-IA (PACT-IA), предназначенная для автоматического программирования машины ИБМ-704. При разработке этой программы стремились максимально упростить правила программирования и обнаружения ошибок. Все арифметические операции производятся с плавающей запятой. Используется код одноадресной однооперационной последовательной машины, имеющей два индекса для модификации адреса и условную передачу управления.

Код позволяет распознавать определенные элементарные функции, для ввода других функций используется библиотека программ. Основные элементы в коде переменны и определяются с помощью индексов. Код может вызывать считывание карт и печать. 40 операций в системе ПАКТ-IA имеют простое мнемоническое обозначение на 4 или меньше знаков.

Различаются 5 видов памяти, в которых хранятся команды, включающие в себя промежуточный код, константы, требуемые при выполнении промежуточного кода, входные и вычисленные переменные. Процесс составления программы есть последовательность шагов, каждый из которых требует одного или более последовательных прогонов ленты. Во время каждого шага совершаются вычисления в пределах быстродействующей памяти.

Вначале данные с перфокарт преобразуются в код ПАКТ-IA и переносятся на карты или на ленту. Отсюда они вводятся в устройство, где преобразуются в последовательный код и записываются на ленту, которая связана с основным блоком машины ИБМ-704. Этот блок преобразует информацию с ленты и собирает двоичные команды в обычном порядке. Второй шаг есть абстрактное собирание операций. На этом шаге также заканчиваются передачи управления и осуществляются циклические переносы. На третьем шаге в машину вводятся входные и принудительные переменные и осуществляется полное собирание кода.

Затем следуют три шага перевода. Первый шаг состоит в переводе в код машины ИБМ-704 арифметических и управляющих операций. На втором шаге перевода генерируются команды для управления, испытания величин индексов и выполнения предварительных вычислений. С помощью схем относительных адресов производятся все адресования. Эти адреса преобразуются в адреса действительной машины. На последнем шаге производится собирание программы и преобразование ее в двоичный код, а также составляется таблица относительного распределения памяти в машине и загрузки программы. Все это в двоичном коде пробивается на карты. Требуется пропустить 31 раз ленту и затратить от 5 до 40 мин. для перевода кода ПАКТ-IA в двоичный код ИБМ-704, пригодный для вычисления.

М. С. Саплин

8315. Некоторые методы программирования для вычислительной машины ЭРМЕТХ. Рутисхаузер (Some programming techniques for the ERMETH. Rutishauser Heinz), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 1, 1—4 (англ.)

8316. Общая программа расчетов на картах для оценки обратного преобразования Лапласа. Тайтус (A general card-program for the evaluation of the inverse Laplace transform. Titus C. K.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 1, 18—27 (англ.)

8317. Многозначные двоичные коды для неравномерного распределения символов. Брукс (Multi-case binary codes for nonuniform character distributions. Brooks F. P.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, **5**, № 2, 63—68 (англ.)

Рассматриваются многозначные двоичные коды, в которых одни и те же сочетания символов имеют два или более значений, зависящих от состояния дешифратора. Такие коды предлагаются для использования в системах передачи данных, как значительно снижающие количество каналов передачи и сохраняющие при этом простоту и удобство обычных двоичных кодов с постоянным количеством разрядов. Примером устройства с многозначным кодом является обычная пишущая машинка (два значения на ключе). Различаются два типа переключений (shifts) состояния дешифратора. Первый — переключение устойчивых состояний, когда после переключения дешифраторное устройство остается в новом, устойчивом состоянии до следующего переключения. Второй тип — временное переключение, когда система из устойчивого состояния переходит в неустойчивое, в котором она пребывает единицу времени, и затем автоматически возвращается в исходное состояние. Указывается, что переключатели первого рода выгодны только в тех случаях, когда данные сгруппированы так, что переключения должны выполняться редко. Такие системы допускают разную длину кода в каждом из состояний, сохраняя при этом преимущества систем с кодами одинаковой длины.

На примерах подробно разбираются способы многозначного кодирования для передачи данных с количеством разрядов, большим, чем 2^n, где n — количество каналов. Так, при наличии 4 каналов и использовании двоичного кода с 2 состояниями и временным переключением можно передавать 31 значение кодов; 15 при одном состоянии и 16 — при другом; 1 код используется для переключений. Наличие сигнала переключения перед первыми 15 кодами равносильно использованию кодов двух длин: 4 и 8.

Излагаются принципы сравнения двузначных и многозначных кодов с точки зрения экономичности и удобства пользования ими. Стоимость передачи по различным кодам оценивается количество разрядов на передаваемую характеристику. Приведена таблица и описание 9-значной системы кодирования Хафмана как пример наиболее удачно решенной задачи. В этой системе стоимость передачи одной характеристики равна 4,13 двоичным разрядам, по сравнению с 4,42 двоичными разрядами, достигнутыми в лучшей системе двузначного кодирования.

З. Д. Доброхотова

8318. Замечания о смешанном кодировании. Голи (Notes on hybrid coding. Golay M. I. E.) (With the

rebuttal by Balser M., Silverman R. A.), Proc. I. R. E., 1955, **43**, № 5, 625 (англ.)

Термин «смешанное кодирование» (hibrid coding) относится к операциям кодирования и декодирования при передаче цифровой информации, где амплитуда полученного сигнала используется для исправления ошибок. Объясняется и иллюстрируется примером способ расшифровки полученной информации и устранения ошибок. Результаты, полученные при помощи оптимального смешанного кодирования, сравниваются с результатами, полученными при помощи кодов, предложенных Вагнером, Балсером и Силварменом. Указывается, что оптимальный смешанный код дает наилучший результат. Балсер (Balser M.) и Силверман (Silverman R. A.), возражая автору заметки, отмечают, что описанное оптимальное смешанное кодирование совпадает с известным методом минимума вероятности ошибки.

О. С. Кулагина

8319. **Оценка системы оптимального кодирования, использованной в машине Пайлот-АКЭ Национальной физической лаборатории. Уилкинсон** (An assessment of the system of optimum coding used on the pilot automatic computing engine at the national physical laboratory. Wilkinson J. H.), Philosophical Trans. Roy. Soc. London, 1955, **A248**, № 946, 253—281 (англ.)

Описывается система оптимального кодирования, использованная в Пайлот-АКЭ (Pilot ACE) — электронной вычислительной машине Национальной физической лаборатории (в Англии). Приводится ряд простых примеров программ, приготовленных для машины, и дается оценка выигрыша в скорости, вытекающего из использования оптимального кодирования в общем случае. В заключение приводится описание конструкции полной машины АКЭ (упрощенной моделью АКЭ служит машина Пайлот-АКЭ), которая полностью использует общие принципы, воплощенные в конструкции машины Пайлот-АКЭ. По резюме автора

8320. **Цифровая вычислительная машина инженера имеет размеры письменного стола** (Engineers digital computer is deskside companion), Automat. Control, 1957, **7**, № 4, 66—67 (англ.)

Описывается небольшая машина ИБМ-610 «Отопойнт» (Auto-Point), предназначенная для решения таких небольших инженерных задач, где невыгодно применять большие вычислительные машины. Данные вводятся в машину вручную с помощью клавиатуры или автоматически с перфоленты. Вводимые данные и промежуточные результаты вычислений запасаются на магнитном барабане. Особенностью машины является то, что она автоматически следит за положением запятой в десятичных числах (отсюда название Auto-Point, т. е. «автоматическая запятая»). Выход — через электрическое печатающее устройство. Оператор может вручную на этом же устройстве печатать заголовки перед выдаваемыми данными и делать любые другие записи. Любое запасенное в машине число может визуально контролироваться оператором на 2-дюймовой электронно-лучевой трубке. Скорость вращения магнитного барабана 6400 об/мин, диаметр 200 *мм*. Барабан содержит 84 регистра, в каждом из которых можно записать 31-разрядное двоичное число со знаком и запятой. Вводимые и выводимые из машины числа обычно имеют 15 разрядов, но возможна работа с удвоенным числом разрядов. Арифметическое устройство машины может выполнять операции сложения, вычитания, умножения, деления, комбинированного деления с умножением, извлечением квадратного корня, передачи чисел, сдвига и логические операции. Скорость работы составляет 214 сложений или вычитаний в 1 мин. Типовые задачи, которые можно решать на машине, таковы: проектирование шоссе и мостов, расчет напряжений, флаттера и вибраций при проектировании реактивных самолетов; операции с матрицами; расчет кулачков и др. В. А. Брик

8321. **Французские универсальные вычислительные машины КАБ. Намьян** (Les calculatrices universelles françaises C. A. B. Namian P.), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 122, 360—370 (франц.)

Приводятся данные серии универсальных электронных цифровых вычислительных машин КАБ (CAB — Calculatrice Arithmétique Binaire), выпускаемых фирмой СЭА (SEA — Société d'Electronique et d'Automatism). Первая машина этой серии КАБ-2022 была выпущена в 1954—1955 гг. Это универсальная последовательная машина, работающая с 21-разрядным двоичным числом. Она может выполнять 26 различных операций. При помощи специального приспособления, называемого «нормализатором», могут выполняться операции над числами с «плавающей запятой». Длительность сложения, вычитания и сдвига на один разряд составляет 0,23 *мсек*, длительность умножения и деления — 5,3 *мсек*. Имеется оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью 128 слов и магнитный барабан емкостью 8192 слова при среднем времени обращения в 15 *мсек*. Предусмотрена возможность выполнения групповых операций и стандартных программ. Внешние устройства машины используют телеграфную 5-позиционную перфоленту. Лента читается фотоэлектрическим способом.

Вслед за КАБ-2022 были выпущены машины КАБ-1000, КАБ-2100 (вариант машины КАБ-2022, предназначаемый для промышленных и статистических вычислений), КАБ-2200 (вариант КАБ-2022, предназначаемый для научных вычислений), КАБ-3000 и КАБ-5000. Они отличаются быстродействием, объемом памяти и большим количеством внешних устройств. Интересной их особенностью является возможность работы со словами различной длины. Например, длина слова у КАБ-3000 может составлять 26, 30, 36 и 42 разряда.

Длительность сложения и вычитания у всех машин примерно одинакова; длительность умножения у машины КАБ-3000 составляет 0,64 *мсек*. Машины КАБ-3000 и КАБ-5000 имеют оперативное запоминающее устройство емкостью 1024 слова и магнитный барабан емкостью 16 384 слова. А. В Шилейко

8322. **Французские разработки в области вычислительных машин. Бутийон** (Réalisations françaises en matière de calculateurs. Bouthillon Leon), Onde électrique, 1956, **36**, № 353—354, 691—692 (франц.)

Вводная статья к серии статей по вычислительной технике, публикуемых журналом Onde électrique. Обозревается история развития вычислительной техники во Франции и современное состояние разработок в этой области. Компания «Буль» (Bull) выпустила серийно несколько сот малых цифровых вычислительных машин «Гамма» различных модификаций. Существенные усовершенствования в машину ИБМ-650 внесены французским отделением ИМБ совместно с компанией «J. G. Maisonrounge-& Montigny». Лаборатория фирмы ONERA разрабатывают большую цифровую машину и элементы такой машины. Многое сделано в области теории цифровых машин.

Основные работы по моделирующим вычислительным устройствам ведутся в лаборатории «Дерво» (Derveaux) и в Обществе электроники и автоматики (SEA).

А. А. Крупский

8323. **Опытная вычислительная машина Бомбейского института фундаментальных исследований «Тата»** (The pilot digital calculator— Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 110 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

В Бомбейском исследовательском институте «Тата» была разработана и построена опытная цифровая вычи-

слительная машина. Работа была выполнена за период с начала 1955 по ноябрь 1956 г. Эта машина параллельного типа является асинхронной, работает с 11-разрядными (включая знак) двоичными числами в системе с фиксированной запятой в диапазоне чисел от —1 до +1.

Ферритовое запоминающее устройство в виде двумерной матрицы 11×100 имеет емкость 100 кодов. Инструкция требует 4 разрядов для представления кода операции (сложение, вычитание, умножение, деление, сдвиг, перенос, ввод, вывод, условный и безусловный переход, стоп). Ввод данных осуществляется с перфоленты через фотоэлектрический трансмиттер фирмы «Ферранти». Вывод данных производится ленточным перфоратором и телетайпом. Машина потребляет 10 *квт*. Все блоки машины собраны в 4 шкафах размером 2,3×2,1×0,6 *м*.

В. Д. Князев

8324. Фирма «Либраскоп» (Librascope, Inc. Glendale, California), J. Assoc. Comput, Machinery, 1957, **4**, № 1, 111 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Фирма «Либраскоп» объявила о выпуске устройства, преобразующего информацию с перфоленты в электрические сигналы, пригодные для подачи их на вычерчивающее устройство (X—Y Plotter Model 200-A). Выпускается также устройство для подачи информации с перфокарт в это вычерчивающее устройство (50 карт в 1 мин).

В. Д. Князев

8325. Вычислительная машина АРМАЦ (The ARMAC), J. Assoc. Computer Machinery, 1957, **4**, № 1, 106—108 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Сообщается о вычислительной машине АРМАЦ (ARMAC — Automatische Rekenmachine Mathematisch Centrum), спроектированной и построенной амстердамским вычислительным центром. Конструирование машины было начато в марте 1955 г., а пуск в работу произведен в июне 1956 г.

АРМАЦ представляет собой электронную вычислительную машину, работающую с 34-разрядными двоичными цифрами в системе с фиксированной запятой. Отрицательные числа представляются обратным кодом. Программа строится из одноадресных инструкций, занимающих 17 разрядов (5 цифр определяют вид операции, а 12 — адрес числа). В одном коде может быть записано две инструкции. Арифметический узел последовательного типа имеет два триггерных регистра «А» и «S», которые взаимозаменены для всех операций, за исключением умножения. Операция деления выполняется по определенной подпрограмме. Имеется три запоминающих устройства: 1) магнитный барабан (алюминиевый с оксидным покрытием) емкостью 3584 кода, вращающийся со скоростью 4500 об/мин; 2) запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью 512 кодов; 3) запоминающее устройство емкостью 32 кода, используемое в качестве буферного, чтобы уменьшить среднее время выработки инструкций с барабана. Ввод данных производится либо с перфоленты через фотоэлектронный трансмиттер со скоростью 150 знаков в 1 сек., либо вручную с клавишной панели.

Вывод данных производится через электрическую пишущую машинку (9 знаков в 1 сек.) или через быстродействующий перфоратор «Кринд». Основная частота тактирующих импульсов равна 100 *кгц*. Сложение выполняется за 416 *мксек*, умножение — за 5,4 *мсек*. Число одноадресных операций в 1 сек. колеблется от 1000 до 2400 в зависимости от структуры программы. Машина потребляет 12 *квт* и содержит 1200 ламп и около 9000 германиевых диодов.

В. Д. Князев

8326. Вычислительная машина ЛАРК (LARC), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 389—390 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Сообщается о большой вычислительной машине ЛАРК (LARC — Livermore Atomic Research Computer), которую строит фирма «Ремингтон Рэнд».

Основу вычислительной системы составляют две вычислительные машины с программным управлением. Одна из них служит для управления входными и выходными устройствами и для обработки данных, а вторая представляет собой машину для выполнения арифметических операций в системе с фиксированной или плавающей запятой. Эти две машины работают независимо друг от друга (за исключением некоторых операций передачи информации) и могут действовать одновременно.

К системе может быть подключена также вторая арифметическая машина.

Быстродействующее запоминающее устройство на магнитных сердечниках, обслуживающее как арифметическую машину, так и машину для обработки входных данных, может включать в себя до 39 блоков емкостью каждый по 2500 одиннадцатиразрядных десятичных кодов (что составляет 97 500 кодов). Эти блоки имеют автономные адресные коммутаторы, и выборка из них может производиться одновременно. Быстродействующее запоминающее устройство загружается информацией с регистратора на магнитных барабанах (общим числом до 24). Каждый барабан имеет емкость в 250 000 кодов. Барабаны снабжены плавающими головками, что дает возможность получить большую плотность записи.

Система имеет пульт оператора и отдельно контрольный пульт. В качестве входных и выходных устройств применяются блоки магнитных лент от машины УНИВАК-II, быстродействующая печатающая головка, клавишная панель для ввода информации и телетайп на пульте оператора. Кроме того, машине могут быть приданы устройства: фотопечати; чтения с перфокарт: перезаписи информации с магнитной ленты на перфокарты и перфоленты; печати информации с ленты на лист.

Арифметическая машина включает в себя 8 быстродействующих регистров показателя числа (index registors), 18 быстродействующих арифметических регистров, 4 управляющих счетных регистра и 3 регистра инструкций, что позволяет вести гибкое программирование в условиях перекрытия инструкций. Число быстродействующих регистров может быть доведено до 200.

Перекрытие по времени выполнения инструкций позволяет иметь следующие скорости арифметических операций: 4 *мксек* для сложения с плавающей запятой, 8 *мксек* для умножения, 28÷32 *мсек* для деления.

Система снабжена контрольными схемами для обнаружения ошибок, причем эти же схемы позволяют исправлять ошибки без вмешательства оператора.

В. Д. Князев

8327. Вычислительная машина ПЕННСТАК (PENNSTAC), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 391 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Вычислительная машина Пеннсильванского университета ПЕННСТАК (PENNSTAC) была закончена постройкой 1 июля 1956 г. Машина была создана примерно за 2,5 года силами студентов и работников университета. Она используется одну половину времени для научных вычислений, а другую половину — для учебных целей.

В. Д. Князев

8328. Вычислительная машина УНИВАК-Сайентифик-1103А (UNIVAC Scientific 1103A), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 392—393 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Ремингтон-Рэнд» вычислительной машины 1103А (UNIVAC Scientific 1103A). Эта вычислительная машина может работать с тремя блоками ферритового запоминающего устройства емкостью каждый в 4096 кодов и с запоминающим устройст-

вом на магнитном барабане, емкостью в 16 884 кода. Машине придаются блоки магнитных лент «Юнисерво» (Uniservo), каждый из которых может вместить до 384 тысяч кодов (10 блоков могут вместить около 4 млн. кодов информации). В. Д. Князев

8329. Вычислительная машина СТРЕТЧ фирмы «ИБМ» для Комиссии по атомной энергии (IBM—STRETCH—AEC), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 102—103 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Комиссией по атомной энергии США подписан с фирмой «Ибм» контракт на разработку гигантской универсальной цифровой вычислительной машины СТРЕТЧ (STRETCH) для научно-исследовательской лаборатории в Лос-Аламосе. Эта вычислительная машина должна работать в 100—200 раз быстрее любой из существующих машин. В 1 сек. она будет выполнять примерно 2 миллиона сложений и до 500 000 умножений, работая с 12÷15-значными числами. В. Д. Князев

8330. Фирма «ИБМ» (IBM), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 100—102 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Сообщается о разработках фирмы «ИБМ» на 1957 г. Закончена разработка и идет изготовление бухгалтерской машины ИБМ-РАМАК (305 RAMAC с запоминающим устройством емкостью 5 млн. знаков и произвольной выборкой.

Запоминающее устройство состоит из 50 металлических дисков, посаженных на вертикальный вал. Для записи используются обе стороны диска. На каждой стороне диска расположено по 100 дорожек, на каждой из которых записывается 500 двоичных цифр. Выборка информации производится рычагом с пишущими и читающими головками. Информация передается группами по 100 двоичных цифр. Вертикальный вал вращается со скоростью 1200 об/мин. В этой машине используется печатающее устройство ИБМ-370, перфоратор ИБМ-523, блок обработки данных ИБМ-305 с рабочим магнитным барабаном и буферным запоминающим устройством на магнитных сердечниках на 100 цифр, предназначенных для передачи информации с барабана на дисковое запоминающее устройство. Управление системой производится от блока ИБМ-380. Ввод данных в систему осуществляется с перфокарт и клавишной панели.

Фирма предполагает выпускать вычислительную машину ИБМ-650-РАМАК, которая будет составлена из вычислительной машины ИБМ-650 и запоминающего устройства ИБМ-355 (число последних может быть доведено до четырех).

Дисковое запоминающее устройство ИБМ-355 подобно типу, применяемому в машине «305-РАМАК», но на каждой дорожке может быть записано 600 цифр. На 4 таких блоках можно записать 24 000 000 двоичных цифр. Особенностью этой системы является возможность ввода и вывода информации на нескольких пунктах, что достигается использованием опросных станций ИБМ-838, которые могут быть удалены от центральной системы до 150 *м*.

Фирмой выпускается также система сбора производственных данных АПР (APR — Automatic Production Recording System). Эта система включает в себя ручное и перфокартные устройства ввода, выходные перфораторы и выносные телетайпы. Такие данные, как число изделий, температура, давление и др., в виде электрических сигналов подаются в систему и преобразуются там в цифровую форму для передачи в запоминающее устройство или на перфоратор или печатающее устройство. Константы (данные для определения считываемой величины) вводятся с поворотных переключателей. Центром системы является программный датчик, координирующий поток информации от входных устройств к запоминающему устройству и выходным устройствам. В. Д. Князев

8331. Новый «электронный мозг» (New «electronic brain»), Electr. Rev., 1957, **161**, № 13, 558 (англ.)

Сообщение о том, что английская фирма «Феррранти» начала серийный выпуск большой электронной вычислительной машины «Меркурий». Указывается, что машина может решать задачи примерно в 50 раз быстрее любой из существующих в Западной Европе (т. е. со скоростью 60÷75 тыс. операций в 1 сек.) и не уступает самым крупным американским машинам.

«Меркурий» — универсальная машина, работает в системе с «плавающей» запятой. Ее габариты: основные шкафы 9,68×0,41×1,93 (высота) *м*, пульт управления 1,83×0,86×0,78 *м*, блок магнитного барабана 0,83××0,69×1,60 *м*, шкаф питания 2,08×0,66×1,98 *м*. Машина потребляет 40 *квт* (цифра может несколько меняться в зависимости от подключения вспомогательных устройств), а система охлаждения— соответственно 15 *квт*. Система охлаждения — воздушная, замкнутая, с водяной или пароконденсаторной рефрижерацией. Объявленная фирмой стоимость (с установкой и наладкой на месте) — около 100 тыс. фунтов стерлингов.

Машина «Меркурий» предназначена для выполнения наиболее сложных задач, связанных с управлением и перехватом управляемых снарядов, ядерными исследованиями, предсказанием погоды и аэродинамическими расчетами. Один из первых образцов машины будет установлен в английском атомном центре в Харвелле.

Фирма «Феррранти» предполагает выпускать по одной машине «Меркурий» каждые 6 недель. Полный производственный цикл в настоящее время составляет около 12 месяцев. Приведено фото общего вида машины.

А. А. Крупский

8332. Фирма «Эллиот» (Elliott Brothers Limited), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 399 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Первая вычислительная машина 405 фирмы «Эллиот» начала работать в январе 1956 г. Сообщается, что в качестве одного из выходных устройств машине стала придаваться электрическая пишущая машинка, работающая со скоростью 20 знаков в 1 сек., причем в строке может быть помещено до 170 знаков. Машине будет придано вспомогательное запоминающее устройство на магнитных лентах, емкостью 32 768 кодов. В. Д. Князев

8333. Вычислительная машина ДЭЮКЕ (DEUCE (The English Electric Co. Ltd, Stafford)), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 398 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Сообщается, что фирма «Инглиш Электрик» (The English Electric Co.) выпустила 7 вычислительных машин ДЭЮКЕ. Приводится таблица использования рабочего времени машины. За месяц полезное время в среднем составляло 88%. Предполагается снабжать вычислительную машину блоком магнитных лент. В. Д. Князев

8334. Малые электронные вычислительные устройства. Электронное сальдирующее устройство БУЛЬ-ES-24 и электронные умножающие устройства БУЛЬ-ЕМ-10 и БУЛЬ-ЕМ-20. (Elektronische Kleinrechengeräte. Der BULL-Elektronensaldierer ES 24. Die BULL-Elektronenmultipliziergeräte EM 10 und EM 20), MTW-Mitt., 1957, **4**, № 3, 199—200 (нем.)

Рекламное сообщение об электронных вычислительных устройствах фирмы «Буль». Сальдирующее устройство ES-24, работающее совместно с перфокартной сортировкой, позволяет контролировать «нулевое сальдо» для сортируемых бухгалтерских счетов, записанных на перфокартах. Устройство останавливает сортировку при нарушении «нулевого сальдо». Применение устройства ES-24 высвобождает табуляторы, на которых ранее проводилось такое сальдирование. Описаны также электрон-

ные умножающие устройства ЕМ-10 и ЕМ-20, работающие совместно с репродуцирующими перфораторами.

8335. Проверка переменой режимов. Метод профилактического обслуживания вычислительных машин. Джонс (Marginal checking an aid in preventive maintenance of computers. Jones J. Melvin), Computers and Automat., 1955, **4**, № 4, 10—14 (англ.) Обзорная статья.

8336. Диэлектрический регистратор. Андерсон (Dielectric recorder. Anderson V. C.), Rev. Scient. Instrum., 1957, **28**, № 7, 504—509 (англ.)

Приводятся описание и характеристики диэлектрического запоминающего устройства, которое предназначается для использования в качестве кратковременной памяти в аналоговых вычислительных машинах. Это устройство представляет собой вращающийся барабан, наружный слой которого выполнен из плексигласа — диэлектрика с высокими удельными объемным и поверхностным сопротивлениями. Запись осуществляется путем нанесения электрических зарядов на поверхность барабана с помощью специальной записывающей головки. Особенностью описываемого устройства является то, что контакт между поверхностью барабана и записывающей головкой осуществляется через слой ионизированного воздуха при атмосферном давлении. Ионизация воздуха осуществляется с помощью вспомогательного высокочастотного разряда (напряжение около 2 *кв*, частота 400 *кгц*). Преимуществом такого контакта по сравнению с механическим является отсутствие порогового напряжения и хорошая линейность между записываемым напряжением любого знака и зарядом.

Подробно описывается конструкция записывающей и считывающей головок и приводятся их характеристики. Размеры записывающей головки: диаметр 16 *мм*, высота 7 *мм*. Полная ширина считывающей головки 2,5 *мм*. Отмечается относительно слабая зависимость уровней записи и считывания от расстояния между поверхностью барабана и соответствующими головками.

Описывается многоканальный регистратор с диаметром барабана 32 *см* и такой же высотой. Производится сравнение данных многоканального диэлектрического регистратора с типичными характеристиками магнитных барабанов:

	Диэлектрический барабан	Магнитный барабан
Линейная скорость	50 *см/сек*	250 *см/сек*
Расстояние между головкой и барабаном	0,13 *мм*	0,013 *мм*
Зависимость величины сигнала от зазора	0,5 *дб*/25 *мк*	5÷10 *дб*/25 *мк*
Верхняя граница частот	400 *гц*	10 *кгц*
Нижняя граница частот	1 *гц*	100 *гц*
Минимальная длина волны	1,27 *мм*	0,25 *мм*
Динамический диапазон	60 *дб*	50 *дб*

Отмечаются следующие преимущества диэлектрического барабана по сравнению с магнитным: меньшие допуски при обработке и монтаже, больший динамический диапазон записываемых величин, линейность записи и отсутствие насыщения. Указывается, что диэлектрический барабан может быть использован также как интегратор и как узкополосный фильтр. З. Л. Доброхотова

8337. Запоминающее устройство фирмы «RCA» (RCA Memory Unit), J. Assoc. Comput. Mashinery, 1957, **4**, № 1, 112 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Фирма «RCA» объявила о разработке нового запоминающего устройства, состоящего из тонких прессованных пластин из специального материала с пробитыми отверстиями. Фирма предполагает, что такие пластины могут заменить матрицы из магнитных сердечников. Они делаются из материала, разработанного фирмой, подобного керамике и твердеющего при термической обработке. Экспериментальный блок имеет размер около 4 *см*^{2} и содержит 256 отверстий, что позволяет запомнить 256 цифр. Считывающие и другие обмотки можно наносить печатным способом прямо на пластины. В. Д. Князев

8338. Радехон — запоминающая трубка с барьерной сеткой. Дженсен (The radechon, a barrier grid storage tube. Jensen Arthur S.), RCA Review, 1955, **16**, № 2, 197—215 (англ.)

8339. Буферное запоминающее устройство 1092-BU-7 фирмы «Телеметр Магнетикс» (The 1092-BU-7 Buffer storage unit-telemeter magnetics, Inc.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 112 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Сообщается о выпуске буферного запоминающего устройства 1092-BU-7 емкостью 1092 числа. В. Д. Князев

8340. Память вычислительной машины. Фаулер (The computer's memory. Fowler Franklin, Jr), Control. Engng, 1956, **3**, № 5, 93—101 (англ.)

Обзорная статья.

8341. Логические принципы двоичного счетчика нового вида. Уэр (The logical principles of a new kind of binary counter. Ware Willis H.), Proc., 1953, **41**, № 10, 1429—1437 (англ.)

Рассматривается практическая необходимость иметь специальные накапливающие счетчики небольшой емкости для того, чтобы на каждый имеющийся накапливающий элемент существовал другой элемент, регистрирующий изменение первого. Этот второй элемент не находится в состоянии изменения в любой промежуток времени, когда первый элемент меняется или вообще находится в неустойчивом состоянии.

Рассматриваются одноразрядные и многоразрядные счетчики с двумя видами перекидных устройств (toggles).

Указывается на преимущества работы с такими счетчиками (скорость, упрощение в оборудовании). При использовании этих счетчиков нет необходимости в тщательном контроле постоянных времени и тщательном формировании сигналов. Л. С. Гринтауз

8342. Стандартные импульсные схемы (Unitized pulse circuits), Instruments, 1953, **26**, № 11, 1699—1700 (англ.)

Реклама фирмы «Одио Продуктс» (Лос Анжелос).

8343. Цифровые вычислительные схемы с полупроводниковыми триодами. Шпайзер (Digitale Schaltungen mit Transistoren. Speiser A. P.), Scientia electr., 1957, **3**, № 4, 121—126 (нем.; рез. англ., франц.)

Рассматриваются с привлечением алгебры логики основные схемы, с помощью которых выполняются операции в двоичной системе. Отмечается перспективность использования для выполнения этих операций полупроводниковых триодов (ППТ), имеющих ряд преимуществ перед электронными лампами. Рассмотрены основные схемы включения ППТ; проведено сравнение этих схем с ламповыми схемами. Рассмотрены работа логического отрицания и схем логического сложения и умножения, полученных путем параллельного включения ППТ с заземленным коллектором или эмиттером. Приведена триггерная схема. Подчеркивается, что в полупроводниковых схемах ППТ обычно используются только как усиливающий элемент, а логические связи осуществляются при помощи диодов.

Обычные ППТ для включения последующего каскада требуют делителя напряжения. Применение ППТ с поверхностным барьером и дрейфовых ППТ дает возможность избавиться от делителя напряжения.

Е. В. Кариженский

8344. Фирма «Филко» (Philco), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 105 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Филко» самолетной вычислительной машины на транзисторах «Транзак» (Transac — Transistorized Automatic Computer), которая благодаря малому весу и размерам может быть установлена на истребителе. В. Д. Князев

8345. Транзисторные арифметические схемы для вычислительной машины с перемежением разрядов. Барнс, Хауэлс, Кук-Ярборо (Transistor arithmetic circuits for an interleaved-digit computer. Barnes R. C. M., Howells G. A., Cook-Yarborough E. H.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B 103**, Suppl. № 3, 371—381, Discuss., 407—411 (англ.)

8346. Управляющий блок для работы машины ДАТАТРОН в режиме плавающей запятой (DATATROH, flouting point control unit), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 401—402 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Вычислительная машина ДАТАТРОН снабжается вспомогательным блоком, позволяющим работать машине в режиме плавающей запятой в диапазоне чисел от 10^{-51} до 10^{49}. Числа представляются в десятичном нормализованном виде. При этом сложение и вычитание производятся за 2,5 *мсек*, умножение — за 10,1 *мсек*, деление — за 13,5 *мсек*. В. Д. Князев

8347. Новые разработки для системы ЭЛЕКОМ-125 (New developments— ELECOM 125 system), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 98—99 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Приводятся данные нового вспомогательного оборудования для вычислительной системы ЭЛЕКОМ-125 фирмы «Ундервуд» (Underwood Corp.). В настоящем виде система может выполнять ряд комбинированных операций над перфокартами: сравнение — разделение, замена — разделение, сравнение — выборка — разделение, замена — выборка — разделение, выборка — сравнение, замена — выборка.

Внутреннее запоминающее устройство системы ЭЛЕКОМ-125 увеличено до 4000 десятизначных кодов, причем можно довести емкость до 6000, 8000 или 10 000 кодов. Добавлено быстродействующее запоминающее устройство емкостью 50 кодов, которое может быть расширено до 100 кодов. Повышена скорость ввода и вывода данных на магнитных лентах до 6000 знаков в 1 сек. Имеется новое устройство чтения с перфокарт (скорость 400 знаков в 1 сек.) с буферным устройством, благодаря которому работа может производиться параллельно с вычислениями. Быстродействующий ленточный перфоратор имеет скорость 60 знаков в 1 сек. Коммутационный пульт позволяет подсоединять к центральному вычислительному блоку один из 16 блоков магнитных лент.

В качестве вспомогательного оборудования добавлено быстродействующее параллельное печатающее устройство, работающее со скоростью от 48 до 120 знаков в 1 сек. Дополнительное устройство унифицирует информацию с 5-, 6-, 7- и 8-дорожечных лент. В. Д. Князев

8348. Фирма «Лоджистик Ресерч» (Logistics Recearch Inc.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 112 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Сообщается о выпуске быстродействующего оборудования для ввода и вывода информации (с использованием бумажной ленты) для вычислительной машины «АЛЬВАК III-Е». В комплект оборудования входит фотоэлектрический трансмиттер, читающий информацию со скоростью 400 знаков в 1 сек., и перфоратор, дающий 60 пробивок в 1 сек. В. Д. Князев

8349. Вычислительная машина «Вихрь-1» (Whirlwind 1), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 105—106 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Сообщается, что за период с 1 июня по 24 сентября 1956 г. вычислительная машина «Вихрь-1», установленная в Массачусетском технологическом институте, работала со средним коэффициентом полезного действия 98,8%. За это время было 114 повреждений, причем в среднем на устранение одного повреждения затрачивалось 17,3 мин. Емкость ферритового запоминающего устройства машины доведена за этот период до 6144 кодов. В. Д. Князев

8350. Цифровая вычислительная машина ИРА-1130 для решения задач по созданию самолетов и управляемых снарядов (ERA-1130 digital computer to solve aircraft and missile problems), Electr. Engng, 1955, **74**, № 8, 693 (англ.)

8351. Замечания о магнитной записи в области вычислительных машин. Ремон (Considérations sur l'enregistrement magnétique dans le domaine des machines à calculer. Raymond F. H.), Onde électr., 1955, **35**, № 335, 89—96 (франц.; рез. англ.)

Описываются физические условия, связанные с использованием магнитной записи для цифровых вычислительных машин. Показаны основные соотношения между геометрическими размерами записывающих и воспроизводящих головок и плотностью двоичной информации, которая может быть записана. Резюме автора

8352. Контрольная панель для проверки программных карт, используемых для управления вычислительной машиной общего назначения ИБМ-КПК-101. Хэмминг (A 101 control panel for testing general purpose CPC cards. Hamming R. W.), IBM Appl. Sci. Div. Techn. Newsletter, 1955, № 9, 53—55 (англ.)

8353. Перфокартная система ввода и вывода данных КАРДАТРОН (CARDATROH, Punched card input-output system), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 400—401 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Фирма «Электродата» (Electrodata Corp.) выпустила систему КАРДАТРОН (CARDATRON), управляющую входными и выходными перфокартными устройствами и подсоединяющую их к вычислительной машине «ДАТАТРОН».

Система управляет следующими входными устройствами: раскладчиком 058, репродуктором 528, суммирующим перфоратором 523. К выходным устройствам системы относятся: табуляторы 407 и 419 и суммирующий перфоратор 523. Каждый входной и выходной блок имеет небольшой магнитный барабан, используемый как буферное запоминающее устройство. КАРДАТРОН управляет обменом информации между буферными и центральными запоминающими устройствами. Благодаря этим буферным системам можно осуществить одновременную работу всех устройств. В. Д. Князев

8354. Электронный регистратор фирмы «Электродата» (Electrodata Electronic Filing Unit) J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 110—111 (Digital Computer Newsletter, 1957, **9**, № 1) (англ.)

Электронный регистратор, который на короткой магнитной ленте может запоминать большой объем информации, построен фирмой «Электродата», и вместе с вычислительной машиной ДАТАТРОН образует систему регистрации данных большой емкости ДАТАФАЙЛ (DATAFILE).

Каждая система ДАТАФАЙЛ может запоминать до 20 млн. данных в одном блоке памяти, причем до 10 ДАТАФАЙЛОВ можно объединить в одно устройство емкостью в 200 млн. цифр. Каждая система имеет 50 лент длиной 60 *м*, на каждой из которых информация запоминается имеющими свои адреса блоками по 200 цифр. Скорость движения ленты равна 1,5 *м/сек*. Ин-

формация считывается и записывается перемещающимися головками. Емкость ленты увеличена благодаря использованию на одной ленте двух параллельных каналов по 6 дорожек в каждом. На концах ленты имеются отверстия, действующие как вакуумные концевые выключатели и останавливающие ленту. Поиск блока может осуществляться без остановки работы машины. Фирма имеет заказы на 50 таких систем. В. Д. Князев

8355. **Автоматические вычислительные машины в Швеции. Хульт** (Automatiska räknemaskiner i Sverige. Hult Jan), Tekn. tidskr., 1955, 85, № 13, 273—281 (шведск.)

8356. **Шведская автоматическая вычислительная машина БЭСК. Стемме** (Den svenska automatiska räknemaskinen Beck. Stemme Erik), Tekn. tidskr., 1955, 85, № 13, 281—292 (шведск.)

8357. **Вычислительный центр фирмы «ИБМ» в Англии.** (IBM United Kingdom London Data Processing Centre), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 1, 110 (Digital Computer Newsletter, 1957, 9, № 1) (англ.)

Фирма «ИБМ» открывает в Лондоне свой первый в Англии вычислительный центр. Центр будет оборудован вычислительной машиной ИБМ-650. В. Д. Князев

8358. **Испытательный центр военно-морской авиации США** (Naval Air Test Center), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 390 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

Сообщается об эффективности работы вычислительной машины «Дататрон-204» на испытательном центре военно-морской авиации США в Мериленде с мая по июль 1956 г. За этот период полезное время составляло 93÷96%. Профилактический уход занимал примерно 11÷13% времени, отладка программ — 10÷53% и продуктивный счет — 12÷58%. В. Д. Князев

8359. **Центр по вычислениям и обработке данных при Хаустонском университете** (University of Houston. Computing and Data Processing Center), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 396 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

Университетом в г. Хаустоне (Техас, США) совместно с промышленниками создан вычислительный центр. Центр использует вычислительную машину ИБМ-650. В. Д. Князев

8360. **Институт вычислительной техники** (Centro Study Calcolatrice Elektroniche (C. S. C. E.)), J. Assoc. Comput Machinery, 1956, 3, № 4, 398 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

Институт вычислительной техники (Cento Study Calcolatrice Electroniche, г. Пизо, Италия), основанный в 1955 г., начал разработку большой цифровой вычислительной машины для научных исследований. Считается, что постройка машины будет закончена в 1958 г.

Машина — параллельного типа, оперирующая с двоичными 36-разрядными числами в системе с фиксированной запятой. Она будет иметь ферритовое запоминающее устройство, емкостью 1024 кода и магнитный барабан емкостью 12 288 кодов. Информация будет вводиться через фотоэлектрический трансмиттер с перфоленты и выводиться на параллельное печатающее устройство. Арифметический узел будет иметь два накопителя, один из которых будет использоваться как регистр множителя. Инструкция одноадресная, занимает полный 36-разрядный код, причем 6 разрядов используется для определения операции, 12 — для определения обычного адреса, а остающиеся 18 разрядов используются наподобие В-регистра. В. Д. Князев

8361. **Первая вычислительная машина СЕЙДЖ установлена** (First SAGE computer installed), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 388 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

Большая вычислительная машина AN/FSQ-7 для системы СЕЙДЖ (SAGE — Semi-Automatic Ground Environment), применяемой в службе наблюдения ПВО США, установлена на военно-воздушной базе Мак Гайр в штате Нью-Джерси. Эта вычислительная машина, получая данные от радиолокационных станций, исследует скорость, высоту, направление и число обнаруженных самолетов и определяет наиболее эффективный способ защиты.

Вычислительная машина AN/FSQ-7 построена фирмой «ИБМ» при участии Массачусетского технологического института. Машина сконструирована так, чтобы работать 24 часа в сутки, 7 дней в неделю. Профилактический уход за ней не мешает поступлению данных в систему. В. Д. Князев

8362. **Новая вычислительная машина составляет сердцевину системы противовоздушной обороны большого охвата** (New computer is heart of vast air defense system), Electr. Engng, 1956, 75, № 9, 876 (англ.)

Краткое сообщение о системе СЕЙДЖ (SAGE — Semi-Automatic Ground Environment), управляющей противовоздушной обороной (США).

8363. **Пуск системы обработки данных фирмы «Сильвания»** (Sylvania data processing system unveiled). J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 392 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

26 июня 1956 г. фирма «Сильвания» (Sylvania Inc.) ввела в действие свою сеть проводной связи общей протяженностью около 30 тыс. *км* и подключенную к этой сети систему централизованной обработки данных. Вычислительный центр находится в г. Камиллус (Camillus), куда передаются данные с 71 завода и конторы фирмы. По линиям связи передается информация, касающаяся объема продукции, продажи, заказов и т. д., позволяющая более гибко управлять делами фирмы. В. Д. Князев

8364. **Вычислительные машины с телеуправляемым входом. Фицджеральд** (Computers with remote data input. Fitzgerald E. L.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 69—74. Discuss., 74—75 (англ.)

8365. **Частотный анализ квантованных систем и цифровых вычислительных машин. Боксер** (Analysis of sampled data systems and digital computers in the frequency domain. Boxer Rubin), IRE Convent. Rec., 1955, 3, № 10, 78—85 (англ.)

8366. **Фантастронная схема вычисляет отношения продолжительности импульсов к их периоду. Финдли** (Phantastron computes pulse-width ratios. Findley L. D.), Electronics, 1954, 27, № 1, 164—167 (англ.)

8367. **Универсальный цифровой полетный тренажер** (Universal digital operational flight trainer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 393—394 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

Фирма «Сильвания» (Sylvania Inc.) по заказу военно-морского флота США с помощью Пенсильванского университета создает полетный тренажер ЮДОФТ (UDOFT—Universal Digital Operational Flight Trainer).

Тренажер имеет оборудованные кабины двух определенных самолетов и состоит из сверхбыстродействующей последовательно-параллельной цифровой вычислительной машины, оборудования для преобразования непрерывных данных в цифровые и записывающих систем. Принимаются меры, чтобы приспособить ЮДОФТ для любых самолетов. В. Д. Князев

8368. **Обработки данных при наличии непосредственной связи вычислительной машины с датчиком** (On-line data reduction), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 4, 384—396 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 4) (англ.)

Сообщается, что для испытательного туннеля E-1, используемого для исследования вопросов газовой динамики в лаборатории «Arnold Engineering Development

Center» разработана система связи датчиков туннеля с цифровой вычислительной машиной ИРА-1102 (ERA-1102). Система эта считывает показания с датчиков, преобразует их в эквивалентную цифровую информацию, запоминает данные и печатает их в десятичном виде или вычерчивает в виде кривой. Связь между датчиками и вычислительной машиной осуществляется через шаговый искатель, имеющий 252 позиции и осуществляющий обход со скоростью 20 позиций в 1 сек.

Данные в вычислительную машину могут подаваться в любом порядке, который может быть задан при помощи коммутационной доски, связанной с шаговым искателем. Величины, характеризующие давления, температуры, силы и т. д., подаются в вычислительную машину в виде 15-разрядных двоичных чисел. Управление машиной сводится к нажатию кнопки «взять данные». Измерение и запись 74 точек занимает 56 сек., вычисление и печать занимают 2,75 мин. Градуировочные работы ускоряются с применением этого устройства примерно вчетверо, причем производятся более точно.

В случае использования вычислительной машины для других работ можно вести автономную запись данных на перфоленту. В. Д. Князев

8369. **Автоматизация фондовой биржи** (Stock exchange automation), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 391—392 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Фирма «Телерегистр» (Teleregister Corp.) устанавливает электрические курсовые табло в маклерских конторах, обслуживаемых фондовой биржей города Торонто (Канада).

Система позволяет получать на табло цены спроса и предложения на любые 50 видов товаров, которые маклер может выбирать. При поступлении данных служащий биржи записывает их на магнитный барабан. Цены при этом автоматически посылаются во все обслуживаемые конторы, и если маклером выбран этот вид товаров, то цена появляется на установленном в его конторе табло. В нормальных условиях для ответа достаточно 3 сек., но в «тяжелые» дни ответ задерживается до 50 сек. Подобные табло фирма предполагает установить в 46 городах США в количестве 400 штук. В. Д. Князев

8370. **Комбинация цифровой вычислительной машины и дифференциального анализатора** (Digital computer and differential analyzer combination (Bendix Computer Division)), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 386—388 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 4) (англ.)

Приводятся данные входного, выходного и вспомогательного оборудования комбинированной вычислительной системы фирмы «Бендикс» (Bendix Computer Division). Эта система включает цифровую универсальную вычислительную машину G-15D и цифровой дифференциальный анализатор DA-1. Для ручного ввода информации используется телетайп (10 знаков в 1 сек.) Ввод информации с 7-дорожечной перфоленты может быть осуществлен через особое устройство АН-1 (AN-1) со скоростью 200 знаков (букв или цифр) в 1 сек. Это же устройство используется для вывода информации через быстродействующий перфоратор ПТП-1 (PTP-1) на ленту со скоростью 60 знаков в 1 сек. Имеется устройство для чтения перфокарт КА-1 (CA-1) (12 карт в 1 мин). Блок магнитных лент МТА-2 вмещает до 300 000 кодов группами по 108 кодов. Скорость чтения и записи составляет около 20 *см/сек*, скорость поиска 1,2 *м/сек*. Машине придаются 2 графических устройства: вычерчиватель кривых ПА-1 (PA-1) и повторитель кривых ПФА-1 (PFA-1). Эти приборы могут ставить точки через 0,2 *мм* и дают график размером 300×450 *мм*. Цифровой дифференциальный анализатор DA-1, содержащий 108 интеграторов и 108 перемножателей констант, работает со скоростью 34 интегрирований в 1 сек. В. Д. Князев

8371. **Применение моделирующих вычислительных устройств при конструировании современных самолетов. Бауэр, Ричман** (Analog computers in modern aircraft design. Bauer Louis, Richman Peter), Aviat. Age, 1956, **25**, № 6, H4—H6 (англ.)

В общих чертах изложены трудности, с которыми сталкивается авиаконструктор при проектировании современных самолетов и которые надлежит решить посредством применения вычислительных моделирующих устройств. Это прежде всего: а) значительное расширение диапазона скоростей полета самолета от $M=0{,}2$ до $M>1$; б) применение сложных систем в управлении с целью компенсирования потерь устойчивости и уменьшения усилия на штурвале летчика (демпфера, бустера, автопилот и пр.); в) большие углы атаки полета самолета; г) сложность вычисления моментов инерции современных самолетов; д) большие скорости угловых перемещений, являющиеся следствием больших скоростей; е) сложность аналитического вопроизведения аэродинамических коэффициентов в трансзвуковой области скоростей. К вычисленным моделирующим машинам предъявляется ряд общих требований: а) максимальная гарантия от неточностей работы оператора; б) более высокие качества входящих систем, агрегатов, деталей; в) способность установки решать задачи в натуральном масштабе времени — хорошие динамические характеристики; г) максимальная способность машин к быстрым переключениям, набору новых задач.

Отмечается, что в современных моделирующих устройствах особое значение приобретает контроль. Кратко анализируются различные схемы и методы контроля. В настоящее время в эксплуатации находятся усилители постоянного тока с полосой пропускания свыше 10 *кгц*, которые позволяют производить решения с частотой 100 циклов в 1 сек. без значительных ошибок в амплитуде и сдвиге фаз. Суммирующий усилитель постоянного тока может хорошо держать $0{,}3\times10^{-10}a$, выполняя интегрирование без обратной связи в течение 5 мин. при смещении нуля не более 10 *mv*.

Разработан ряд конструкций быстродействующих полностью электронных умножителей, использующих: а) диоды с квадратичными характеристиками; б) время-импульсную модуляцию; в) принцип АМ-ЧМ. В функциональных генераторах наиболее обещающим является применение диодов с изменяющимся наклоном характеристики, позволяющих воспроизвести в широком диапазоне нелинейные аэродинамические функции с точностью нескольких промилль. В. А. Комаров

8372. **Новая польская математическая машина. Шептыцкий** (Nowa polska maszyna matematyczna. Szeptycki Pawel), Problemy, 1956, **12**, № 3, 191—192 (польск.)

Популярный очерк о польской аналоговой вычислительной машине АВА (AWA — Analizator Wielomianów Algebraicznych), построенный в Математическом институте Польской Академии наук по проекту Лукашевича (L. Łukaszewicz). Машина предназначена для нахождения корней многочленов до 12-й степени и тому подобных расчетов. В ней используется представление комплексных чисел синусоидальными напряжениями различных амплитуд и фаз.

8373. **Решающие усилители для тренажеров на кристаллических триодах. Уэйрик** (Transistor analogue computing amplifiers for flight simulators. Weyrick Robert C.), Commun. and Electronics, 1956, № 25, 338—342 (англ.)

Описывается два типа усилителей на кристаллических триодах, предназначенных для работы в схеме вычи-

слительного устройства, имитирующего полет самолета и работающего на несущей частоте 400 *гц*. Усилители взаимозаменяемы с ранее разработанными для этой цели ламповыми усилителями.

Усилитель первого типа выполняет суммирование 4 и менее напряжений с точностью 1% при выходной мощности 125 *мвт*. Двухтактный трансформаторный оконечный каскад усилителя для получения удовлетворительной симметрии выполнен на двух разных кристаллических триодах. Один из них, типа *X*-2 (*n-p-n*) фирмы «Texas Instruments», питается от источника с напряжением +22 *в*, а второй, типа 2N43 (*p-n-p*) фирмы «Transitron», питается от источника —22 *в*. Оба триода включены по схеме с заземленной базой. Предварительные реостатно-емкостные каскады выполнены на плоскостных триодах типа 1859. У триодов входного и предоконечного каскадов заземлены коллекторы, а у двух остальных — эмиттеры. Предусмотрены элементы коррекции частотной и фазовой характеристик.

Усилитель второго типа предназначен для питания серводвигателя. Он имеет три каскада усиления напряжения (таких же, как у суммирующего усилителя), фазочувствительный детектор, выполненный на 4 кристаллических триодах типа 1859, и выходной магнитный усилитель.

Основные данные усилителей в сравнении с аналогичными данными ламповых усилителей сведены в таблицу:

	Суммирующий усилитель		Сервоусилитель	
	кристаллический	ламповый	кристаллический	ламповый
1. Коэффициент усиления на частоте 400 *гц*, в *дб*	44,4	45,3	—	—
2. Сдвиг фазы при замкнутой обратной связи на частоте 400 *гц*, в градусах	0,4	0,6	—	—
3. Потребляемая мощность, в *вт*	0,6	8,4	0,3	6,9
4. Вес, в *г*	768,6	1503	1445,8	2920,0
5. Объем, в $см^3$	998,4	3411	1667,2	3442,2

А. В. Шилейко

8374. **Умножающая система, построенная по принципу двукратной модуляции амплитуды. Лукашевич Л.**, Бюл. Польской АН, 1955, отд. 4, **3**, № 3, 147—157

Цель настоящей заметки — представить решение сплошной электронной умножающей системы, которая, несмотря на ее сравнительно простую структуру, отличается точностью порядка 0,3% полной шкалы и полосой проводимых частот около 10 *кгц* для обоих сомножителей. Если полоса эта более узка, мы можем построить систему, обладающую гораздо большей точностью. Основанием нашей системы является двукратная модуляция амплитуды переменного напряжения большой частоты, причем коэффициенты модуляции пропорциональны, поочередно, обоим входным напряжениям.

Из текста статьи

8375. **Синтез передаточных функций с помощью операционных усилителей и пассивных схем. Матьюс, Сейферт** (Transfer-function synthesis with computer amplifiers and passive networks. Mathews M. V., Seifert W. W.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 7—12 (англ.)

Исследование динамических систем на моделирующих устройствах часто требует синтеза сложных передаточных функций. Чтобы найти эффективные способы для реализации таких передаточных функций с минимальной затратой оборудования, методы синтеза схем комбинируются с методами, используемыми в работе электронных дифференциальных анализаторов. Основные принципы, посредством которых усилители с большим усилением и фазоинвертирующие усилители соединяются со схемами RS, используются для получения трех систематических методов, позволяющих синтезировать передаточные функции различных степеней сложности. Описываемая методика иллюстрируется примером.

Резюме автора

8376. **Моделирование систем с квантованными данными. Клейн** (Analog simulation of sampled-data systems. Klein R. C.), IRE Trans. Telemetry and Remote Control, 1955, **TRC-1**, № 2, 2—7 (англ.)

Рассматриваются системы автоматического управления, в которых используются квантованные амплитудно-модулированные данные и дискретные звенья. Описываются методы моделирования таких систем на основе техники релейных схем.

8377. **Моделирующие устройства для рентгенографического анализа X-RAC и S-FAC. Форназери** (I calcolatori analogici per analisi Röntgenografica X-RAC e S-FAC. Fornaseri Mario), Ricerca scient., 1955, **25**, № 3, 544—552 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

8378. **Аналоговая вычислительная машина** (Calculateur analogique), Mesures et contrôle industr., 1955, **20**, № 219, 562 (франц.)

Краткое сообщение о французской аналоговой вычислительной машине «Джинн-20 A.S.» (Djinn-20A.S.).

8379. **Моделирующее устройство для изучения стационарного полета вертолетов. Дюзайи** (Un simulateur pour l'étude du vol stationnaire des hélicoptères. Dusailly J.-F.), Electronique, 1955, № 103, 21—25 (франц.)

8380. **Конструкция удобной вычислительной машины для решения сложных задач по ползучести металла. Кеннеди** (Design of a comprehensive computer for handling complex creep problems. Kennedy A. J.), Engineer, 1955, **200**, № 5188, 2—4 (англ.)

Рассматриваются характеристики ползучести металла и описывается моделирующее устройство для решения задач по ползучести металла. Библ. 16 назв.

8381. **Моделирующее устройство КАК. Гонсалес-дель-Вальe** (Le calculateur analogique C. A. C. Gonzalez del Valle A.), Rev. cálculo automát. y cibernet., 1955, **4**, № 11, 18—23 (франц.; рез. исп.)

Обсуждаются возможности создать на основе предложенной автором «метрической геометрии электрических сетей» моделирующее устройство КАК (CAC — Conversor Angular—Cartesiano) для перевода угловых координат в декартовы. Устройство предназначается для применения в радиолокации.

8382. **Моделирующие устройства с запоминающими и упреждающими устройствами. Лефгрен** (Analogimaskiner med separata minnen och prediktorer. Löfgren Lars), Tekn. tidskr., 1955, **85**, № 13, 296—299 (шведск.)

8383. **Модельное исследование взаимодействующих и невзаимодействующих многоконтурных управляющих систем для турбореактивных двигателей. Пак, Филлипс** (Analog study of interacting and noninteracting multipleloop control systems for turbojet engines. Pack George J., Phillips W. E., Jr. Repts. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., 1955, № 1212, 13 pp.) (англ.)

8384. **Моделирующее устройство для управляемых снарядов** (Analogue computer for guided missiles), Electr. Times, 1955, **128**, № 3344, 875—876 (англ.)

Общее описание моделирующего устройства ТРИДАК, установленного на Британском государственном авиазаводе (Royal Aircraft Establishment) в Фарнборо (Англия).

8385. **Электронное моделирующее устройство «Карболой»** (Il calcolatore analogico «Carboloy». O. G.), Macchine, 1957, **12**, № 5, 423—431 (итал.)

8386. **Компоненты для электронных моделирующих устройств** (Electronic analog computing components George A.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 6, 149 (англ.)

Реклама фирмы «Филбрик» (Бостон).

8387. **Высокопрецизионное вычислительное устройство для автоматического решения астрономического треугольника. Марнер** (High precision computer for automatic solution of the celestial triangle. Marner Gene R.), Navigation, 1955, **4**, № 7, 281—285 (англ.)

Описывается компактное моделирующее устройство для автоматического решения астрономического треугольника с целью получения высоты и азимута. Дается анализ экспериментальных измерений ошибок. Вероятная ошибка по высоте составляла 0,5′. Для высот менее 70° вероятная ошибка азимута составила 0,8′.

Резюме автора

8388. **Изучение помех методом моделирования. Беннет** (Analog computing applied to noise studies. Bennett R. R.), Proc. IRE, 1953, **41**, № 10, 1509—1513 (англ.)

Указывается, что для анализа поведения нелинейных и изменяющихся во времени систем может быть применен метод моделирования. Входная функция генерируется и подается к системе-модели.

При линейных зависимостях в исследуемых системах применяется метод наложения характеристик, дающий возможность анализировать частотные или импульсные характеристики. Приводятся блок-схемы машин-моделей.

Л. С. Гринтауз

8389. **Электронные дифференциальные анализаторы. Очерк основных принципов вычислений на моделирующих устройствах. Ремон** (Les analyseurs differentiels electroniques. Exposé sur les principes fondamentaux du calcul analogique. Raymond Francois-Henri), Revue HF, 1955, **3**, № 4, 131—144 (франц.)

8390. **Механический дифференциальный анализатор в лаборатории прикладной математики. Форсман** (Den mekaniske differentialanalysator ved laboratoriet for anvendt matematik, D. t.H. Fordsmand M.), Ingeni ören, 1956, **65**, № 33, 652—656 (датск.)

8391. **Электронные и моделирующие вычислительные машины. Веццани** (I calcolatori elettronici ed analogici. Vezzani Renzo), Giorn. genio civile, 1955, **93**, № 1, 5—20 (итал.)

Излагаются основные сведения о цифровых («электронных») и моделирующих вычислительных машинах.

8392. **Составление счетов за коммунальные услуги информационной машиной ИБМ-650 с магнитным барабаном. Трекслер** (Public utility customer accounting on the Type 650 magnetic drum data processing machine. Trexler George F.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, **1**, № 4, 173—176 (англ.)

Описывается использование вычислительной машины ИБМ-650 (РЖМат, 1958, 6263) при составлении счетов потребителям газа, электроэнергии, воды и т.п. ИБМ-650 обладает рядом преимуществ и особенностей для использования ее именно для такого рода работ. Указывается, что введенный метод записи показаний контрольных приборов потребителей на перфокарты в сочетании с автоматической их обработкой на ИБМ-650 значительно повышает уровень механизации этих трудоемких работ и сокращает количество возможных ошибок. Данные, набитые на картах, дают все необходимые сведения: адрес потребителя, его номер, род обслуживания, тариф, показания счетчика и т. п. Объем одной перфокарты позволяет вести на ней учет в течение 6 месяцев. При составлении нового счета машина учитывает, оплачен ли предыдущий счет и оплачен ли он точно, с излишком или недостатком. Если показания текущего месяца не снимались, счет выписывается с учетом среднего потребления сезонности. В статье подробно описывается последовательность операций, выполняемых машиной над данными, записанных с перфокарт на барабане, вплоть до момента выписки окончательного счета и записи соответствующей информации на будущее. Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с полной автоматизацией подобных работ. З. Д. Доброхотова

8393. **Технические и научные применения цифровых вычислительных машин.** (Engineering and scientific applications of digital computers), Engineer, 1956, **201**, № 5230, 372—373 (англ.)

Резюме трех докладов, представленных на совещание по цифровой вычислительной технике в Обществе инженеров-электриков (Англия). Совещание происходило в Лондоне 9—14 апреля 1956 г. Доклады посвящены машинному решению задач по энергосистемам, электротяге и синтезу электрических схем. Особое внимание уделяется машине ДЭЮКЕ. Библ. 8 назв.

8394. **Вычислительные машины в научных исследованиях. Энон** (Les machines à calculer dans la recherche scientifique. Henon Michel), Laboratoires, 1955, № 15, 7—16 (франц., англ.)

Популярная статья о цифровых и аналоговых вычислительных машинах. Упоминаются цифровая машина «Гамма» фирмы «Буль», моделирующее устройство SEA, моделирующее устройство CSF, моделирующее устройство «Джинн», моделирующее устройство КАРЕДДОЛЬ (CAREDDOL — Calculateur analogique pour la résolution des équations différentielles du deuxième ordre linéaires) и др.

Г. Н. Поваров

8395. **Проверка устойчивости системы автоматического регулирования при помощи критерия с заданной степенью относительного демпфирования на электронных цифровых вычислительных машинах** (Verifica della stabilità di un sistema di regolazione con un criterio a prefissato grado di smorzamento relativo mediante calcolatori elettronici digitali), Quaderni studi e notizie, 1956, **12**, № 233, 816—820 (итал.)

Доклад Санти (Santi Gianoberto) на 57-м собрании Итальянской электротехнической ассоциации. Рассматривается методика расчета критерия Гурвица или таблицы Раута на электронной машине с малым объемом памяти. Относительное демпфирование учитывается условием, что корни характеристического уравнения должны лежать внутри сектора с заданным углом, направленного в сторону отрицательной комплексной полуплоскости.

И. В. Лебедев

8396. **Принцип действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен** (Principe de fonctionnement des calculatrices numériques automatiques. Naslin P.), Mesures et contrôle industr., 1957, **22**, № 238, 195—200 (франц.; рез. англ.)

Часть I статьи по основам цифровой вычислительной техники. Сравниваются свойства вычислительных машин непрерывного действия и цифровых вычислительных машин. Описаны: двоичная система счисления, основные арифметические операции в ней и элементарные логические операции. Приведены релейные схемы, реализующие основные логические операции.

А. В. Шилейко

8397. **Принцип действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен** (Principe de fonctionnement des calculatrices numériques automatiques.

Naslin P.), Mesures et contrôle industr., 1957, **22**, № 239, 303—310 (франц.; рез. англ.)
Ч. 1. статьи см. реф. 8396.

Описываются релейно-контактные схемы, реализующие операции сложения и вычитания в автоматических цифровых машинах. Указывается на 2 возможных варианта схем сумматора. Приводятся логические уравнения, описывающие эти схемы. Кратко характеризуются различные способы представления чисел в цифровых машинах; дается определение дополнительного и обратного кодов и описывается их использование в операциях с отрицательными числами. Приводятся релейно-контактные схемы *n*-разрядного двоичного сумматора и его логические уравнения, а также элементарные схемы устройств для хранения, считывания и передачи двоичных чисел и схема сумматора с накопителем результатов. Изложены принципы построения схемы для автоматической выборки чисел из накопителя по заданным адресам. Э. А. Глузберг

8398. Принципы действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен (Principe de fonctionnement des calculatrices numériques automatiques. Naslin P.), Mesures et contrôle industr., 1957, **22**, № 240, 381—388 (франц.)

Даются определения кода цифровой вычислительной машины и кода программы. Приводится пример программирования элементарных вычислений. Кратко характеризуются одно-, двух- и трехадресные коды. Процесс выполнения каждой команды подразделяется на 2 фазы: «командную фазу», в течение которой из запоминающего устройства выбирается очередная команда и направляется в специальный регистр, и «числовую фазу», в течение которой команда расшифровывается и выполняется. В элементарной форме описываются принципы использования подпрограмм, дается понятие о командах безусловного и условного перехода. Их применение иллюстрируется на примере итерационного процесса. Приводится таблица одноадресного кода релейной машины, содержащей 11 команд, и релейная схема управления, реализующая соответствующие коды с помощью 4 реле На частных примерах поясняются методы программирования вычислений с помощью данного кода машины. Первые две части статьи см. реф. 8396, 8397. Э. А. Глузберг

8399. Вычисление трехцветных координат с использованием электронного вычислительного перфоратора ИБМ-604. Дерр (Computation of trichromatic coordinate using the IBM 604 electronic calculating punch. Derr Albert J.), J. Opt. Soc. America, 1955, **45**, № 9, 772 (англ.)

Описана программа для вычисления на машине ИБМ-604 трехцветных координат при измерении цветов.

8400. Приборы ИБМ на службе автоматизации — (IBM-Geräte im Dienste der Automatisierung), MTW-Mitt., 1957, **4**, № 3, 203—204 (нем.)

Рекламное сообщение о быстродействующем устройстве ИБМ-РАМАК-305 (RAMAC — Random Access Memory) на 50 двусторонних магнитных дисках, вращающихся в виде единого штабеля со скоростью 1200 об/мин. Каждый диск несет на каждой стороне 50 дорожек, на каждой из которых размещается по 10 сторазрядных чисел. Общая емкость устройства 5 млн. двоичных разрядов. Съем производится специальной головкой с электронным управлением, движущейся в горизонтальном и вертикальном направлении. Устройство предназначено для использования с машинами ИБМ-704 и ИБМ-705. Г. Н. Поваров

8401. Применения вычислительных машин. Ч. 2. Миньо (Applications des machines à calculer. 2me partie. Mignot Noël), Rev. gén. méc., 1956, **40**, № 88, 151—157 (франц.)
Ч. 1. см. РЖМат, 1957, 1937.

Краткое изложение принципов устройства основных узлов машин-аналогов. Рассматривается влияние дефектов реализации узлов: конечной величины коэффициента усиления, его зависимости от частоты, дрейфа усилителей — на получаемые результаты. Указывается, что дифференцирующие устройства подчеркивают нерегулярности, в то время как интеграторы их сглаживают; поэтому для решения дифференциальных уравнений следует применять интеграторы. Время работы интеграторов должно быть ограничено, во избежание накопления влияния малых ошибок. И. В. Лебедев

8402. Применение вычислительных машин. Ч. 2 (прод.). Миньо (Applications des machines à calculer. 2 me partie (suite). Mignot Noël), Rev. gén. méc., 1956, **40**, № 90, 240—245 (франц.)
Начало см. РЖМат, 1957, 1937; реф. 8401.

Краткий обзор областей применения машин-аналогов и типов решаемых задач: систем алгебраических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, нелинейных задач. Обсуждая условия эксплуатации машин, автор считает установку даже простых машин непосредственно в конструкторских бюро и на заводах более целесообразной, чем организацию самостоятельных вычислительных бюро. И. В. Лебедев

8403. Применения вычислительных машин. Ч. 2 (прод.) Миньо (Applications des machines à calculer. 2 me partie (suite). Mignot Noël), Rev gén. méc., 1956, **40**, № 94, 387—390 (франц.)
Начало см. РЖМат, 1957, 1937, реф. 8401, 8402.

Кратко рассмотрено соединение автопилота с устройством, моделирующим поведение самолета, в качестве примера использования машин-аналогов для моделирования реальных объектов. Рассказывается о применении моделирующих устройств в качестве тренажеров для обучения персонала в условиях, близких к реальным. Приводятся данные об использовании машин: 20% времени затрачивается на корректную формулировку задачи, 20% на подготовку машины, 40% на неполадки и ошибки персонала (из них около трети на неполадки и две трети на ошибки) и 20% на решение задач и обсуждение результатов. Не следует ожидать особого снижения процента неполадок и ошибок. Будучи раз налажена, машина дает возможность исследовать большое количество случаев. Для решения одного-единственного случая применение машины нерентабельно, работа обойдется дороже ручного счета.

Обозреваются тенденции развития машин-аналогов. Конструкции линейных элементов (усилителей, сумматоров, интеграторов) можно считать установившимися; нелинейные элементы (функциональные устройства, множители, сервомеханизмы) еще далеки от совершенства. Заметна тенденция к сочетанию аналогов с цифровыми машинами. В больших устройствах с сотнями усилителей для сокращения времени настройки разрабатываются методы автоматического соединения частей. Развитие идет, с одной стороны, по пути создания уникальных больших устройств с большими возможностями, а с другой — по пути широкого применения в конструкторских бюро более простых серийных машин. И. В. Лебедев

8404. О применении вычислительных устройств в автоматических системах. Фельдбаум А. А., Автоматика и телемеханика, 1956, **17**, № 11, 1046—1056

Дается обзор и классификация направлений применения вычислительных устройств в автоматических системах. Последние разделены на следующие основные типы: а) системы автоматического жесткого управления (с.а.ж.у.); б) системы автоматического регулирования

(с.а.р.); в) самоизменяющиеся, или самонастраивающиеся, системы, часто называемые также системами автоматической настройки (с.а.н.) или самоорганизующими системами. Указывается, что применение вычислительных устройств в с.а.ж.у. весьма ограничено. Оно значительно шире в с.а.р., особенно в тех случаях, когда требуется осуществить оптимальные в каком-либо смысле процессы в с.а.р. Наиболее же широкое применение вычислительные устройства могут найти в с.а.н., техническая возможность создания которых обусловлена бурным ростом техники вычислительных устройств. Особое значение приобретает применение вычислительных устройств в автоматических системах, осуществляющих: а) сложные виды управления, как то: управление многими взаимосвязанными величинами, сложные последовательности операций, управление, связанное с логическими операциями выбора одного или двух, или нескольких направлений хода процесса; б) оптимальное управление; в) управление в меняющихся условиях — при изменении характера задающих и возмущающих воздействий либо при изменении характеристик системы в значительном диапазоне.

Сообщается, что при построении сложных автоматических систем, включающих вычислительные устройства, основной задачей становится синтез систем, позволяющих сравнительно простыми средствами осуществить близкие к наилучшим операции управления. Эта задача синтеза является с математической точки зрения вариационной задачей. Утверждается, что в теории автоматических систем вырастает вариационная концепция, приобретающая особо важное значение как основной комплекс идей при построении с.а.н. Поскольку задачей с.а.н. является автоматический подбор параметров, характеристик и структурной схемы управляющей части, обеспечивающей минимум некоторой величины, то такое устройство по существу есть автомат для решения вариационной задачи. Поэтому нахождение законов построения автоматических вычислительных устройств, решающих вариационные задачи, означает одновременно нахождение законов построения с.а.н. Указывается, что развитие этих автоматов может идти в следующих направлениях: 1) создание математических машин для решения вариационных задач в различных областях науки и техники; 2) создание автоматических синтезаторов — автоматов для приближенного решения вариационной задачи синтеза оптимальной системы; 3) построение самонастраивающихся автоматических систем, работающих в производственных условиях. Отмечается, что, вне зависимости от направлений применения, все виды самонастраивающихся систем имеют общие принципы построения и общую теорию. В частности, способы построения с.а.н. тесно связаны с характером автоматического поиска. Основные виды поиска разбиты на 4 группы: 1) слепой поиск, пригодный лишь для сравнительно простых случаев; 2) поиск с анализом промежуточных результатов, применяемый в более сложных случаях, когда число минимумов больше одного, число переменных велико и требуется быстрее закончить поиск; 3) поиск при наличии дополнительных указаний либо приближенной теории; эти дополнительные сведения помогают сократить область, а с нею и время поиска; 4) поиск при наличии точной теории, существенно облегчающей процесс минимизации. Системы, в которых производится минимизация, могут быть построены следующими способами: 1) при помощи «качания» режима объекта и замера минимизируемой величины; изменение производится в таком направлении, чтобы достичь минимума минимизируемой величины; 2) с применением модели объекта, работающей в убыстренном темпе, на которую переносятся все изменения в параметрах объекта; многократное повторение процесса в такой модели при автоматическом изменении ее параметров позволяет найти минимум минимизируемой величины, после чего результат переносится на реальный объект. Построение автоматического синтезатора также может быть проведено на базе множества повторяемых на высокочастотной модели процессов с анализом результатов более медленной системой, которая может быть дискретного действия.

Рассматриваются 4 основные формы применения вычислительных устройств в автоматической системе: 1) командные вычислительные устройства, осуществляющие управление автоматической системой на основании входных данных; 2) вычислительные устройства для обработки информации, на выходе которых может образовываться как информация текущего характера, так и информация, учитывающая «историю» процесса либо осуществляющая прогноз или экстраполяцию на будущее; 3) вычислительные устройства, встроенные в замкнутую цепь автоматической системы; это регулирующие вычислительные устройства, применяемые в качестве управляющей части автоматической системы (основной путь внедрения вычислительных устройств в автоматические системы); 4) компенсирующие вычислительные устройства, действующие на основании анализа входных параметров системы. Библ. 26 назв.

Г. М. Грязнов

8405. Техника человеческих факторов—создание машины, приспособленной к человеку. Д е-В о р (Human engineering: Tailoring the machine to fit the man. D e V o r e C h a r l e s), Signal (Wash.), 1954, 8, № 3, 28—31 (англ.)

Рассказывается о проводимых в лабораториях военно-морского флота США работах по выявлению принципов проектирования сложного оборудования и машин с учетом возможностей и ограничений (физических, физиологических и психологических) обслуживающего персонала. Вопросы такого проектирования составляют «технику человеческих факторов» (human engineering), или «техническую психологию» (engineering psychology), которую автор характеризует как еще формирующуюся дисциплину. Отмечается, что принципы «технической психологии» применимы не только в военной технике, но и в гражданской промышленности.

Дается общее описание системы машина — человек; со стороны человека в систему входят рецепторы (органы чувств), центральная нервная система и эффекторы (мускулы), а со стороны машины — индикаторы, органы управления (рычаги, кнопки и т. п.) и основное оборудование машины. Задача «технической психологии» — подобрать и расположить индикаторы и органы управления так, чтобы машина работала оптимально при наименьших требованиях к способностям и тренировке обслуживающего персонала, с учетом его ограничений. Со ссылкой на опыты формулируется положение, что человек действует наилучшим образом в системе машина—человек, когда он ведет себя как «линейный низкочастотный усилитель», полоса частот которого не превышает 0,5 *гц*. Под словами «линейный усилитель» понимается, что человек всегда отвечает одинаковыми реакциями на одинаковые сигналы.

Для случаев, когда сложность системы не допускает работы человека в режиме простого усилителя, указываются возможности замены человека автоматом, например вычислительной машиной. Кратко обсуждается вопрос об информации, которую должен получать оператор для работы в режиме усилителя. Отмечаются трудности согласования психологической и технической терминологии.

Дается описание некоторых американских руководств по «технике человеческих факторов». Приводятся примеры практических разработок. Прилагается фотография электронного моделирующего устройства ЭАСЕ (EASE — Electronic Analog Simulating Equipment),

установленного в 1953 г. в Исследовательской лаборатории ВМФ США (Naval Research Laboratory).

Г. Н. Поваров

8406. Загрузка станков. Промышленное применение вычислительных машин. Бернерс-Ли (Machine loading — An industrial application of computers. Berners-Lee C. M.), Engineer, 1957, 203, № 5271, 169—171 (англ.)

Рассматриваются общие проблемы использования электронных цифровых вычислительных машин в области управления производством. Имеющиеся практические данные и исследования, проведенные в США и Англии, приводят к тому выводу, что здесь функции вычислительной машины должны сводиться лишь к своевременной выдаче справочных данных, необходимых для наиболее эффективной организации производственного процесса. Вычислительная машина в системе организации производства является связующим звеном между плановым отделом и производственными цехами, в связи с чем имеют место два потока входной информации и два — выходной. Вычислительная машина определяет очередность отдельных производственных операций и количество рабочих мест, исходя из расчета максимальной загрузки цехов при текущих колебаниях контрольного уровня готовой продукции. Приводятся данные английской вычислительной машины «Пегас», на которой предполагается проведение очередных исследовательских работ.

Е. М. Баскаков

8407. Оценка методов сортировки. Хоскен (Evaluation of sorting methods. Hosken I. C.), Proc. East. Joint Computer Conf. 1955, New York, 1956, 39—55 (англ.)

Рассматриваются различные методы сортировки и дается следующая классификация их:

1) Распределительная сортировка, куда, в частности, относится сортировка корреспонденции по географическим признакам. Например, Канадское почтовое ведомство кодирует признаки точками и сортирует корреспонденцию посредством фотоэлектрического устройства. Другой пример — механизм, сортирующий матрицы, возвращаемые в магазин наборных машин «интертип» или «линотип». Рассказывается также о конвейерной сортировке Рабинова (Jack Rabinow), применяемой Бюро переписей США (Bureau of Census).

2) Цифровая, или расходящаяся (divergent) сортировка, куда относится сортировка перфокарт по колонкам, цифрам, алфавиту, а также сортировка чеков, фактур и т. д. Так, фирма «Ундервуд» применяет для сортировки чеков, фактур и т. п. сортировальную машину с ручным управлением, содержащую до 50 карманов. В системе обработки чеков для банков (фирма «Интернэшнл Телеметер» — International Telemeter) сортировка чеков производится с помощью прикрепленной к краю каждого чека перфоленты. В системах «Берроуз» (Burroughs), «Тодд» (Todd) и «Андресограф-мультиграф» применяется кодирование чеков флюоресцентными чернилами. Примеры устройств для сортировки перфокарт — известные машины ИБМ, «Ремингтон Рэнд» и «Ундервуд Самас». Фирма «Истмен-Кодак» (Eastman Kodak) использует в своей системе «Миникард» сортировальную машину с циркулярной транспортной системой и автоматической подачей карт в карманы и из карманов. В вычислительной машине УНИВАК-Файл-Компьютер цифровая сортировка данных может производиться с использованием своего запоминающего устройства на магнитном барабане.

3) Объединительная сортировка, когда несколько последовательностей элементов информации объединяются в одну последовательность. Производится главным образом на магнитных лентах. В информационных машинах «Элеком» и «Бизмак» применяется сортировка по двум лентам, в вычислительной машине УНИВАК сначала применялась сортировка по двум лентам, а позже была разработана программа сортировки по трем лентам и более сложная программа «Аррейнджер» (Arranger) с применением быстродействующего внутреннего запоминающего устройства. В машине «Датаматик-1000» (Datamatic 1000) применяется широкая магнитная лента, что ускоряет сортировку. В машине ИБМ-705 используется сложная программа сортировки по трем лентам и, для ускорения сортировки, информация вводится большими массивами с лент во внутреннее запоминающее устройство.

4) Сортировка посредством вычисления адреса. Этот метод заключается в определении адреса кармана или ячейки по значению признака. Применяется в вычислительной машине МОНРОБОТ фирмы «Монро» при сортировке на магнитном барабане. Описано также приспособление «Савасорт» для сортировки вручную по этому методу.

5) Селекционная сортировка, осуществляемая последовательными сравнениями беспорядочно расположенных элементов информации. Применяется в машине ИРА (ERA) фирмы «Сперри-Рэнд» и в информационной системе «Диана», где такая методика сортировки позволяет ускорить печать выходных результатов.

6) Обменная сортировка, где сравниваются элементы информации, стоящие по адресам 1 и 2, и элемент с меньшим признаком записывается по адресу 1, после чего сравниваются элементы, стоящие по адресам 2 и 3, и элемент с меньшим признаком записывается по адресу 2 и т. д. Разрабатывалась, в частности, фирмой «Компьютер Контроль» (Computer Control Comp., США).

7) Бессортировочное распределение информации по признакам. Такое распределение осуществляется с помощью устройства «Tape DRUM» исследовательского центра «Clevite» (Кливленд, США), которое использует широкую магнитную ленту в виде ленточного барабана. Бессортировочное распределение информации осуществляется посредством больших быстродействующих запоминающих устройств с произвольной выборкой типов запоминающих систем ИБМ на магнитных дисках, «Потнер» и «Телекомпьютинг» на магнитных лентах, «Интернэшнл Телеметер» на фотографических пленках.

Сравнивая различные методы сортировки, автор приходит к выводу, что распределительная сортировка эффективна в тех случаях, когда количество возможных признаков мало по сравнению с количеством информации; цифровая сортировка выгодна в тех случаях, когда количество возможных признаков примерно равно количеству информаций, и в случаях, когда можно применить очень простую логику; объединительная сортировка рекомендуется тогда, когда количество признаков велико по сравнению с количеством информации.

Отмечается, что в конторских информационных установках все этапы процесса обработки документов должны быть в равновесии друг с другом, т. е. одна часть процесса не должна задерживать другую. Для этого в некоторых системах функции сортировки отделяются от вычислительных функций; так, в системах «Бизмак» и «Миниак» имеются специальные несложные сортировальные машины, которые подготавливают короткие магнитные ленты для основных вычислительных блоков этих систем. В других вычислительных системах («Датаматик 1000») для ускорения процесса сортировки применяются широкие (76 *мм*) магнитные ленты, движущиеся со скоростью 2,5 *м/сек* (56 тыс. знаков в 1 сек.).

В статье приводятся фото более 10 различных типов сортировальных устройств и обширная библиография (59 назв., большей частью фирменные материалы).

Б. М. Полыковская

8408. Расчет на электронной счетной машине критических скоростей ротора турбогенератора на упруго-

массивных опорах. Сахаров П.Е., Тер-Микаэлян Т. М., Вестн. электропром-сти, 1957, № 10, 9—17

8409. Конторские расчеты (Office computing), Electr. J., 1955, **154**, № 21, 1707—1708 (англ.)

Краткое сообщение о национальной конференции Ассоциации конторской администрации (Office Management Association) в мае 1955 г. в Брайтоне (Англия), где обсуждались вопросы применения современных вычислительных машин к учетно-плановым расчетам. Приведены фото машины ИБМ-702 и некоторых других устройств.

8410. Промышленный групповой счетчик. Брайерли (An industrial batching counter. Brierley R. W.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 314, 157—160 (англ.)

8411. Статистика и автоматические вычислительные машины. Спенсер (Statistics and automatic computers. Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, **4**, № 1, 6—7, 13 (англ.)

8412. Электронные счетные приборы. Кобарг (Elektronische Zählgeräte. Cobarg C. C.), Elektro-Anz., 1955, № 26, 239—241 (нем.)

8413. Фрезеровальный станок с цифровым управлением. Джонсон (A numerically controlled cammilling machine. Johnson E. C.), IRE Trans. Industr. Electronics, 1956, **3**, March, 80—86 (англ.)

8414. Электронная вычислительная машина для цветной печати. Роз (Electronic computer for color printing. Rose H. E.), Commun. and Electronics (N.Y), 1955, № 18, 268—272 (англ.)

Описывается электронная вычислительная машина, решающая систему трех уравнений 4-й степени менее чем в 50 *мксек*, чтобы установить количество четырех красок при цветной печати, необходимых для передачи цвета оригинального изображения. Из текста статьи

8415. Современный абак. Рид (Modern abacus. Reid E. Lewis), Princeton Engr, 1955, **15**, № 8, 16—17 (англ.)

Популярная статья об электронных цифровых вычислительных машинах.

8416. Расчет прогнозов погоды на вычислительной машине БЭСК. Дальквист (Väderleksberäkningar på Besk. Dahlquist Germund), Tekn. tidskr., 1955, **85**, № 13, 293—296 (шведск.)

8417. Сравнение цифровых и моделирующих вычислительных машин. Рубинов (Analogue vs. digital computers. A comparison. Rubinoff Morris), Proc. IRE, 1953, **41**, № 10, 1254—1262 (англ.)

8418. О некоторых эквивалентных машинах и механических аналогиях. Мур (Om noen ekvivalente maskiner og mekaniske analogier. Muur Sigurd), Elektrotekn. tidsskr., 1954, **67**, № 1, 1—8; № 2, 13—21 (норв.)

8419. Использование быстродействующей цифровой машины для прямого определения кристаллических структур. Ч. 2. Кокран, Дуглас (The use of a high-speed digital computer for the direct determination of crystal structures. 2. Cochran W., Douglas A. S.), Proc. Roy. Soc., 1957, **A243**, № 1233, 281—288 (англ.)

См. 1 см. Р Мат, 1955, 6177.

8420. Численные расчеты на цифровых машинах. Фрёберг (Numeriska beräkningar på siffermaskiner. Fröberg Carl-Erik), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 1-2, 33—47 (шведск.)

8421. Другие используют вычислительные машины так. Рубинфин, Льюис (Others use computers in these ways. Rubinfien David, Lewis Ralph F.), Petrol. Refiner, 1957, **36**, № 2, 105—108 (англ.)

Рассматривается применение электронных вычислительных машин в нефтяной промышленности США по состоянию на 1955 г. Статья основана на отчетах 25 главнейших нефтяных компаний. Рассмотрена машинизация учетно-плановых работ. Приведены сравнительные таблицы, показывающие применение электронных вычислительных машин при производстве различных операций. Е. В. Кариженский

8422 К. Введение в автоматические цифровые вычислительные машины. Ливсли (An introduction to automatic digital computers. Livesley Robert Kenneth. Cambridge, Univ. Press, 1957. viii 53 pp., ill., 8 sh. 6 d) (англ.)

См. также: 7565, 8037

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абасов А. М. 7810
Агаев Г. Н. 7679, 7681
Айзенберг Л. 7661
Айзерман М. А. 7709
Аксентьев Л. А. 7672 Д
Аллахвердиев Д. Э. 7912, 7913, 7927
Анисимова Е. П. 8184
Аржаных И. С. 7718
Артюшкин А. К. 7634
Ахиезер Н. И. 7628

Б

Балк М. Б. 7465
Балябин А. С. 8194
Бахвалов С. В. 8152, 8181 К
Бахтин И. А. 7924
Бедельбаев А. К. 7763
Белкина М. Г. 7760, 7794, 7795
Белов П. М. 8186
Березанский Ю. М. 7737
Берман Д. Л. 7630
Бернал Дж. 7381
Бескин Н. М. 8185
Білий Б. М. 7427
Бирман К.-Р. 7394
Бирман М. Ш. 7739
Божоров Е. 7852
Бойдалов А. К. 8151
Бондарев А. Л. 7843
Боровский П. В. 8291
Бородачев Н. М. 7784
Боярский А. Я. 8032 К
Боярчук А. И. 8191
Брадистилов Г. 8179 К
Бэлэнеску И. Н. 7377

В

Вайнберг М. М. 7812
Вайнштейн Л. А. 7795
Векуа И. Н. 7365
Витушкин А. Г. 7605
Воробьев Н. Н. 8036
Ворович И. И. 7790
Вострецов Б. А. 7748
Врублевская И. Н. 8248
Врэнчану Г. 8232
Вудворд Ф. М. 8138 К

Г

Гаврилов М. А. 7569
Гайдук Ю. М. 7407
Галиуллин А. С. 7705
Гамкрелидзе Р. В. 7764
Гантмахер Ф. Р. 7709
Гардашнік М. Ф. 7511
Геронимус Я. Л. 7851
Гнеденко Б. В. 7366
Голдман С. 8137 К
Гольштейн Е. Г. 7673 Д
Горошко В. Я. 7426
Граев М. И. 7920
Гранас А. 7593
Грацианская Л. Н. 7408
Гройсман С. Х. 7490
Гу Лянь-кунь 7694
Гуревич С. Г. 8267
Гусейнов Э. И. 7810

Д

Данилюк П. М. 8149
Дан Сун-ши 7642
Джавадов М. Г. 7807
Диковская Э. И. 8027, 8028
Диткин В. А. 7879
Добычин В. П. 8082
Доступов Б. Г. 7945
Дулов В. Г. 7776
Дынкин Е. Б. 7968

Е

Евграфов М. А. 7636
Еремин С. А. 7662
Еругин Н. П. 7721 К
Ефремов Е. П. 7704

З

Задорожный А. М. 8195, 196
Заманов Т. А. 7681

И

Иванов В. К. 7664
Иванов Т. Ф. 8092
Инь Вэнь-линь 7453
Иоанин Г. 7561
Иржина М. 7963

К

Кабальський М. М. 7827
Кабулов В. К. 7782
Казьмин Ю. А. 7906
Каменский Г. А. 7723 Д
Канторович Л. В. 7562
Карапетян К. И. 7752
Карапетян С.Е. 8217
Каргаполов М. И. 7496
Квальвассер В. И. 7848
Ким Кё Сек 7931
Киро С. Н. 7406
Кислицын С. Г. 8153 Д
Киш О. 7629
Климов В. Н. 8099
Коваль П. И. 7701
Кованько А. С. 7631
Козманова А. А. 7666
Кокарева Т. А. 7729
Кондартьев В. А. 7716
Конюшков А. А. 7632 Д
Кордонский Х. Б. 8076
Коробейник Ю. Ф. 7910
Кострикин А. И. 7522
Красносельский М. А. 7901, 7902
Крейн С. Г. 7901
Кривошеин Л. Е. 7820
Крот А. М. 8197
Кручкович Г. И. 8234
Кушнир Е. А. 7399

Л

Лаперашвили М. Л. 8188
Латышева К. Я. 7698
Лебедев В. И. 7728
Лейбензон З. Л. 7926
Леонов Ю. П. 8112
Ли ЕнПир 7641
Линник Ю. В. 7520
Ліхін В. В. 7836
Лобачев С. В. 7819
Лопатинский Я. Б. 7482
Ло Цзин-бо 8061
Лукашевич Л. 8374
Лу Ци цзянь 7663
Любич Ю. И. 7874
Любовин В. Д. 7908
Лю Ли-цюань 7643
Ляпин Е. С. 7510
Ляпунов А. А. 7384

М

Мазуренко Д. М. 7872
Майстрова Т. Л. 7555, 7860 К
Малкин И. Г. 7691
Мамедов Я. Д. 7804, 7814
Маркушевич А. И. 7397
Мартынюк А. Е. 7825
Меламед В. Г. 7761
Метревели М. И. 8139
Мишику М. 7771
Моденов П. С. 8181 К
Можаев И. В. 8148
Моисил Г. К. 7561
Муравьев П. А. 7695, 7696

Н

Наан Г. 7367
Наджафов К. А. 7818
Наумович Н. В. 8192
Никитин Б. Д. 8180 К
Никулин Н. А. 8170
Новоселов В. С. 7766, 7767, 7768
Новрузов А. А. 7679
Нэсибов С. М. 7815

О

Орлов В. Б. 7369
Остапенко В. Н. 7774
Остиану В. М. 7558, 7560, 7568
Охоцимский Д. Е. 8270

П

Павлюк И. А. 7710
Пархоменко А. С. 8181 К
Персидский К. Л. 7898
Плисс А. 7730
Поваров Г. Н. 7556, 7557, 7559
Покало А. К. 7649, 7650
Пономарев С. А. 7425
Потапенко А. А. 7762
Пугачев В. С. 7945
Пугачев Я. И. 8244 Д
Писецкий С. А. 8225
Пятецкий—Шапиро И. И. 7504, 7505

Р

Райков Д. А. 7887
Раљевић Ш. 7658
Регирер С. А. 7778
Редозубов Д. В. 7798
Рехтман — Ольшанская П. Г. 7853
Решетняк Ю. Г. 8260
Римский—Корсаков Б. С. 7856, 7868
Рогинский В. Н. 7554
Родионов С. В. 8180 К
Розанов Ю. А. 7957
Розенкноп И. З. 7542
Романовський Б. В. 7426
Рубинштейн Л. И. 7799
Русишвили О. С. 8187
Рыбин П. П. 7805
Рымаренко Л. А. 8298
Рябов Ю. А. 7839

С

Савинов Г. В. 7683
Салехов Д. В. 7900
Салманова Д. 7757
Санов И. Н. 7938
Сахаров П. Е. 8408
Сахнович Л. А. 7806 7914

Се Бан-цзе 7541
Севастьянов Б. А. 7970
Симонов Н. И. 7398
Син Джон Лим 8292
Синюков Н. С. 8230, 8231, 8236
Сираждинов С. Х. 8001
Сиразетдинов Т. К. 7817
Слугин С. Н. 8277
Смирнов Г. И. 8190
Соболев В. И. 7902
Содномов Б. С. 7618
Соколов Б. В. 8147
Сретенский Л. Н. 7772
Статулявичус В. А. 7971
Стебаков С. А. 7765
Султанов Р. М. 7811
Султанова М. С. 8027, 8028
Супруненко Д. А. 7503
Сюй Чжэн-фань 7640
Ся Дао-син 7639

Т

Тагамлицки Я. 7894
Тагути Г. 8072
Такэда 7393
Танака 8216
Таратынова Г. П. 8270, 8271
Телькснис Л. А. 8112
Тер-Микаэлян Т. М. 8408
Тихомиров В. М. 7604
Томфельд Ю. Л. 7560

У

Ульянов П. Л. 7645
Усольцев С. А. 7755
У Чжи-цюань 7847

Ф

Федорова В. С. 7824
Фельдбаум А. А. 7719, 8404
Фемпл С. 7850
Фихтенгольц Г. М. 7434
Фишман К. М. 7646
Флейшман Б. С. 7934
Фок В. А. 7793

Х

Хаймульдин О. 7678
Харазов Д. Ф. 7699
Харкеевич Ю. Ф. 8266
Хатипов А. Э.-А. 8214, 8215
Хаята 7487
Хованский Г. С. 8302, 8309 К
Хомутов К. М. 8193
Хубларова С. Л. 8286
Хуснутдинова Н. В. 7742
Хэ Цзо-сю 8061

Ц

Цзян Цзэ-пей 7954
Цитович П. А. 7683
Цумме Г. 7432

Ч

Чан Чан Хун 7687
Черницкий П. И. 7983 К
Четвериков Н. С. 8021
Чунихин С. А. 7495
Чушкин П. И. 8275
Чэнь Хань-линь 7648

Ш

Шанин Н. А. 7440
Шафаревич И. Р. 7522
Шашкин Ю. А. 7746
Шехтер О. Я. 7759
Ширшов А. И. 7544
Шолохович Ф. А. 7720, 7722 Д
Шульгин М. Ф. 7688
Шульман Т. А. 8210

Щ

Щегольков Е. А. 7623 Д

Э

Эльсгольц Л. Э. 7706
Энеев Т. М. 8270

Ю

Юсупов А. Я. 8261
Юшкевич А. А. 7969
Юшкевич А. П. 7396
Юшков П. П. 8268

Я

Яблонский С. В. 7384
Яглом А. М. 7952
Яковлева Г. Ф. 7816

A

Abian S. 7883
Ablow C. M. 8040
Abrams J. W. 8056
Adachi R. 8295, 8297
Adams D. P. 8305
Adler A. 7600
Agnew R. P. 7863
Alardin F. 8169
Albert A. A. 7461
Albert G. E. 8276
Albrecht F. 7573
Algrain P. 7388
Alonso M. 7801
Altman M. 7922, 7923, 7928, 7929
Ambrose W. 8245
Amemiya I. 7892
Ammeter H. 8119
Anderson V. C. 8336
Andersson J. 7464, 7466
Andreoli G. 7837
Antosiewicz H. 8059
Aoki K. 7589
Arant G. W. 7566
Archbold J. W. 7998
Arens R. 8110
Armitage J. V. 7460
Armstrong R. 7498
Arnoff E. L. 8049
Aronszajn N. 7733, 7740
Arsove M. G. 7638
Asplund E. 7889
Atiyah M. F. 7603
Aufenkamp D. D. 7567

B

Balada F. 7404
Balakrishnan A. V. 8108
Bálint E. 8306 К
Bandeen R. A. 8125
Barnes R. C. M. 8345
Barta J. 8165
Barton D. E. 8000, 8009
Basu D. 7964
Batchelor G. K. 8098
Battin R. H. 8139 К
Bauer L. 8371
Belevitch V. 8299
Bellman R. 7882
Bennett R. R. 8388
Berghuis J. 7861 Д
Bergmann P. G. 8243
Berners—Lee C. M. 8406
Bertolini F. 7608
Beth E. W. 7548
Bhattacharya P. K. 8008
Bhonsle B. R. 7865
Bianchi L. 8145 К
Bieri H. 8263
Bilinski S. 8209
Blanc—Lapierre A. 7956
Blanuša D. 8255
Blasbalg H. 8104
Blaschke W. 8259 К
Blum R. 8237
Boas R. P., Jr 7652
Boerma E. 8167
Bonferroni C. 7955
Bonsall F. F. 7893
Booton R. C., Jr 8109
Borůvka O. 7409, 7412, 7416
Bott R. 7682
Bottema O. 8161
Bourdon J. 8176 К
Bouthillon L. 8322
Boxer R. 8365
Brambilla F. 8053
Brems H. 8091
Breuer F. D. 7833
Brierley R. W. 8410
Briggs F. E. A. 8071
Brillouin L. 8102
Brink E. L. 8038
Brodersen S. 7492 К
Brooks F. P. 8317
Browder F. E. 8265
Brown R. M. 7565
Bruijn N. G. de 7502
Bruno A. 8065
Bucur Fl. 7899
Burau W. 8224
Busbridge J. W. 7809
Butler J. W. 8273
Buzano P. 7858 К

C

Camacho A. 8131
Cani J. S. de 8038
Cartan H. 7525, 7529, 7530
Carter H. O. 8084
Cartier P. 7533—7535
Casanova G. 8202
Cecconi J. 7821, 7822
Čermák J. 7410, 7411
Červená A. 7480
Champernowne D. G. 8132
Chang Su-chang 7595, 7596
Chatterjee C. K. 7864
Chen Han-lin 7648
Chen Yung-Ming 7624
Chern Shiling-shen 8262
Cherubino S. 8062
Chevalier A. 7909
Chevalley C. 7527, 7528, 7529, 7531, 7532, 7535
Chihara T. S. 7838
Chisini O. 7379
Choquet G. 7895
Choudhury A. C. 7552
Christie L. S. 7881
Church A. 7446 К
Cichowicz A. 8085
Cimmino G. 7738
Clauser E. 8242
Cobarg C. C. 8412
Cochran W. 8419
Cohen A. C., Jr 8117
Cohn P. M. 7505
Cohn R. M. 7517—7519
Collar A. R. 7702
Collins D. N. 8124
Comberousse C. de 8183 К
Cook J. M. 7854
Cooke—Yarborough E. H. 8345
Corduneanu C. 7700
Cornfield J. 8127
Cosnita C. 8256
Couffignal L. 7374, 7375
Courtillot M. 8081
Cox D. R. 7979
Crow E. L. 8029
Čulík K. 7420
Curtiss J. H. 8272
Curzio M. 7500, 7549
Cutolo I. 8063

D

D'Addario R. 8066
Dahlquist G. 8416
Dannals G. C. 8100
David F. N. 8000, 8009
Davis H. 7992
Davis H. 7992
Davis M. D. 7449 Д
Dean R. A. 7551
Debever R. 8229
De Giorgi E. 7823
Delachet A. 8198 К
Delsarte J. 7734
Deming W. E. 7991
De Nardo V. 8118
Denjoy A. 7651
Deny J. 7895
Derr A. J. 8399
De Socio M. 7796
DeVore C. 8405
Diaz Ungria A. 8131
Dieulefait C. E. 7871
Dinculeanu N. 7904
Dixon W. J. 8002
Dobrzycki S. 7401
Domar Y. 7612
Doob J. L. 7741
Dou A. 8251, 8252
Douglas A. S. 8419
Douglas J. B. 7943, 7944
Dreetz W. 8312
Drenick R. 8108
Drobot S. 8080
Dubec A. 7428
Duffin R. J. 7745, 7878

Dugué D. 7950, 7982 K
Duncan C. E. 7450, 7451
Duncan W. J. 7708
Dusailly J.—F. 8379

E

Eeden C. van 8003, 8004
Egervary E. 7483
Ehrmann H. 7684
Eisemann K. 8043
Elder F. L. 7430
Elianu J. 8253
Enters J. H. 8088
Erdös P. 7462

F

Faedo S. 7896
Fantappié L. 7724
Faris J. E. 8042
Faure R. 7693
Fazekas F. 8220 K
Feeney G. J. 8039
Feldman J. 7919
Fell J. M. G. 7919
Feller W. 7974
Fernandez G. 8226
Ferrer Figueras L. 7727
Fetter R. B. 8047
Fishera G. 7417
Findley L. D. 8366
Fisz M. 7936, 7965
Fitzgerald E. L. 8364
Floyd E. E. 7581
Fogel L. J. 8114
Fordsmand M. 8390
Fornaseri M. 8377
Fortet R. M. 8115
Fourès Bruhat 7753
Fowler F., Jr 8340
Frank L. 7415
Freund J. E. 7937
Friedman A. 7712
Fröberg C. E. 8310, 8420
Fröhlich A. 7547
Fucks W. 7378

G

Gabriel R. F. 7654
Gallissot F. 8249
Gander R. S. 8135
Gantmaher F. R. 7493 K
Garding L. 7732
Gaudiot P. 8178 K
Géhéniau J. 8229
Ghosh M. N. 7967,
Ghosh B. 7995
Gilbert E. N. 7494
Giovanardi M. 8199 K
Girault M. 7984 Д
Gnanadesikan R. 8017
Godeaux L. 8203
Godement R. 7536, 7537, 7538
Goertzel G. 8294
Golay M. I. E. 8318
Gold L. 7869
Gonzalez del Valle A. 8381
Goodman T. P. 8047
Goormaghtigh R. 7467, 8163
Gourevitch G. 7486
Grasso P. 8227
Green A. E. 7789
Greenspan D. 8210
Greger K. 7478, 7481
Griffith J. L. 7875
Grigore I. 7371
Grothendieck A. 8247
Gugenheim V. K. A. M. 7602
Günther W. 8150
Guttman I. 7997
Guttman L. 8070
Gyires B. 7947

H

Haack W. 8200 K
Hadwiger H. 8263
Hahn W. 7707
Haimovici A. 7813
Halfar E. 7578
Halmos P. R. 7980 K
Halter A. N. 8084
Hamming R. W. 8352
Hanai S. 7577
Hannan E. J. 8024
Hardiman N. J. 7786
Harley B. I. 8023
Harris T. E. 8094
Hayata Y. 7487
Head J. W. 8278, 8311
Heins A. E. 7781
Heller S. 7390
Helmer E. 7386
Hemelrijk J. 8034 K
Henkin L. 7441
Hennequin M. A. 8283
Henon M. 8394
Henrici P. 7866
Herz C. S. 7873
Herzel A. 8010
Heselden G. P. M. 7862
Higdon R. V. 8052
Higman G. 7497
Hille E. 7677
Hocking J. G. 8084
Hoehnke H.—J. 7539
Hoffman A. 8059
Hofmann J. E. 7391
Hofmann O. 8172
Hofsommer D. J. 7855
Hohn F. E. 7567
Honma E. 7589
Hopf E. 8096
Horadam A. F. 7499
Horálek V. 8083
Hornby H. 7951
Hosken I. C. 8407
Howells G. 8345
Hsieh Pagn Chieh 7541
Hukuhara M. 7685
Hult J. 8355
Hunter R. P. 7576
Hyman M. A. 7735

I

Inkeri K. 7463
Inoue Y. 7588
Ionescu D. V. 8160
Ionescu H. 8033 K
Iseki K. 7905
Ishihara S. 8235
Ito K. 7953

J

Jackson H. L. W. 7667
Jackson R. R. P. 8134
Jacob M. 8171
Jacobs K. 7975
Jaeckel K. 8116
James I. M. 7592
Jeffrey R. C. 7563
Jenkins J. A. 7668
Jenner W. E. 7546
Jensen A. S. 8338
John P. W. M. 7966
Johnson E. C. 8413
Johnson L. G. 7999
Johnson N. L. 7994, 7998, 8016
Jones J., Jr 7689
Jones J. M. 8335
Jones Ph. (Ed.) 7387
Juvancz I. 8126

K

Kac M. 7946
Kadison R. V. 7915
Kallianpur G. 8019
Kamke E. 7423
Kampé de Fériet J. 7834
Kaneko T. 7589
Kaprekar D. R. 7468
Karp S. N. 7773
Karush W. 8041
Kasahara S. 7885, 7886
Kaufmann A. Y. 8045
Keller J. B. 7743, 7754
Kemeny J. G. 7976
Kennedy A. J. 8380
Keppler K. 8175 K
Kijne D. 8168
Klee V. L., Jr 7888
Klein R. C. 8376
Kneser M. 7456
Ko L. K. 7694
Kobayashi S. 8239
Koch R. J. 7514
Kodama Y. 7586
Kolmogoroff A. N. 8101
Komamiya Y. 7489
Komatu Y. 7647, 8141 K
König H. 7656
Kowalczyk B. 8264
Kraker J. 8157
Kramer V. A. 7911
Kravtchenko J. 7775
Kreindler O. 8173
Kreyszig E. 7725
Krysicki W. 7942
Krzyżanski M. 7756
Kubinski T. 7443
Kudo A. 8013
Kuhnen T. 8284
Kuiper N. H. 8233
Künzi H. 7653
Kuroda T. 7659

L

Lacaz Netto F. 8177 K
Lafon J. 7523, 7524
Landenna G. 7988
Landsberg M. 7616
Laning J. H., Jr 8139 K
Lauffer R. 8155
Laurenti F. 7840
Laville G. 8274
Layton W. I. 7429
Lazard M. 7526
Leeuw K. de 7665
Leray J. 7635, 7726
Levitzki J. 7540
Lewis R. F. 8421
Libois P. 8221
Lindley D. V. 8095
Linfoot E. H. 8022
Lipták T. 8126
Liu Li-chuan 7643
Livesay G. R. 7584
Livesley R. K. 8422 K
Löbell F. 8213
Löfgren L. 8382
Lojasiewicz S. 7835, 7841, 7845
Look K. H. 7663
Lopes L. 7485
Lopez Gali E. 7469
Łopowok L. 8159
Lorch E. R. 7903
Luce R. D. 7881
Ludwig G. 7736
Luke Y. L. 7431
Lyra C. B. de 7590

M

McCarthy P. J. 7457, 7470
McCrossen G. 7877
MacDonnell J. J. 7671 Д
McGarrah R. E. 8050
MacKenzie D. C. 8057
McNown J. S. 7775
McPherson W. W. 8042
Mahler 7477
Makowski A. 7471
Manaira M. 7987, 8044
Manaresi G. 7676
Manfredi B. 7688
Manteuffel K. 7508
Marcus M. 7485
Marinescu G. 7921
Markovitch D. 8279
Marner G. R. 8387
Martan F. 7419
Martín Jadraque V. 7389
Masson H. 8308 K
Mathews M. V. 8375
Matsushima Y. 7553
Maxwell E. A. 8182 K
Mazurkiewicz S. 7981 K
Meer B. van der 8058
Menger K. 7644
Mennicke J. 7574
Mercier A. 7373
Meyer H. A. 8120
Míčka J. 8303
Mickle E. J. 7613
Middleton D. 8105
Mignot N. 8401—8403
Mihaila N. 7859 K
Mihoc G. 7972
Mikusiński J. 7932
Milne—Thomson L. M. 7770
Milnor J. 7601
Mine A. 8031
Misicu M. 7783
Misztal F. 8269
Mitrinovic (Mitrinovitch) D. S. 7828, 7829
Mogensen P. 7857 K
Mohanty R. 7627
Monna A. F. 7897
Moore J. C. 7587
Moore P. G. 8007
Moran P. A. P. 7867
Mori T. 7892
Morris W. T. 8075
Moser J. 7674
Mostow G. D. 7580, 7582
Mueller R. K. 7564
Mullin A. A. 7474
Münch G. 8122
Muroga S. 8107
Murphy C. H. 7690
Muto Y. 8240
Muur S. 8418
Myers D. M. 7697
Myers G. H. 8106

N

Nadler M. 8313
Naito M. 7831
Nakamori K. 7750
Namian P. 8321
Nanda M. 7627
Nandi H. K. 8005
Naslin P. 8396—8398
Natucci A. 7395
Neisser H. 8064
Neter 8142 K
Neugebauer C. J. 7613
Nevanlinna R. 8257
Nicholas C. P. 7846
Nickols D. G. 8134
Nidditch P. H. 7448 K
Nishimiya H. 8141 K
Noble M. E. 7876

Noether G. E. 7993
Nolde B. 8129
Nomizu K. 8250 **K**
Nowacki W. 7791, 7792, 7797
Numakura K. 7516

O

Obalski J. 8014
Obata M. 8235
O'Beirne T. H. 7438
Oderfeld J. 7996, 8077
Olech C. 7714
Olubummo A. 7917
Oniga T. 7447 **K**
Onoyama T. 7949
Opial Z. 7714
Ortlieb I. 8089
Ostrowski A. 7479, 7633
Otsuki T. 8246
Ottaviani G. 7941
Oxtoby J. C. 8035
Ozawa M. 7655

P

Pacelli M. 7787
Pack G. J. 8383
Pagni M. 7606, 7607
Paige L. J. 7545
Pall G. 7458
Palomba G. 8067
Pantić S. 7832
Parsons D. H. 7802
Patnaik P. B. 8006
Pelczyński A. 7610, 7890, 7891
Pereira Gomes A. 7372
Peremans W. 7501
Peterson F. P. 7594
Peterson S. R. 7405
Peyser G. 7751
Pfluger A. 7669 **K**
Phillips W. E., Jr 8383
Pichler O. 8055
Piehler J. 7454
Pierce R. S. 7543
Pimentel Gomes F. 7491
Plans A. 7918
Pollaczek F. 8143 **K**
Pop L. 8154
Popoff K. 7769
Power G. 7667
Preisendorfer R. W. 8093
Preston G. B. 7513
Proudfoot A. G. S. 8307 **K**
Prvanovitch M. 8238

R

Radó T. 7614, 8258
Radochová V. 7413, 7414
Rajagopal C. T. 7609
Rao C. R. 8019
Raymond F. H. 8351, 8389
Reid E. L. 8415
Renyi A. 7960, 8086, 8087
Richardson J. W. 8000
Richman P. 8371
Rieder J. 7611
Rideout V. C. 8113
Rios S. 8131
Rivlin R. S. 7789
Roberts P. H. 8097
Robinson A. 7442
Rodgers A. W. 7697
Rolewicz S. 7010
Romnik H. 7736
Rooney P. G. 7849
Rooy A. J. van 7383
Rose H. E. 8414
Roseau M. 7779, 7780, 7808
Rosenberg A. 7521
Rossier P. 8158, 8201
Roucné E. 8163 **K**
Roy S. N. 8017
Rubinrien D. 8421
Rubinoff M. 8417
Rudel H. 7436
Rudin M. E. 7575
Rudra A. A. 8074
Ruiz Palá E. 8079
Rutishauser H. 8315
Růžička M. 8288
Rycmik K. 7402, 7403, 7418, 7422

S

Saban G. 8211, 8212
Saito T. 7686
Saito Y. 7591
Sakaguchi M. 7989
Saitykow M. N. 7703
Samson E. W. 7564
Santaló M. 7380
Sarkadi K. 8011
Savage I. R. 8046
Sbrana F. 7788
Schatz J. A. 7916
Schechter M. 7744
Schiit H. 7476
Schmidt A. 7692
Schmidt O. 8303
Schneider H. 7444
Schumann R. 8301
Schütte K. 8254
Schützenberger M. P. 7978
Schwarz H.—R. 8285
Schwarz S. 7507
Scott W. R. 7512
Segal I. E. 7935
Segedin C. M. 7830
Seifert W. W. 8375
Serre J.—P. 7570
Seshu S. 7567
Shah Tao-shing 7639
Shields A. 7515
Shimada N. 7599
Shimizu T. 7717
Shirota T. 7731
Shubik M. 8054
Sierpiński W. 7622 **K**
Signorini A. 7800
Simonsen W. 8289, 8290
Singer I. 7925
Singh B. 7625
Smith K. T. 7733
Snell J. L. 7976
Solomon L. 7785, 7826
Spampinato N. 8222, 8223, 8228
Speiser A. P. 8343
Spencer D. C. 7602
Spenser G. 8411
Spitzer F. 7948
Spooner M. G. 8113
Springer G. 7670 **K**
Stam A. J. 7977
Stange K. 8038
Stanistawski J. 7996
Steel T. B., Jr 8314
Steenrod N. E. 7571
Stein E. M. 7637
Stein M. L. 8287
Steinbrenner A. H. 7842
Steiner H. G. 7385
Stemme E. 8356
Stevens C. 8018
Stojaković M. 7484
Stolt B. 7475
Straus E. G. 7619
Strotz R. H. 8060
Subramanyam S. S 8174
Sugiyama H. 7990
Suschowk D. 7488
Sváb J. 8020
Švec A. 8219
Švec M. 7713
Szász G. 7550
Szentmártony T. 8086
Szeptycki P. 8372
Szmelter J. 8293

T

Takacs L. 7958, 7959, 7961, 7962
Takeda K. 7393
Tamura I. 7598
Tamura J. 7660
Tamura T. 7506, 7509
Tang Sung-shih 7642
Taniyama Y. 8207
Tatarkiewic K. 7675
Taussky O. 7458
Taylor W. F. 8128
Terrazas G. 7621
Thalberg O. M. 8204, 8205
Thébault V. 7472, 8156, 8164, 8166
Thoma E. 7907
Thomée V. 7749
Thomissen F. X. 8090
Titus C. K. 8316
Toda H. 7591
Todorović D. 7832
Tolle H. 7747
Tortrat A. 7956
Toscano L. 8162
Toth E. 8144 **K**
Trexler G. F. 8392
Tricomi F. G. 7803, 7870
Trybula S. 7940
Tsurumi S. 7930
Turan P. 8282
Tweedie M. C. K. 8012
Twery R. 8051

U

Ule L. A. 8111
Ulin B. 8015
Uluçay C. 7657
Urbanik K. 7939, 7973

V

Vajda S. 8136
Vanlandingham D. 7435
Varnum E. C. 8048
Vazsonyi A. 8041
Velasco de Pando M. 8280
Verhoeff J. 7473
Verhuist M. 7382
Vernotte P. 8295
Vesely F. 7400
Vetter Q. 7392
Vezzani R. 8391
Vincze I. 8030, 8078
Viola T. 7620
Viswanadha Sarma L. V. K. 7777
Vogt A. 7376
Vranceanu G. 8241

W

Wabeke D. 8034 **K**
Wagner K. 7617
Walden W. 8037
Wang Hao 7445
Ware W. H. 8341
Warmus M. 8080
Wasserman W. 8142 **K**
Watanabe S. 8103
Watson G. L. 7455, 7459,
Watson G. S. 8026
Wazewski T. 7714
Weil A. 8206
Weston J. D. 7884
Westphal W. R. 8146
Weyrick R. C. 8373
White J. S. 8025
Whitehead J. H. C. 7583, 7597
Whyburn G. T. 7572
Wiener N. 7452
Wilhelmsson H. 8310
Wilkinson J. H. 8319
Wilson W. P. 8311
Wintner A. 7452, 7711, 7715
Wishart D. M. G. 8133
Wiśniewski K. 8077
Wittich H. 7653
Wolfe P.
Wolff P. de 8073
Worley W. J. 7833
Wyler O. 7615

Y

Yamabe H. 7758, 7844
Yang Chung-Tao 7579, 7585
Yano K. 7625
Yin Wen-lin 7453
Yokota I. 7591

Z

Zajta A. 8281
Zelinsky D. 7521
Zeller K. 7423
Zeman J. 7370
Zoroa Terol P. 8123
Zubrzycki S. 8121
Zwinggi E. 8130

Технический редактор *Р. М. Денисова*